

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

К. В. Карельский^{a,*}, А. С. Петросян^{a,b,**}, А. В. Черняк^{a,c***}

^a *Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^b *Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

^c *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 октября 2011 г.

Исследована система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды в поле силы тяжести над ровной подстилающей поверхностью. Получены все автомодельные непрерывные централизованные решения и автомодельные разрывные решения. В явном виде решена задача распада произвольного разрыва для уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды. Показано существование четырех различных конфигураций, реализующих решение задачи распада произвольного разрыва. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия для ее реализации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическое приближение мелкой воды является альтернативой решению полной системы гидродинамических уравнений тяжелой жидкости. Эти уравнения получаются из полных уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, находящейся в поле силы тяжести, усреднением по глубине слоя, в пренебрежении вертикальной неоднородностью плотности потока горизонтального импульса и в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному линейному размеру задачи [1, 2].

Приближение мелкой воды играет фундаментальную роль для изучения крупномасштабных процессов в атмосферах планет и океанов [3], в последнее время оно было успешно применено для изучения нелинейных течений магнитной гидродинамики [4]. Приближение мелкой воды в магнитной гидродинамике применяется для изучения солнечного тахоклина [5–7], для изучения растекания материи при дисковой аккреции в нейтронных звездах [8, 9], для изучения динамики атмосфер нейтронных звезд [10, 11], для изучения атмосфер внесолнечных планет [12].

Несмотря на фундаментальный характер приближения мелкой воды для описания течений жидкости в поле силы тяжести, классические уравнения мелкой воды не учитывают их плотностную неоднородность, всегда формируемую силой гравитации. Поэтому условия применимости классических уравнений мелкой воды к реальным средам ограничиваются не только малостью отношения глубины слоя к характерному линейному размеру задачи, но и характерным вертикальным масштабом изменения плотности вследствие наличия силы тяжести и вертикальными неоднородностями горизонтального поля скорости. Для описания эффектов плотностной неоднородности предложена модель течения тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды [13]. Эта модель получается из полных уравнений движения Эйлера сжимаемого тяжелого газа усреднением по толщине слоя. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости [14]. Такие условия возникают в течениях газов с примесями твердых частиц, на-

*E-mail: karelsk@mail.ru

**E-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

***E-mail: alexmexmat@gmail.com

пример, в физике планетных колец [15], при изучении пылевых бурь на Марсе [16], при изучении крупномасштабных течений в атмосфере Земли с частицами пыли или песка [13], а также при изучении извержений вулканов [17, 18].

Предложенная система выгодно отличается от классических уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В сжимаемых уравнениях мелкой воды это взаимодействие определяется не только высотой и скоростью, но и средней плотностью столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, что является фундаментальным преимуществом при применении этих уравнений к атмосферным, океаническим и астрофизическим явлениям. В работе [13] показано, что учет сжимаемости в модели мелкой воды приводит к улучшению предсказания скорости распространения газового потока с примесью твердых частиц. Такое приближение является альтернативой классическим многослойным моделям мелкой воды для течений с неоднородной плотностью [19], поскольку учитывает эффекты стратификации и не требует разбиения течения на несколько однородных слоев при численном моделировании крупномасштабных процессов. Фактически сжимаемое приближение мелкой воды для изучения крупномасштабных неоднородных процессов играет такую же фундаментальную роль, как и аналогичное приближение в гидродинамике несжимаемой однородной жидкости.

Гиперболичность уравнений сжимаемой мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В работе изучаются простые автомодельные решения уравнений сжимаемой мелкой воды: волны разрежения и ударные волны. Такие решения являются основополагающими в исследовании нелинейных волновых явлений и позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва. В работе получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями для уравнений сжимаемого газа в приближении мелкой воды, впервые возникшей в газовой динамике (задача Римана) [20]. Показано, что решение представляет собой одну из четырех волновых конфигураций: «две ударные волны», «волна разрежения, ударная

волна», «две волны разрежения», «две волны разрежения, зона вакуума». В работе найдены условия для начальных данных, при которых реализуется каждая конкретная конфигурация. Проведен сравнительный анализ полученных решений с решениями классической мелкой воды.

В разд. 2 описана исходная система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды вместе с необходимыми предположениями. В разд. 3 получены непрерывные решения системы в виде простых и центрированных волн Римана, непрерывные автомодельные решения. В разд. 4 найдены разрывные решения исходной системы уравнений в виде ударных волн, получены соотношения Ранкина–Гюгонио на разрыве. В разд. 5 сформулирована задача Римана; показано, что ее решение представляет собой одну из четырех волновых конфигураций; получены условия для начальных данных, необходимые и достаточные для реализации каждой конфигурации; проведен сравнительный анализ полученного решения с решением классической задачи Римана для несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. В Заключении приведены основные результаты работы.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе описывается система уравнений мелкой воды для сжимаемого газа в поле силы тяжести на ровной подстилающей поверхности.

Система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды получается из классических уравнений движения Эйлера сжимаемого газа усреднением по высоте слоя [13], при этом мы пренебрегаем интегралами от произведения отклонений плотности и горизонтальной скорости от их средних значений. Газ предполагается политропным, совершенным, с гидростатическим распределением давления. Все процессы в области непрерывности считаются адиабатическими. Скорость частиц газа, а также фазовые скорости возмущений предполагаются малыми по сравнению со скоростью звука (пренебрегаем акустическими эффектами).

Система координат выбрана таким образом, что ось Z направлена вдоль вектора силы тяжести в противоположном направлении, ось X направлена вдоль подстилающей горизонтальной поверхности.

Исходная система уравнений имеет вид [13]

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$l(x, t) \equiv \frac{p_a}{g} \left(\left[1 + h(x, t) \frac{g}{c_p T_i} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right), \quad (2.2)$$

$$a(x, t) \equiv \sqrt{\frac{l(x, t)}{\rho_i} \left(1 + l(x, t) \frac{g}{p_a} \right)^{-\gamma^{-1}}}.$$

Здесь x — пространственная координата; t — время; $u(x, t)$ — скорость газа вдоль оси X ; $h(x, t)$ — высота слоя газа; $l = l(h(x, t))$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция — аналог высоты слоя h , $l(0) = 0$; $a = a(l(x, t))$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция от l ; g — гравитационная постоянная; γ — показатель адиабаты газа; p_a — атмосферное давление; T_i, ρ_i — температура и плотность газа на свободной поверхности; c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении. Величины $g, \gamma, p_a, T_i, \rho_i$ предполагаются константами.

Запишем систему (2.1) в безразмерном виде. Примем за характерный линейный размер задачи характерную высоту слоя h_0 , за характерное время $\sqrt{h_0/g}$, скорость $\sqrt{gh_0}$, плотность ρ_i . Исходная система (2.1) в безразмерном виде

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$l \equiv \frac{1}{AB} \left[(1 + hB)^A - 1 \right], \quad (2.4)$$

$$a \equiv \sqrt{l(1 + lAB)^{(1-A)/A}},$$

где $A = \gamma/(\gamma - 1)$, $B = h_0/H_s$ — безразмерные параметры задачи, $H_s = RT_i/g$ — масштаб высоты атмосферы.

