

СВЕРХПРОВОДЯЩАЯ ПЛАСТИНА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: НОВОЕ СОСТОЯНИЕ

Э. Г. Батыев*

Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 28 сентября 2011 г.

Предлагается модель для описания куперовских пар вблизи точки перехода (по температуре и магнитному полю), когда расстояние между ними больше их размеров. Суть модели: функционал Гинзбурга–Ландау записывается в операторном виде через полевые операторы бозевского типа, так чтобы среднее значение оператора плотности давало концентрацию куперовских пар, а для бозе-конденсата получалось прежнее выражение Гинзбурга–Ландау. В качестве применения модели рассматривается сверхпроводящая пластина толщиной меньше размера пары в поперечном магнитном поле вблизи верхнего критического значения H_{c2} . Получено новое состояние, которое энергетически более выгодно в некотором интервале вблизи точки перехода, чем вихревое состояние Абрикосова. Волновая функция системы в этом состоянии типа функции Лафлина, использованной в дробном квантовом эффекте Холла (естественно, в нашем случае применительно к куперовским парам как бозе-частицам) и соответствует однородной несжимаемой жидкости. Энергия состояния пропорциональна первой степени величины $(1 - H/H_{c2})$ в отличие от энергии вихревого состояния, содержащей квадрат этой величины. Интервал существования нового состояния тем больше, чем грязнее образец.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) разность свободных энергий сверхпроводящего F_S и нормально-го F_N состояний записывается в виде

$$F_S - F_N \rightarrow \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2M} \left| (\nabla - i\frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \alpha \left| \Psi \right|^2 + \frac{\beta}{2} \left| \Psi \right|^4 \right\}. \quad (1)$$

Здесь учтена только часть, явно зависящая от параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$.

Величину $\Psi(\mathbf{r})$ можно трактовать как волновую функцию куперовской пары (с точностью до коэффициента). Все пары находятся в одном состоянии (образуют бозе-конденсат), поэтому достаточно функции от одной координаты. Такая интерпретация позволяет пойти дальше и описывать систему куперовских пар при помощи гамильтониана:

$$H = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{-1}{2M} \Psi^+(\mathbf{r}) \left(\nabla - i\frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + \alpha \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + \frac{\beta}{2} \Psi^+(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right\}. \quad (2)$$

Здесь $\Psi(\mathbf{r})$, $\Psi^+(\mathbf{r})$ — операторы бозевского типа во вторичном квантовании. Если заменить их просто функциями (для описания бозе-конденсата), то получим выражение (1).

Такое обобщение теории ГЛ было предложено много лет назад в работе [1], но безуспешно. В настоящей работе показывается, что в некоторых случаях такой подход приводит к новому состоянию, которое энергетически более выгодно, чем состояние, следующее из обычной формулировки теории ГЛ. Именно, новое состояние получается в квазидвумерном случае (сверхпроводящая пластина) в поперечном магнитном поле вблизи верхнего критического поля H_{c2} . Видимо, это может быть проверено экспериментально.

Сначала о соображениях в пользу нового подхода с использованием оператора (2).

1) В работе [2] рассматривался фазовый переход в сверхпроводнике. Главное, что сделано в этой работе, — это показано, что вблизи точки перехода

*E-mail: batyev@isp.nsc.ru

диаграммная техника для особой части двухчастичной функции Грина такая же, как для системы бозе-частиц. Эта особая часть как раз описывает куперовскую пару.

2) Можно показать, что из использованного в работе [2] диаграммного подхода для двухчастичной функции Грина следуют в точности те же соотношения для коэффициентов теории ГЛ, которые ранее были получены Горьковым (см., например, [3]). Таким образом, сначала мы ставим в соответствие куперовским парам бозе-гамильтониан, для которого получается такая же диаграммная техника, как для двухчастичной функции Грина, а затем для бозе-конденсата получаем результат, как в теории ГЛ.

3) Взаимодействие (вклад четвертого порядка) в теории ГЛ возникает из-за того, что куперовские пары перекрываются, т. е. из-за принципа Паули. Если же этого нет, т. е. если они разъединены, то нет и взаимодействия. В традиционном подходе этого не видно, потому что всегда остается самодействие.