Если характерная высота слоя h_0 много меньше характерной высоты атмосферы H_s , то данное течение можно считать несжимаемым [14, разд. 3.6]. Ниже в разд. 5.7 будет показано, что при $B = h_0/H_s \rightarrow 0$ система уравнений (2.3) полностью переходит в классические уравнения мелкой воды для несжимаемой жидкости [21].

Система уравнений (2.1), (2.2) отличается от классических уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и скорость столба жидкости полностью

определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (2.1), (2.2) это взаимодействие определяется не только высотой и скоростью, но и средней плотностью столба жидкости, поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно.

В следующем разделе будут получены непрерывные решения системы (2.3).

3. НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В этом разделе будут получены частные непрерывные решения исходной системы уравнений (2.3) в виде однородного течения, простых и центрированных волн Римана и будет показано, что найденные решения исчерпывают класс непрерывных автомодельных решений системы (2.3), (2.4).

3.1. Однородное течение газа

Самым простым решением системы (2.3) является однородное течение газа с постоянными значениями

$$\begin{cases} u(x, t) = u_0 = \text{const}, \\ l(x, t) = l_0 = \text{const}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что это решение является автомодельным.

3.2. Простые волны Римана

Найдем решения исходной системы в виде простых волн или волн Римана. Для этого представим систему (2.3) в характеристической форме.

Запишем систему (2.3) в матричном виде:

$$\partial_t \begin{pmatrix} l \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & l \\ \frac{a^2}{l} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} l \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Найдем собственные значения $\lambda_{1,2}$ и соответствующие левые собственные векторы $\mathbf{e}_{1,2}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} u & l \\ \frac{a^2}{l} & u \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Собственные значения находятся из условия равенства нулю определителя матрицы $(u - \lambda)^2 - a^2 = 0$ и значит $\lambda_{1,2} = u \pm a$. Соответствующие левые собственные векторы $\mathbf{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm a/l & 1 \end{pmatrix}$.

Умножим слева систему (3.2) на собственные векторы $e_{1,2}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{a}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial l}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Введем функцию

$$\psi(x, t) \equiv \psi(l) \equiv \int \frac{d(l)}{l} dl, \quad \frac{d\psi}{dl} = \frac{a}{l} > 0. \quad (3.5)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dl} \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{a}{l} \frac{\partial l}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dl} \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{a}{l} \frac{\partial l}{\partial x},$$

систему (3.4) можно записать в характеристической форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Представим систему (3.6) в виде соотношений между дифференциалами искомых функций вдоль соответствующих характеристических направлений:

$$\begin{cases} d(u + \psi(l)) = 0, & \frac{dx}{dt} = u + a(l), \\ d(u - \psi(l)) = 0, & \frac{dx}{dt} = u - a(l). \end{cases} \quad (3.7)$$

Кривые на плоскости xt , задаваемые уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad (3.8)$$

называются характеристиками. Введем новые переменные

$$r = u + \psi(l), \quad s = u - \psi(l), \quad (3.9)$$

тогда

$$u = \frac{r+s}{2}, \quad \psi(l) = \frac{r-s}{2}. \quad (3.10)$$

Запишем систему (3.7) в новых переменных r, s :

$$\begin{cases} dr = 0, & \frac{dx}{dt} = u(r, s) + a(r, s), \\ ds = 0, & \frac{dx}{dt} = u(r, s) - a(r, s). \end{cases} \quad (3.11)$$

Переменные r, s называются переменными Римана или инвариантами Римана. Волной Римана или простой волной называют такое течение, в котором

один из инвариантов Римана постоянен во всей области течения [22, с. 172].

Рассмотрим случай, когда в выделенной области постоянен s -инвариант Римана. Тогда $s(x, t) = s_0 = \text{const}$ и второе уравнение системы (3.11) выполняется тождественно. Вдоль каждой характеристики первого семейства, задаваемой уравнением $dx/dt = u + a$, постоянны оба инварианта Римана r и s , а значит, постоянны и $u(r, s)$, $a(r, s)$. В таком случае характеристики $dx/dt = u + a$ являются прямыми $x(t) = (u + a)t + x_0$. Принимая во внимание (3.10), решение системы (3.11) в выделенной области запишем следующим образом:

$$\begin{cases} r(x, t) = r(x_0), \\ x(t) = \left(\frac{r(x_0) + s_0}{2} + a(r(x_0), s_0) \right) t + x_0, \\ s(x, t) = s_0 = \text{const}, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $x_0 \equiv x(0)$.

Такое решение называется волной Римана, обращенной вперед.

Волной сжатия в приближении мелкой воды называется волна, которая при распространении по газу приводит к повышению высоты. Волной разрежения называется волна, которая приводит к понижению высоты газа. Определим, в каком случае волна Римана (3.12) является волной сжатия или разрежения. Используя определение величин r (3.9), ψ (3.5) и l (2.4), получим, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\psi}{dl} \frac{\partial l}{\partial x},$$

и тогда знак $\partial r/\partial x$ совпадает со знаком $\partial l/\partial x$ и знаком $\partial h/\partial x$. Если в некоторой области волны (3.12) выполняется условие $\partial r/\partial x > 0$, то в этой области волна является волной разрежения, которая распространяется вперед по газу и приводит к понижению высоты. Характеристики образуют расходящийся пучок прямых. В случае, когда $\partial r/\partial x < 0$, решение является волной сжатия, которая приводит к повышению высоты газа, а характеристики образуют сходящийся пучок. Если $\partial r/\partial x = 0$, то решением является область постоянного течения.

Аналогично, в случае, когда в некоторой области постоянен r -инвариант Римана, решение системы (3.11) называется простой волной Римана, обращенной назад:

$$\begin{cases} s(x, t) = s(x_0), \\ x(t) = \left(\frac{r_0 + s(x_0)}{2} - a(r_0, s(x_0)) \right) t + x_0, \\ r(x, t) = r_0 = \text{const.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Используя определение величин s (3.9), ψ (3.5) и l (2.4), а также

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x},$$

получим, что знак $\partial s / \partial x$ противоположен знаку $\partial l / \partial x$ и $\partial h / \partial x$. Тогда, если в некоторой области s -волны $\partial s / \partial x > 0$, то мы получим волну разрежения, которая движется против течения газа и приводит к понижению высоты. В такой волне характеристики образуют расходящийся пучок прямых. Если $\partial s / \partial x < 0$, то мы получим волну сжатия, за которой происходит повышение уровня газа, а характеристики образуют сходящийся пучок. В случае $\partial s / \partial x = 0$ решением является область постоянного течения.

В следующей главе будет получен важный частный случай простых волн Римана — центрированные волны Римана.

3.3. Центрированные волны Римана

Волна Римана называется центрированной с центром в точке (x_c, t_c) , если все ее характеристики выходят из одной точки x_c, t_c [22, с. 175]. Центрированная волна Римана, обращенная вперед, задается следующими соотношениями:

$$\begin{cases} r(x, t) = r(x_0), \\ \frac{x(t) - x_c}{t - t_c} = \frac{r(x_0) + s_0}{2} + a(r(x_0), s_0), \\ s(x, t) = s_0 = \text{const.} \end{cases} \quad (3.14)$$

где $x_0 \equiv x(0)$, $x_c \equiv x(t_c)$.

Рассмотрим случай, когда точка (x_c, t_c) находится в начале координат $(0, 0)$. Тогда центрированная волна Римана, обращенная вперед, задается следующим образом:

$$\begin{cases} r(x, t) = r_0 = \text{const.}, \\ \frac{x(t)}{t} = \frac{r_0 + s_0}{2} + a(r_0, s_0), \\ s(x, t) = s_0 = \text{const.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Центрированная волна Римана, обращенная назад, будет иметь вид

$$\begin{cases} s(x, t) = s_0 = \text{const.}, \\ \frac{x(t)}{t} = \frac{r_0 + s_0}{2} - a(r_0, s_0), \\ r(x, t) = r_0 = \text{const.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Решения в виде центрированных волн Римана (3.15), (3.16) зависят только от x/t и представляют собой автомодельные решения исходной системы уравнений.

3.4. Замкнутость непрерывных автомодельных решений в классе центрированных волн

В разд. 3.1 и 3.3 получены частные непрерывные автомодельные решения системы в виде однородного решения (3.1) и центрированных волн Римана (3.15) и (3.16). Покажем, что других непрерывных автомодельных решений нет.

Пусть

$$u = u\left(\frac{x}{t}\right), \quad l = l\left(\frac{x}{t}\right)$$

— автомодельное решение системы (2.3). Введем новую переменную $\alpha = x/t$ и запишем исходную систему через новую переменную. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(-\frac{x}{t^2}\right) \frac{d}{d\alpha} = \left(-\frac{1}{t}\right) \lambda \frac{d}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

система уравнений (3.2) примет вид

$$\begin{pmatrix} u - \alpha & l \\ \frac{a^2}{l} & u - \alpha \end{pmatrix} \frac{d}{d\alpha} \begin{pmatrix} l \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Эта система имеет тривиальное однородное решение:

$$u = u_0 = \text{const.}, \quad l = l_0 = \text{const.} \quad (3.19)$$

Чтобы система (3.18) имела нетривиальные решения, необходимо равенство нулю определителя матрицы перед производными $(u - \alpha)^2 - a^2 = 0$, откуда находим

$$\alpha_{1,2} = u \pm a. \quad (3.20)$$

Подставим $\alpha_{1,2}$ в формулу (3.18):

$$\mp \frac{a}{l} \frac{dl}{d\alpha} + \frac{du}{d\alpha} = 0. \quad (3.21)$$

Используем функцию ψ из формулы (3.5):

$$\psi(x, t) \equiv \psi(l) \equiv \int \frac{d(l)}{l} dl, \quad \frac{d\psi}{dl} = \frac{a}{l} > 0, \quad (3.22)$$

тогда

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{d\psi}{dl} \frac{dl}{d\alpha} = \frac{a}{l} \frac{dl}{d\alpha}.$$

Подставим ψ в систему (3.21) и окончательно получим

$$\frac{d(u \mp \psi)}{d\alpha} = 0, \quad \alpha = u \pm a. \quad (3.23)$$

Заметим, что последние соотношения (3.23) представляют собой соотношения для центрированных волн Римана.

Таким образом, все непрерывные автомодельные решения исходной системы (2.3) состоят только из однородных состояний газа и центрированных волн Римана, примыкающих одни к другим вдоль линий $x/t = \text{const}$.

4. РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В этом разделе будут получены соотношения Ранкина–Гюгиони между параметрами газа, находящимися по разные стороны от разрыва, а также описание движения ударных волн в рассматриваемом течении.

4.1. Условия Ранкина–Гюгиони на разрыве

Внутри газа могут возникать линии, на которых параметры газа терпят разрыв. Вследствие интегральных законов сохранения, параметры газа по обе стороны от такой линии, а также скорость перемещения разрыва связаны соотношениями, которые называются соотношениями Ранкина–Гюгиони [2, с. 33], которые мы получим в этом разделе.

Чтобы вывести интегральные законы сохранения, которые следуют из системы (2.3), будем интегрировать систему по произвольной области в пространстве xt и переходить к интегралу по границе этой области, для чего удобно представить исходную систему (2.3) в дивергентном виде.

Умножим первое уравнение на u , второе на l и сложим:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2)}{\partial x} + a^2 \frac{\partial l}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Введем функцию

$$\varphi(l) = \int a^2 dl, \quad \frac{d\varphi}{dl} = a^2, \quad (4.2)$$

$$\varphi(l) = \frac{A^2}{B^2} \frac{1}{1+A} (1+lB)^{1/A} \left(l \frac{B}{A} - 1 \right). \quad (4.3)$$

Функция $\varphi(l)$ монотонно возрастает по l , кроме того,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dl} \frac{\partial l}{\partial x} = a^2 \frac{\partial l}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Подставим выражение $\partial l/\partial x$ через $\partial \varphi/\partial x$ из (4.4) в систему (4.1) и получим искомый дивергентный вид системы уравнений (2.3):

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2 + \varphi)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Проинтегрируем систему (4.5) по произвольной прямоугольной области G на плоскости xt :

$$\begin{cases} \iint_G \left(\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} \right) dt dx = 0, \\ \iint_G \left(\frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2 + \varphi)}{\partial x} \right) dt dx = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Преобразуем поверхностные интегралы по области G в интегралы по границе ∂G с помощью формулы Грина:

$$\begin{cases} \oint_{\partial G} l dx - lu dt = 0, \\ \oint_{\partial G} lu dx - (lu^2 + \varphi) dt = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Система интегральных уравнений (4.7) выполняется для произвольного интегрируемого контура ∂G и, в частности, для контура, который содержит линию разрыва $x_D(t)$ параметров газа. Предполагаем, что линия разрыва обладает непрерывной касательной и параметры газа терпят разрыв только на этой линии. Также предполагается, что разрыв параметров имеет конечную величину. Введем обозначения параметров газа по обе стороны от разрыва:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t)-0} u(x, t), \\ u_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t)+0} u(x, t), \\ l_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t)-0} l(x, t), \\ l_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t)+0} l(x, t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

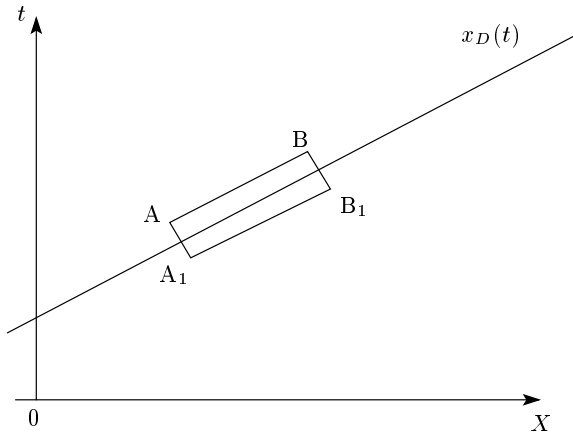


Рис. 1. Линия разрыва, окруженная контуром ABB_1A_1 , бесконечно близко примыкающая к разрыву сторонами AB и A_1B_1

Выберем контур $\partial G = ABB_1A_1$ таким, чтобы AB и A_1B_1 бесконечно близко примыкали к линии разрыва $x_D(t)$ соответственно слева и справа от нее (рис. 1). Введем в рассмотрение скорость разрыва $D = D(t) = dx_D/dt$, тогда вдоль этой линии $dx = D dt$ и система (4.7) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_A^B (Dl - lu) dt + \int_B^{B_1} (Dl - lu) dt + \\ & + \int_{B_1}^{A_1} (Dl - lu) dt + \int_{A_1}^A (Dl - lu) dt = 0, \\ & \int_A^B (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\ & + \int_B^{B_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\ & + \int_{B_1}^{A_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\ & + \int_{A_1}^A (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

Перейдем к пределам $AA_1 \rightarrow 0, BB_1 \rightarrow 0$.