Отметим, что размер пары по порядку величины не изменяется с температурой, в то время как их число уменьшается. Поэтому вблизи точки перехода возможно говорить об отдельных парах. Кстати, утверждение о том, что размер куперовской пары по порядку величины остается неизменным вплоть до точки перехода, нетрудно проверить непосредственно. Именно, в модели сверхпроводника (например, Бардина–Купера–Шриффера) надо вычислить среднее $\langle \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle$ ($\Psi_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{r})$ — это операторы электронов с разными проекциями спина) и найти зависимость от разности координат.

Приведенные аргументы являются обоснованием предложенного обобщения. Следует подчеркнуть, что описание сверхпроводящего состояния как совокупности частиц (куперовских пар), как это предлагается, хотя представляется естественным, но строго не обосновано, поэтому есть не более, чем модель.

2. ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ

Пусть сверхпроводящая пластина находится в поперечном магнитном поле H . Вблизи поля H_{c2} образуется вихревая решетка Абрикосова. Решетка может расплавиться аналогично плавлению любого кристалла. При обсуждении плавления (см., например, обзор [3]) считается, что вихри остаются, но пропадает дальний порядок в их расположении. Оказывается, что вблизи H_{c2} возможно жидкое состояние другого типа, которое отличается от всего того, что рассматривалось раньше [3]. Именно, ви-

хрей нет, а есть однородная система — жидкость из куперовских пар (без бозе-конденсата и без вихрей). Такая картина естественно возникает при описании куперовских пар при помощи гамильтониана (2).

Сначала надо определиться с тем, что брать в качестве концентрации частиц (куперовских пар). Естественно было бы считать таковой $|\Psi|^2$, т. е. без внешних полей $|\alpha|/\beta$ (в единице объема в трехмерном случае). Однако в теории ГЛ эта величина не определена, потому что в качестве параметра порядка можно взять любую величину, отличающуюся от Ψ постоянным множителем, лишь бы физические величины оставались неизменными. Этими величинами являются

1) глубина проникновения магнитного поля

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{Mc^2\beta}{4\pi(2e)^2|\alpha|}}, \quad (3)$$

2) длина когерентности

$$\xi(T) = \frac{1}{\sqrt{2M|\alpha|}}, \quad (4)$$

3) изменение свободной энергии при переходе в упорядоченное состояние

$$\frac{\delta F}{V} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \rightarrow -\frac{A^2\gamma T_c^2}{2}(1 - T/T_c)^2 \quad (5)$$

(приведено значение, которое дает микроскопическая теория, γ — плотность состояний на поверхности Ферми, $A \approx 3.06$). Из этих выражений видно, что из трех параметров теории ГЛ α, β, M зафиксированы только два (с зарядом все понятно). В остальном имеется произвол, и отношение $|\alpha|/\beta$ остается неопределенным, что для функционала ГЛ несущественно. Это все известно.

В операторной формулировке (2), когда речь идет о частицах (куперовских парах) и их количестве, необходимо зафиксировать оставшийся параметр $|\alpha|/\beta$, который как раз соответствует концентрации частиц. Для этого нужно оценить число куперовских пар N_{CP} . Покажем, как это можно сделать.

Рассмотрим обычный сверхпроводник. Здесь понятно, как провести оценки. Сначала приведем некоторые известные сведения из теории сверхпроводимости, которые необходимы для оценок. В модели Бардина–Купера–Шриффера (в гамильтониане учитывается только притяжение электронов с противоположными импульсами и спинами) переход от

операторов электронов $a_{\mathbf{p}\sigma}$ к операторам квазичастиц $\alpha_{\mathbf{p}\sigma}$ осуществляется при помощи преобразования Боголюбова:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}\uparrow} &= u_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}\uparrow} + v_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}\downarrow}^+, \\ a_{-\mathbf{p}\downarrow} &= u_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}\downarrow} - v_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}\uparrow}^+, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(u_{\mathbf{p}}^2, v_{\mathbf{p}}^2) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} \right), \quad u_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}} = \frac{-\Delta}{2\epsilon_{\mathbf{p}}},$$

где $\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}$ — спектр квазичастиц, $\xi_{\mathbf{p}}$ — энергия электрона, отсчитанная от фермиевской энергии.