Разрыв параметров газа имеет конечную величину, подынтегральные выражения $Dl - lu, Dlu - (lu^2 + \varphi)$ в интегралах $\int_A^{A_1} dt, \int_B^{B_1} dt$ ограничены. Поэтому при стремлении пределов интегрирования друг к другу интегралы стремятся к нулю и система (4.9) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_A^B (Dl - lu) dt = \int_{A_1}^{B_1} (Dl - lu) dt, \\ & \int_A^B (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt = \\ & = \int_{A_1}^{B_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt. \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Контур ABB_1A_1 мы выбирали произвольным образом, поэтому равенство интегралов в системе (4.10) означает равенство подынтегральных выражений

$$\left\{ \begin{aligned} & D(l_2 - l_1) = l_2u_2 - l_1u_1, \\ & D(l_2u_2 - l_1u_1) = l_2u_2^2 - l_1u_1^2 + \varphi(l_2) - \varphi(l_1), \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

где $u_i(t), l_i(t)$ — значения параметров газа по разные стороны от разрыва, определенные в формуле (4.8).

Если $l_1 = l_2$, то из первого уравнения (4.11) получаем $u_1 = u_2$ и разрыв x_D вырождается в постоянное течение, так как разделяет одинаковые параметры газа.

Соотношения (4.11) называются соотношениями Ранкина–Гюгонно. Для удобства выразим D из первого уравнения системы (4.11) и подставим во второе:

$$\left\{ \begin{aligned} & D = \frac{l_2u_2 - l_1u_1}{l_2 - l_1}, \\ & (u_1 - u_2)^2 = \frac{(\varphi(l_2) - \varphi(l_1))(l_2 - l_1)}{l_2l_1}. \end{aligned} \right. \quad (4.12)$$

Как будет показано ниже в разд. 5.7, при $B \rightarrow 0$ соотношения Ранкина–Гюгонно (4.12) переходят в соответствующие соотношения на разрыве для классических уравнений несжимаемой мелкой воды [21].

4.2. Ударные волны

Рассмотрим разрыв $x_D(t)$, который распространяется по газу и разделяет области 1 и 2 постоянного течения с параметрами u_1, l_1 и u_2, l_2 . Будем полагать, что разрыв распространяется по газу с параметрами 1, оставляя после себя газ с параметрами 2.

Ударной волной называется устойчивый разрыв параметров газа, через который происходит течение газа ($u_1 \neq u_2$). Условие устойчивости разрыва формулируется теоремой Цемплена [2, с. 46]: разрыв устойчив тогда и только тогда, когда скорость удар-

ной волны сверхзвуковая относительно газа перед волной и дозвуковая относительно газа за волной:

$$\begin{cases} |D - u_1| > a(l_1), \\ |D - u_2| < a(l_2). \end{cases} \quad (4.13)$$

Из теоремы Цемплена следует, что в нормальном газе устойчивы только скачки уплотнения, когда высота газа за ударной волной повышается, $l_2 > l_1$ [2, с. 46].

На разрыве выполняются соотношения Ранкина–Гюгонио (4.12). Выразим скорость газа u_2 за разрывом из второго уравнения (4.12). Для этого определим знак выражения $u_2 - u_1$. Покажем, что

$$\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_1) = \text{sign}(D - u_2). \quad (4.14)$$

Для этого выразим $D - u_1$ из первого уравнения соотношений (4.12):

$$D - u_1 = \frac{l_2(u_2 - u_1)}{l_2 - l_1}$$

и с учетом условия $l_2 > l_1$ получим, что $\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_1)$. Аналогично выразим $D - u_2$ из первого уравнения (4.12) и получим

$$D - u_2 = \frac{l_1(u_2 - u_1)}{l_2 - l_1},$$

откуда следует $\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_2)$.

Таким образом, ударная волна, разделяющая две области газа 1 и 2 с однородными течениями u_1, l_1 и u_2, l_2 так, что газ с параметрами 2 остается позади прыжка, задается следующими соотношениями:

$$\begin{cases} D = \frac{l_2 u_2 - l_1 u_1}{l_2 - l_1}, \\ u_2 = u_1 + \text{sign}(D - u_1) \times \\ \quad \times \sqrt{(\varphi(l_2) - \varphi(l_1)) \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right)}, \\ l_2 \geq l_1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Поскольку рассматривается разрыв, разделяющий постоянные течения, из первого уравнения системы (4.15) получаем $D = \text{const} = dx_D/dt$ и линия разрыва $x_D(t)$ является прямой.

Как было замечено в конце разд. 3.4, в случае $l_2 = l_1$ мы получим $u_2 = u_1$ и ударная волна вырождается в постоянное течение.

5. ЗАДАЧА РАСПАДА ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ (ЗАДАЧА РИМАНА)

В данном разделе сформулирована задача распада произвольного разрыва для течения сжимаемого газа в приближении мелкой воды и перечислены все допустимые волновые конфигурации из ранее найденных частных решений. Показано, что в предположении автомодельности решение единственно, а в предположении единственности — автомодельно. Для каждой конфигурации найдены условия на начальные данные, необходимые для ее реализации.

5.1. Постановка задачи Римана

Рассматривается течение газа, определяемое системой уравнений (2.3) с кусочно-постоянными начальными условиями при $t = 0$ для левого $x < 0$ и правого $x > 0$ полупространств (разрыв начальных параметров газа):

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_1, & l(x, 0) = l_1, & x < 0, \\ u(x, 0) = u_2, & l(x, 0) = l_2, & x > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Требуется определить движение газа при $t > 0$.

Без потери общности будем считать, что $l_1 \geq l_2$. Исходная система уравнений (2.3) инвариантна относительно преобразований подобия переменных x и t ($\tilde{t} = kt$, $\tilde{x} = kx$, $k > 0$) вместе со своим интегральным следствием в виде соотношений для ударной волны (4.15). (В данном случае имеет смысл говорить именно о следствии интегральных законов сохранения из дифференциальных, поскольку уравнения мелкой воды суть следствия усреднения дифференциальных уравнений Эйлера по высоте слоя.) Поэтому из предположения единственности решения задачи распада произвольного разрыва и построенного ниже решения следует его автомодельность. В то же время, построенное ниже решение в предположении автомодельности является доказательством существования.

Построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании непрерывных автомодельных решений, полученных в разд. 3.4, и ударных волн, полученных в разд. 4.2, разделяющих эти решения.

Автомодельная картина возникающего течения на плоскости xt состоит из четырех возможных конфигураций.

1. Конфигурация «две ударные волны» (рис. 2).