Рассмотрим среднее $\langle \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle$. Оно пропорционально волновой функции электронов в паре. Если вычислить двойной интеграл от квадрата модуля этой величины, то получится число электронов в парах (со спином вверх и вниз), т. е. удвоенное число пар. Итак,

$$N_{CP}(T) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\langle \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle|^2. \quad (7)$$

Здесь операторы $\Psi_{\uparrow, \downarrow}$ — это обычные полевые электронные операторы, например:

$$\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}\uparrow} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}).$$

Используя переход к операторам квазичастиц и вычисляя среднее значение, имеем

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta}{2\epsilon_{\mathbf{p}}} \operatorname{th} \left\{ \frac{\epsilon_{\mathbf{p}}}{2T} \right\} \times \\ &\times \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \end{aligned}$$

Интегрирование по координатам в величине $N_{CP}(T)$ дает множитель $V^2\delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ (\mathbf{p}, \mathbf{q} — импульсы в разных суммах), так что окончательно получим

$$N_{CP}(T) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta^2}{4\epsilon_{\mathbf{p}}^2} \operatorname{th}^2 \left\{ \frac{\epsilon_{\mathbf{p}}}{2T} \right\}. \quad (8)$$

При нулевой температуре имеем

$$\frac{N_{CP}(0)}{V} = \frac{\gamma\Delta_0}{2} \frac{\pi}{4}.$$

Вблизи точки перехода имеем

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha|}{\beta} &\equiv \frac{N_{CP}(T \approx T_c)}{V} = \frac{\gamma\Delta^2}{8T_c} D; \\ D &\equiv \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} \operatorname{th}^2(x) \approx 1.7. \end{aligned} \quad (9)$$

Как известно, щель в спектре вблизи точки перехода определяется формулой

$$\Delta = A T_c \sqrt{1 - T/T_c}. \quad (10)$$

Эта величина, так же как отношение α^2/β (см. (5)), не изменяется в грязном сверхпроводнике (теорема Андерсона). Кроме того, выражение для числа пар (9) остается прежним. Как оказывается, с примесями изменяется только масса M (см. ниже (12)).

Массу M_0 (для чистого случая) нетрудно получить с помощью выражений для других постоянных. Например, для $\lambda(T)$ (см. (3)) имеем

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2(1 - T/T_c)}}, \quad \lambda(0) = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}}, \quad (11)$$

где использовано известное соотношение для плотности сверхтекучей компоненты вблизи точки перехода для чистого сверхпроводника (m — масса электрона, n — концентрация). Этого достаточно для наших целей. В результате

$$\frac{M_0}{m} = \frac{3A^2D}{16} \frac{T_c}{\epsilon_F}, \quad \frac{M}{M_0} = \frac{\kappa}{\kappa_0} \sim \frac{\xi_0}{l} \quad (l < \xi_0). \quad (12)$$

Здесь $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ — параметр ГЛ (κ_0 — для чистого образца), l — длина свободного пробега. Подчеркнем, что это для случая, когда под числом частиц подразумевается число куперовских пар.

Приведем еще выражение для длины когерентности (см. (3), (4), (5) и (11)):

$$\xi(T) = \frac{1}{A\sqrt{6}} \frac{v_F/T_c}{\sqrt{1 - T/T_c}}. \quad (13)$$

Последние три выражения годятся для чистого сверхпроводника (не считая выражения для M).