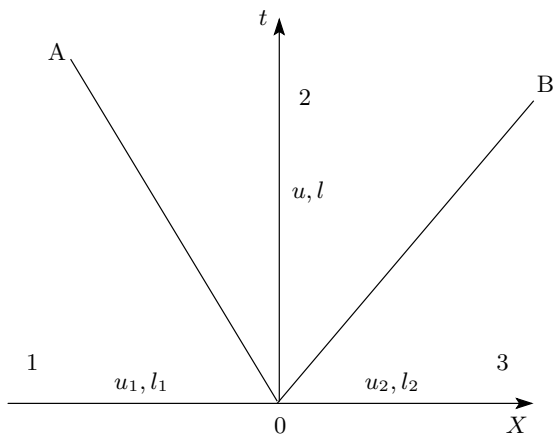


Рис. 2. Конфигурация «две ударные волны»

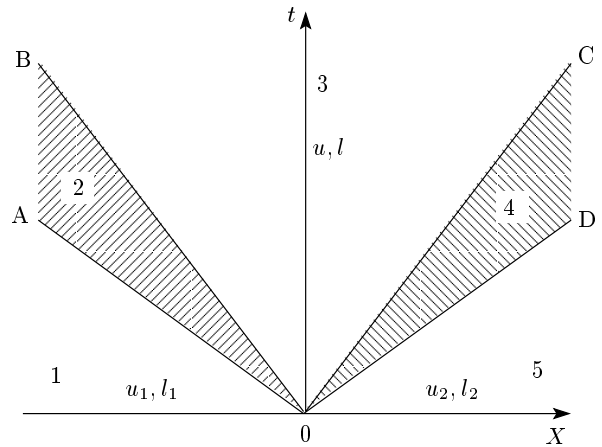


Рис. 4. Конфигурация «две волны разрежения»

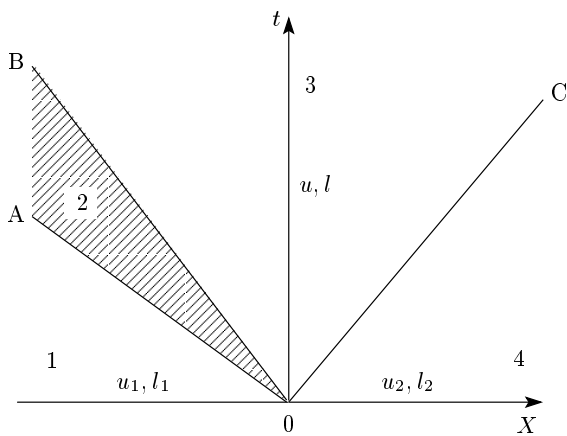


Рис. 3. Конфигурация «волна разрежения, обращенная назад, правая ударная волна»

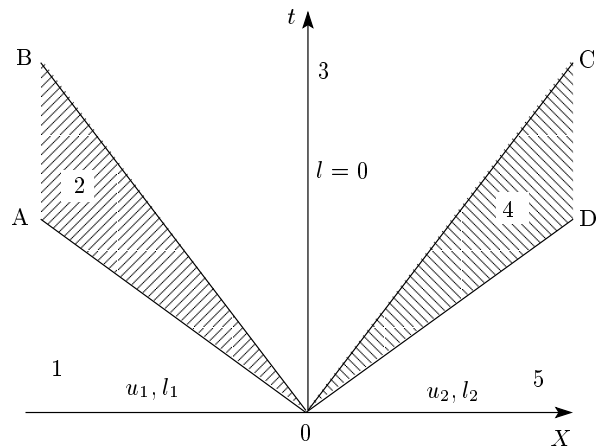


Рис. 5. Конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума»

2. Конфигурация «волна разрежения – ударная волна» (рис. 3).

3. Конфигурация «две волны разрежения» (рис. 4).

4. Конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума» (рис. 5).

Покажем, что других волновых конфигураций быть не может. Действительно, теорема Цемплена (4.13) говорит, что ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно газа перед ней и дозвуковой относительно газа за ней. Поэтому в один газ не могут бежать ударные волны или ударная волна и волна разрежения. Две волны разрежения также не могут бежать в один газ, поскольку при этом хвостовая характеристика первой волны необходимо совпадает с головной характеристикой второй волны и они образуют одну волну разреже-

ния. Из перечисленных выше условий следует, что в один газ может уходить не более одной ударной волны или волны разрежения. Следовательно, при распаде разрыва не могут реализовываться конфигурации, отличные от указанных выше конфигураций 1–4, и значит, если автомодельное решение существует, то оно единственное.

Решение задачи о распаде произвольного разрыва будем проводить следующим образом: рассмотрим каждую конфигурацию 1–4 и найдем условия для начальных параметров, при которых она реализуется. Покажем, что при непрерывном изменении начальных условий задачи решение непрерывно переходит от одной конфигурации к другой.

5.2. Конфигурация «две ударные волны»

В данной конфигурации вся область течения газа на плоскости xt разбивается лучами ОА и ОВ на три области постоянного течения (рис. 2). В области 1 и 3 параметры газа не меняются со временем и совпадают с начальными значениями соответственно u_1, l_1 и u_2, l_2 . Постоянные параметры газа u, l в области 2 определяются по ходу решения. Лучи ОА и ОВ являются траекториями движения ударных волн, которые распространяются по газу соответственно с параметрами 1 и 2, и задаются уравнениями $x = D_1 t$ (для луча ОА), $x = D_2 t$ (для луча ОВ), где D_1, D_2 — скорости распространения ударных волн.

Данная конфигурация реализуется, если существуют параметры u, l в области 2, которые соответствуют соотношениям (4.15) для ударных волн ОА и ОВ. Определим условие существования таких u, l .

Ударная волна ОА распространяется по области газа с параметрами 1 и значит $D_1 < u_1$. Тогда соотношения (4.15) для разрыва ОА примут вид

$$\begin{cases} D_1 = u + \frac{l_1(u - u_1)}{l - l_1}, \\ u = u_L(l) = u_1 - \sqrt{(\varphi(l) - \varphi(l_1)) \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right)}, \\ l_1 \leq l, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $u_L(l)$ обозначает скорость газа u за разрывом ОА.

Ударная волна ОВ распространяется по области газа с параметрами 2, поэтому $D_2 > u_2$ и соотношения (4.15) для разрыва ОВ принимают вид

$$\begin{cases} D_2 = u + \frac{l_2(u - u_2)}{l - l_2}, \\ u = u_R(l) = u_2 + \sqrt{(\varphi(l) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l} \right)}, \\ l \geq l_2, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $u_R(l)$ обозначает скорость газа u за разрывом ОВ.

Объединяя системы (5.2), (5.3), получаем, что данная конфигурация реализуется, если существует решение системы

$$\begin{cases} l \geq l_1 \geq l_2, \\ u = u_L(l) = u_R(l), \end{cases} \quad (5.4)$$

где l — искомая величина. Найдем условие совместности системы (5.4).

Покажем, что функция $u_L(l)$ монотонно неограниченно убывает по l при $l \geq l_1$, а функция $u_R(l)$ монотонно неограниченно возрастает по l при $l \geq l_2$. Для этого рассмотрим функцию

$$F_1(l) = (\varphi(l) - \varphi(l_1)) \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right)$$

и покажем, что она неограниченно монотонно возрастает по l при $l \geq l_1$. Вычислим

$$\frac{dF_1}{dl} = \frac{d\varphi}{dl} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right) + (\varphi(l) - \varphi(l_1)) \frac{1}{l^2}.$$

Исходя из определения (4.2) функции φ и $l \geq l_1$, получаем $dF_1/dl > 0$ и значит функция $\sqrt{F_1(l)}$ монотонно неограниченно возрастает. Тогда $u_L(l) = u_1 - \sqrt{F_1(l)}$ монотонно неограниченно убывает по l при $l \geq l_1$. Аналогично можно получить, что функция

$$F_2(l) = (\varphi(l) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l} \right),$$

а значит, и $u_R(l) = u_2 + \sqrt{F_2(l)}$ монотонно неограниченно возрастает по l при $l \geq l_2$.

Из того, что функции $u_L(l), u_R(l)$ при $l \geq l_1 \geq l_2$ монотонны и $u_L(l)$ неограниченно убывает, а $u_R(l)$ неограниченно возрастает, следует, что для совместности системы (5.4) необходимо и достаточно $u_L(l_1) \geq u_R(l_1)$. По этой же причине следует и единственность решения. Подставим u_L и u_R из (5.2), (5.3) в последнее неравенство и получим условие реализации конфигурации «две ударные волны»:

$$u_1 - u_2 \geq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}. \quad (5.5)$$

В случае, когда в формуле (5.5) выполняется равенство, левая ударная волна ОА вырождается в ударную волну нулевой интенсивности.

Отметим, что если выполняются условия (5.5), то найдется единственное решение системы (5.4), что обеспечит существование и единственность ударных волн ОА, ОВ, которые распространяются по газу соответственно с параметрами 1 и 2, и данная конфигурация действительно будет являться решением задачи.

5.3. Конфигурация «волна разрежения – ударная волна»

В этой конфигурации область течения газа на плоскости xt разбивается лучами ОА, ОВ и ОС на 4 области (рис. 3). В области 1 и 4 параметры газа не

меняются со временем и совпадают соответственно с начальными значениями u_1, l_1 и u_2, l_2 . Постоянные параметры газа u, l в области 3 определяются по ходу решения. Лучи ОА и ОВ являются крайними характеристиками централизованной волны разрежения Римана, обращенной назад, и задаются уравнениями $x = (u_1 - a_1)t$ (для луча ОА), $x = (u - a)t$ (для луча ОВ). Внутри этой волны в области 2 сохраняется r -инвариант Римана $r = r_0 = \text{const}$ и происходит понижение высоты газа. Луч ОС является линией разрыва параметров газа и задается уравнением $x = Dt$, где D — скорость распространения ударной волны.

Данная конфигурация реализуется, если существуют параметры u, l в области 3, которые соответствуют параметрам газа на характеристике ОВ и соотношениям (4.15) на ударной волне ОС.

Определим условия для l, u , которые должны выполняться на характеристике ОВ. Поскольку волна Римана АОВ является волной разрежения, на ней происходит понижение высоты газа, и, значит, $l_1 \geq l$. Кроме того, внутри этой волны сохраняется r -инвариант и, значит, $u_1 + \psi(l_1) = u + \psi(l)$, откуда получим

$$\begin{cases} l_1 \geq l, \\ u = u_L(l) = u_1 + \psi(l_1) - \psi(l), \end{cases} \quad (5.6)$$

где $u_L(l)$ обозначает скорость газа u в области 3 за характеристикой ОВ.

На ударной волне ОС параметры газа l, u должны удовлетворять соотношениям Ранкина–Гюгонио (4.15):

$$\begin{cases} D = u + \frac{l_2(u - u_2)}{l - l_2}, \\ u = u_R(l) = u_2 + \sqrt{(\varphi(l) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l} \right)}, \\ l \geq l_2, \end{cases} \quad (5.7)$$

где $u_R(l)$ обозначает скорость газа u за разрывом ОС.

Объединяя соотношения (5.6) и (5.7), получим, что для реализации данной конфигурации необходимо существование решения системы

$$\begin{cases} l_2 \leq l \leq l_1, \\ u = u_L(l) = u_R(l), \end{cases} \quad (5.8)$$

где l — искомая величина. Найдем условие совместности системы (5.8).

Функция $u_L(l)$ неограниченно монотонно убывает по l , потому что так ведет себя $\psi(l)$, а функция $u_R(l)$, наоборот, неограниченно монотонно возрастает по l , как было показано в разд. 5.2. Значит, для совместности системы (5.8) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} u_L(l_2) \geq u_R(l_2), \\ u_L(l_1) \leq u_R(l_1). \end{cases} \quad (5.9)$$

Единственность решения l при этом следует из монотонности функций $u_L(l), u_R(l)$ и того, что первая функция убывает по l , а вторая возрастает.

Подставим в последнюю систему (5.9) выражения для $u_L(l)$ из (5.6) и $u_R(l)$ из (5.7) и получим условие реализации конфигурации «волна разрежения – ударная волна»:

$$\begin{aligned} -(\psi(l_1) - \psi(l_2)) &\leq u_1 - u_2 \leq \\ &\leq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В случае, когда в формуле (5.10) выполняется первое равенство, происходит вырождение ударной волны ОС в постоянное течение, а когда выполняется второе равенство, то волна разрежения АОВ вырождается в постоянное течение.

Отметим, что если выполняется условие (5.10), то необходимо существует и единственно решение системы (5.8), что гарантирует существование волны разрежения АОВ и ударной волны ОС, распространяющейся по области газа с параметрами u_2, l_2 , и данная конфигурация действительно является решением задачи.

5.4. Конфигурация «две волны разрежения»

В этой конфигурации область течения газа на плоскости xt разбивается лучами ОА, ОВ, ОС и ОД на 5 областей (рис. 4). В областях 1 и 5 параметры газа не меняются со временем и совпадают соответственно с начальными значениями u_1, l_1 и u_2, l_2 . Постоянные параметры газа u, l в области 3 определяются по ходу решения. Лучи ОА и ОВ являются крайними характеристиками централизованной волны разрежения Римана, обращенной назад, и задаются уравнениями $x = (u_1 - a(l_1))t$ (для луча ОА), $x = (u - a(l))t$ (для луча ОВ). Внутри этой волны в области 2 сохраняется r -инвариант Римана $r = r_0 = \text{const}$ и происходит понижение высоты газа. Лучи ОС и ОД являются крайними характеристиками централизованной волны разрежения Римана, обращенной вперед, и задаются уравнениями

$x = (u + a(l)) t$ (для луча ОС), $x = (u_2 + a(l_2)) t$ (для луча ОД). Внутри этой волны в области 4 сохраняется s -инвариант Римана $s = s_0 = \text{const}$ и происходит понижение высоты.

Условием реализации данной конфигурации является существование таких l, u , которые бы соответствовали значениям параметров газа на характеристиках ОВ и ОС.