Наконец, запишем выражение для коэффициента β , которое получается из сравнения (5) и (9) с использованием (10):

$$\beta = \left(\frac{8}{A} \right)^2 \frac{1}{\gamma D^2}. \quad (14)$$

Используя соотношение (9), можно получить оценку температурного интервала вблизи точки перехода $\delta T/T_c$, когда среднее расстояние между куперовскими парами становится больше размера куперовской пары ξ_0 . Для чистого сверхпроводника $\xi_0 \sim v_F/T_c$, так что получается

$$\frac{\delta T}{T_c} \sim \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^2. \quad (15)$$

Именно в этой области можно говорить о куперовских парах как о частицах. Хотя этот интервал еще за пределами флуктуационной области, которая имеет место вблизи точки перехода в интервале $\delta T/T_c \sim (T_c/\epsilon_F)^4$, но вряд ли здесь можно увидеть что-то новое.

3. НОВОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассматривается сверхпроводящая пластина в поперечном магнитном поле. Пусть толщина пластины d достаточно мала — меньше размера пары, но больше расстояния между электронами:

$$1/p_F \ll d < \xi_0, \sqrt{\xi_0 l}.$$

Последнее значение — это размер пары в грязном образце (l — длина свободного пробега). В этом случае годятся оценки, приведенные выше для массивного образца. Но вместо гамильтониана (2) необходимо написать двумерный эквивалент, а именно:

$$H \rightarrow \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{-1}{2M} \Psi^+(\mathbf{r}) \left(\nabla - i \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + \alpha \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) + \frac{\beta_2}{2} \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \right\}. \quad (16)$$

Здесь подразумевается двумерное интегрирование (в плоскости пластины) и $\beta_2 \equiv \beta/d$, а все операторы двумерные.

Нас интересует основное состояние частицы (куперовской пары) в магнитном поле. Как известно, в цилиндрической калибровке векторного потенциала ($A_\varphi = H\rho/2$, $A_\rho = A_z = 0$) волновые функции основного уровня Ландау записываются в виде

$$\phi_n \sim z^n \exp\left(-\frac{|z|^2}{4a_H^2}\right), \quad z = x + iy.$$

Здесь n принимает неотрицательные целые значения ($n = 0, 1, 2, \dots$), a_H — магнитная длина (для куперовской пары $a_H^2 = c/(2|e|H)$). Этим состояниям соответствует энергия

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{2|e|H}{Mc}, \quad \frac{|e|H_{c2}}{Mc} = |\alpha|. \quad (17)$$

Вблизи верхнего критического магнитного поля H_{c2} можно взять функцию типа Лафлина [5] (функции такого типа были использованы в теории дробного квантового эффекта Холла). Разумеется, применительно к бозе-частицам. Такие функции хороши тем, что короткодействующее взаимодействие, как в интересующем нас случае, полностью исключено.

Функция типа Лафлина Φ_L в нашем случае имеет вид

$$\Phi_L \sim \prod_{i>j=1}^N (z_i - z_j)^2 \prod_{k=1}^N \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{4a_H^2}\right) \quad (18)$$

(N — число куперовских пар). Эта функция симметрична по перестановке частиц, как и требуется, и взаимодействие обращается в нуль. Отметим, что можно взять любую четную степень вместо квадрата, но при этом концентрация частиц будет меньше. А для функции (18) концентрация максимально возможная (одна частица на два кванта магнитного потока), т. е. энергия минимальна ниже точки перехода ($H < H_{c2}$). Это состояние без учета флуктуаций (без других уровней Ландау).

В результате среднее значение оператора (16) по состоянию (18) равно

$$\frac{\langle H \rangle}{S} = -|\alpha| \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right) \frac{|e|H}{2\pi c} \approx \approx -|\alpha| \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right) \frac{|e|H_{c2}}{2\pi c}, \quad (19)$$

где S — площадь. Учтено, что взаимодействие в данном состоянии равно нулю.

Для вихревого состояния Абрикосова имеем

$$\frac{F_S - F_N}{S} = \frac{-\alpha^2}{2\beta_2 C} \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)^2. \quad (20)$$

Здесь постоянная C зависит от типа решетки (для треугольной решетки $C \approx 1.16$).