Определим соотношения для l, u , которые должны выполняться на характеристике ОВ. Волна Римана АОВ является волной разрежения и на ней происходит понижение высоты газа $l_1 \geq l$. Внутри этой волны сохраняется r -инвариант Римана, поэтому $u_1 + \psi(l_1) = u + \psi(l)$ и получаем

$$\begin{cases} l_1 \geq l, \\ u = u_L(l) = u_1 + \psi(l_1) - \psi(l). \end{cases} \quad (5.11)$$

Определим соотношения для l, u , которые должны выполняться на характеристике ОС. Волна Римана АОС является волной разрежения, на ней происходит понижение высоты газа $l_2 \geq l$, а также внутри этой волны сохраняется s -инвариант Римана, поэтому $u - \psi(l) = u_2 - \psi(l_2)$ и значит

$$\begin{cases} l_2 \geq l, \\ u = u_R(l) = u_2 - \psi(l_2) + \psi(l). \end{cases} \quad (5.12)$$

Объединяя соотношения (5.11) и (5.12), получим, что для реализации данной конфигурации необходимо существование решения системы

$$\begin{cases} 0 \leq l \leq l_2 \leq l_1, \\ u = u_L(l) = u_R(l), \end{cases} \quad (5.13)$$

где l — искомая величина. Найдем условие совместности системы (5.13).

Функция $u_L(l)$ неограниченно монотонно убывает по l , потому что так ведет себя $\psi(l)$. По той же причине функция $u_R(l)$ неограниченно монотонно возрастает по l . Значит, для совместности системы (5.13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} u_L(0) > u_R(0), \\ u_L(l_2) \leq u_R(l_2). \end{cases} \quad (5.14)$$

Единственность l при этом следует из монотонности функций $u_L(l), u_R(l)$ и того, что первая функция убывает по l , а вторая возрастает.

Из последней системы неравенств (5.14) получаем условия для реализации конфигурации «две волны разрежения»:

$$-(\psi(l_1) + \psi(l_2)) < u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) - \psi(l_2)). \quad (5.15)$$

В случае, когда во второй части формулы (5.15) выполняется равенство, происходит вырождение правой волны разрежения COD в постоянное течение.

Отметим, что если выполняются соотношения на начальные условия (5.15), то существует и единственно решение системы (5.13), что гарантирует существование простых волн АОВ и COD, обращенных соответственно назад и вперед, и данная конфигурация является решением задачи.

5.5. Конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума»

В этой конфигурации область течения газа на плоскости xt разбивается лучами ОА, ОВ, ОС и ОД на 5 областей (рис. 5). В областях 1 и 5 параметры газа не меняются со временем и совпадают соответственно с начальными значениями u_1, l_1 и u_2, l_2 . Область 3 является зоной вакуума, где $l = 0$. Лучи ОА и ОВ являются крайними характеристиками центрированной волны разрежения Римана, обращенной назад. Ввиду того, что $a(0) = 0$, характеристики задаются уравнениями $x = (u_1 - a(l_1)) t$ (для луча ОА), $x = u_L t$ (для луча ОВ), где u_L обозначает скорость газа на характеристике ОВ. Внутри этой волны в области 2 сохраняется r -инвариант Римана $r = r_0 = \text{const}$ и происходит понижение высоты газа до нуля. Лучи ОС и ОД являются крайними характеристиками центрированной волны разрежения Римана, обращенной вперед, и задаются уравнениями $x = u_R t$ (для луча ОС), $x = (u_2 + a(l_2)) t$ (для луча ОД), где u_R обозначает скорость газа на характеристике ОС. Внутри этой волны в области 4 сохраняется s -инвариант Римана $s = s_0 = \text{const}$ и происходит понижение высоты газа до нуля.

Данная конфигурация реализуется, если существует область вакуума между характеристиками ВОС. Найдем условия для этого.

Волна Римана АОВ является волной разрежения и на ней происходит понижение высоты газа до $l = 0$. Внутри этой волны сохраняется r -инвариант Римана, поэтому $u_1 + \psi(l_1) = u_L + \psi(0)$. Учитывая, что $\psi(0) = 0$, уравнение характеристики $x = u_L t$ (для луча ОВ) примет вид

$$x = (u_1 + \psi(l_1)) t. \quad (5.16)$$

Аналогично, волна Римана COD является волной разрежения, внутри которой происходит понижение уровня газа до $l = 0$ и сохраняется s -инвариант Римана, поэтому $u_R - \psi(0) = u_2 - \psi(l_2)$. Учи-

тывая, что $\psi(0) = 0$, уравнение характеристики $x = u_R t$ (для луча ОС) примет вид

$$x = (u_2 - \psi(l_2)) t. \quad (5.17)$$

Для того чтобы существовала область вакуума 2, необходимо и достаточно, чтобы на обеих волнах разрежения Римана АОВ и ВОС высота газа успевала понизиться до нуля. Последнее равносильно тому, что линия ОВ (5.16) находится левее линии ОС (5.17):

$$u_1 + \psi(l_1) \leq u_2 - \psi(l_2),$$

откуда получаем условие реализации конфигурации «две волны разрежения, зона вакуума»

$$u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) + \psi(l_2)). \quad (5.18)$$

Отметим, что если выполняются условия (5.18), то существуют волны разрежения АОВ, СОД и зона вакуума ВОС между ними и, значит, данная конфигурация является решением задачи.

5.6. Решение задачи Римана

Объединяя все конфигурации, рассмотренные в разд. 5.2–5.5, получим общее решение задачи Римана для произвольного разрыва начальных параметров газа:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_1, & l(x, 0) = l_1, & x < 0, \\ u(x, 0) = u_2, & l(x, 0) = l_2, & x > 0, \\ & & l_1 \geq l_2. \end{cases} \quad (5.19)$$

Решениями являются следующие конфигурации. Для случая

$$u_1 - u_2 \geq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}$$

— конфигурация «две ударные волны».

Для случая

$$-(\psi(l_1) - \psi(l_2)) \leq u_1 - u_2 \leq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}$$

— конфигурация «волна разрежения–ударная волна».

Для случая

$$-(\psi(l_1) + \psi(l_2)) < u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) - \psi(l_2))$$

— конфигурация «две волны разрежения».

Для случая

$$u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) + \psi(l_2))$$

— «две волны разрежения, зона вакуума».

Полученное решение задачи Римана позволяет решать задачи газовой динамики, возникающие при разрывах начально-краевых условий. Кроме этого, данное решение является основой для построения целого класса конечнообъемных численных методов сквозного счета, позволяющих рассчитывать как непрерывные, так и разрывные решения без выделения разрывов [23–26].

5.7. Сравнительный анализ полученных решений с решениями задачи Римана для классической несжимаемой мелкой воды

В этом разделе будет показано, что исходная система уравнений сжимаемой мелкой воды (2.3), соотношения на разрыве Ранкина–Гюгоньо (4.12) и решение задачи распада разрыва переходят в систему уравнений классической мелкой воды для несжимаемой жидкости с соответствующими соотношениями на разрыве и решением задачи распада разрыва в случае, когда характерная высота h_0 слоя становится много меньше характерной высоты атмосферы H_s , т. е. при

$$B = \frac{h_0}{H_s} \rightarrow 0.$$

Исходная система классических уравнений мелкой воды в безразмерном виде имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Разложим функции l , a^2 из (2.2) в ряд Тейлора в окрестности $B = 0$:

$$l = h + \frac{A-1}{2A} h^2 B + \frac{(A-1)(A-2)}{6A^2} h^3 B^2 + o(B^2), \quad B \rightarrow 0, \quad (5.21)$$

$$a^2 = h - \frac{A-1}{2A} h^2 B + \frac{A^2-1}{6A^2} h^3 B^2 + o(B^2), \quad B \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

Тогда в нулевом приближении $l \approx h$, $a^2 \approx h$ и система (2.3) переходит в (5.20) при $B \rightarrow 0$.