Итак, надо сравнивать две энергии:

$$\frac{-\alpha^2}{2\beta_2 C} \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)^2 \quad \text{и} \quad -|\alpha| \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right) \frac{|e|H_{c2}}{2\pi c}.$$

В зависимости от того, какая энергия ниже, осуществляется то или иное состояние. Отсюда имеем интервал магнитного поля, когда имеет место состояние по Лафлину:

$$\frac{\delta H}{H_{c2}} = \frac{M\beta}{d} \frac{C}{\pi}. \quad (21)$$

Используя предыдущие результаты, имеем

$$\left(\frac{\delta H}{H_{c2}}\right)_0 = \frac{T_c}{\epsilon_F} \frac{1}{p_F d} \frac{24\pi C}{D} \approx \frac{T_c}{\epsilon_F} \frac{51.448}{p_F d}. \quad (22)$$

Индекс «0» означает, что это выражение для чистого образца (зеркальные стенки пластины и без примесей). Для пластины из обычных сверхпроводников даже с учетом большого численного коэффициента это малая величина.

В случае грязного образца (длина свободного пробега мала, $l \ll \xi_0$, d) появляется дополнительный множитель:

$$\frac{\delta H}{H_{c2}} = \left(\frac{\delta H}{H_{c2}} \right)_0 \frac{\kappa}{\kappa_0} \sim \left(\frac{\delta H}{H_{c2}} \right)_0 \frac{\xi_0}{l} \quad (23)$$

(см. выражение (12)). К тому же и верхнее критическое поле H_{c2} возрастает:

$$\frac{H_{c2}}{(H_{c2})_0} = \frac{\kappa}{\kappa_0}.$$

Вывод: чем тоньше и грязнее пластина, тем больше интервал существования нового состояния.

Итак, в промежутке полей (21) (см. также (22), (23)) имеется жидкое состояние (несжимаемая жидкость, как называют подобное состояние в теории дробного квантового эффекта Холла). Это состояние очевидным образом отличается от вихревой решетки Абрикосова. Даже если решетка расплавилась, то все равно переход в новое состояние имеется, потому что зависимость энергии от величины $(1 - H/H_{c2})$ линейная, в то время как для расплавленного состояния решетки Абрикосова эта зависимость остается квадратичной, как в формуле (20), хотя и с другими коэффициентами (такими же по порядку величины).

Оба перехода на краях интервала (21) являются переходами первого рода со скачками намагниченности, а внутри интервала намагниченность постоянна.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Еще раз о главном. В теории Гинзбурга – Ландау состояние системы описывается одной функцией (параметром порядка), которая в магнитном поле зависит от координат. Можно сказать, что это есть волновая функция куперовской пары, и одной функции достаточно для описания бозе-конденсата куперовских пар. В модели, рассмотренной в настоящей работе, предлагается многочастичное состояние с перекрывающимися (локализованными) частицами (куперовскими парами), которое исключает взаимодействие частиц, за счет чего энергия системы

меньше, чем в состоянии Абрикосова. Это обеспечивается функцией, которая является обобщением функции Лафлина [5]. Локализация здесь похожа на локализацию в любой жидкости, когда имеется какой-то ближний порядок, но система является однородной, т.е. нельзя сказать, в какой точке находится данная частица. Разумеется, никаких вихрей, как в состоянии Абрикосова, в этом случае нет, поэтому нельзя представлять это состояние, например, как разупорядоченную совокупность вихрей. Наконец, как и в состоянии Абрикосова, не учитываются вклады флуктуаций.

Несколько слов о высокотемпературных сверхпроводниках. Поскольку они представляют собой систему слабосвязанных двумерных слоев, можно ожидать, что состояние, которое здесь обсуждалось, возможно и для них. Если так, то соответствующий интервал магнитного поля (22) должен быть заметно больше (температура перехода T_c выше и толщина слоя d меньше).

Благодарю за обсуждение А. В. Чаплика и М. В. Энтина. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00060-а) и в рамках Программ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Г. Батыев, Письма в ЖЭТФ 11, 554 (1970).
2. Э. Г. Батыев, А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ 46, 2093 (1964).
3. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, Москва (1998).
4. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. 66, 1125 (1994).
5. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983).