Покажем, что соотношения на разрыве Ранкина–Гюгонио (4.12) переходят в соответствующие соотношения для классической мелкой воды при $B \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} D = \frac{h_1 u_1 - h_2 u_2}{h_1 - h_2}, \\ (u_1 - u_2)^2 = \frac{1}{2} (h_1 - h_2)^2 \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Разложим функцию $\varphi(h)$, которая входит в соотношения (4.12), в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \varphi(h) = & \frac{1}{2} h^2 + \frac{A-1}{6A} h^3 B + \\ & + \frac{(A-1)(A-2)}{24A^2} h^4 B^2 + o(B^2), \quad B \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Тогда в нулевом по B приближении $\varphi(h) \approx h^2/2$ и с учетом того, что $l \approx h$, получим, что соотношения Ранкина–Гюгонио (4.12) полностью переходят в соотношения на разрыве для классической модели мелкой воды (5.23) при $B \rightarrow 0$.

Поскольку исходная система уравнений (2.3) и соотношения Ранкина–Гюгонио на разрыве (4.12) полностью переходят в систему уравнений классической мелкой воды (5.23) и ее соотношения на разрыве (5.23) при $B \rightarrow 0$, и все решения исходной системы уравнений должны перейти в решения уравнений классической мелкой воды при $B \rightarrow 0$. Покажем это. Используем разложение функции $\psi(h)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \psi(h) = & 2h^{1/2} + \frac{A-1}{6A} h^{3/2} B - \\ & - \frac{(A-1)(19A-23)}{240A^2} h^{5/2} B^2 + o(B^2), \quad B \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Запишем решение задачи Римана разд. 5.6 с точностью $o(B)$, $B \rightarrow 0$, используя разложение функций l , φ , ψ в ряд Тейлора. Решениями являются следующие конфигурации:

для случая

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 \leq & (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2h_1 h_2}} \times \\ & \times \left(1 + \frac{A-1}{6A} \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} B \right) + o(B) \end{aligned}$$

— конфигурация «две ударные волны»;

для случая

$$\begin{cases} -2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) - \frac{A-1}{6A} (h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) B + \\ \quad + o(B) \leq u_1 - u_2, \\ u_1 - u_2 \leq (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2h_1 h_2}} \times \\ \quad \times \left(1 + \frac{A-1}{6A} \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} B \right) + o(B) \end{cases}$$

— конфигурация «волна разрежения–ударная волна»;

для случая

$$\begin{cases} -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) - \frac{A-1}{6A} (h_1^{3/2} + h_2^{3/2}) B + \\ \quad + o(B) \leq u_1 - u_2, \\ u_1 - u_2 \leq -2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) - \\ \quad - \frac{A-1}{6A} (h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) B + o(B) \end{cases}$$

— конфигурация «две волны разрежения»;

для случая

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 \leq & -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) - \frac{A-1}{6A} \times \\ & \times (h_1^{3/2} + h_2^{3/2}) B + o(B) \end{aligned}$$

— «две волны разрежения, зона вакуума».

Как видно, конфигурации и решение задачи распада разрыва в случае приближения мелкой воды для сжимаемого газа (разд. 4.6) переходят в конфигурации и решение задачи распада разрыва для классических уравнений мелкой воды несжимаемой жидкости [21] при предельном переходе $B \rightarrow 0$.

Также можно сделать вывод о том, как именно изменились границы между конфигурациями в решении задачи распада разрыва для сжимаемого газа по сравнению с классической моделью.

1. Уменьшилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума». Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума»,

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \leq -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \\ -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) - \frac{A-1}{6A} (h_1^{3/2} + h_2^{3/2}) B + \\ \quad + o(B) \leq u_1 - u_2, \end{cases}$$

теперь реализуют конфигурацию «две волны разрежения».

2. Увеличилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «волна разрежения, ударная волна». Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуются конфигурация «две волны разрежения»,

$$-2 \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \right) - \frac{A-1}{6A} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2} \right) B + \\ + o(B) \leq u_1 - u_2 \leq -2 \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \right),$$

и конфигурация «две ударные волны»,

$$(h_1 - h_2) \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2h_1 h_2}} \leq u_1 - u_2 \leq (h_1 - h_2) \times \\ \times \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2h_1 h_2}} \left(1 + \frac{A-1}{6A} \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} B \right) + o(B),$$

теперь реализуют конфигурацию «волна разрежения, ударная волна».

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды в поле силы тяжести над ровной подстилающей поверхностью. Получены все автомодельные непрерывные центрированные решения и автомодельные разрывные решения. В явном виде решена задача распада произвольного разрыва для уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды. Показано, что решение представляет собой одну из четырех волновых конфигураций: «две волны разрежения, зона вакуума»; «две волны разрежения»; «волна разрежения, ударная волна»; «две ударные волны». Проведен сравнительный анализ полученного решения с решением классической задачи Римана для несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды.

Учет сжимаемости газа в приближении мелкой воды приводит к изменению границ областей начальных условий, реализующих различные конфигурации решения задачи Римана. Область начальных условий, при которой реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума», уменьшается по сравнению с классической несжимаемой моделью мелкой воды, а область начальных условий, при которой реализуется конфигурация «волна разрежения, ударная волна», увеличивается.

Работа выполнена в рамках программы № 22 РАН «Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2006).
2. Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, Москва (1981).
3. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
4. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
5. P. A. Gilman, *Astrophys. J.* **544**, L79 (2000).
6. M. Miesch and P. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
7. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J.* **691**, L41 (2009).
8. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астроном. ж.* **25**, 323 (1999).
9. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астроном. ж.* **36**, 896 (2010).
10. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).
11. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
12. Cho J. *Phil. Trans. R. Soc. A* **366**, 4477 (2008).
13. M. E. Timmermans, J. R. Lister, and H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **445**, 305 (2001).
14. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
15. А. М. Фридман, Н. Н. Горькавый, *Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды*, Наука, Москва (1994).
16. Parsons, *J. Geophys. Res. Lett.* **27**, 2345 (2000).
17. F. Dobran and A. Neri, *J. Geophys. Res.* **98**, 4231 (1993).
18. G. Valentine and K. Wohletz, *J. Geophys. Res.* **94** (B2), 1867 (1989).
19. C. B. Vreugdenhil, *Numerical Methods for Shallow-water Flow*, Water Science and Technology Library, Vol. 13, Kluwer Acad. Publ. (1994).

20. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений*, Наука, Москва (1966).
21. К. В. Карельский, В. В. Папков, А. С. Петросян, *Задача о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью*, ИКИ, Москва (1999).
22. Г. Г. Черный, *Газовая динамика*, Наука, Москва (1988).
23. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Num. Anal. Math. Mod.* **21**, 539 (2006).
24. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Num. Anal. Math. Mod.* **22**, 543 (2007).
25. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Num. Anal. Math. Mod.* **24**, 229 (2009).
26. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. Г. Славин, *Матем. модел.* **21**, 41 (2009).