

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАКРОЧАСТИЦЫ С ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ В ПЛАЗМЕ

*В. Р. Муниров, А. В. Филиппов**

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 30 января 2012 г.

Рассмотрено электростатическое взаимодействие заряженной сферической диэлектрической макрочастицы с точечным зарядом в плазме в присутствии внешнего однородного электрического поля. Определены электростатическая сила и момент сил, действующих на макрочастицу, и установлен вид потенциала взаимодействия для неравномерного распределения свободного заряда на поверхности макрочастицы. Предложено простое для вычислений выражение для потенциала взаимодействия, которое хорошо описывает точный потенциал на всех межчастичных расстояниях. Выполнены оценки угловой скорости собственного вращения пылевых частиц, вызванного неоднородным распределением свободного заряда по их поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма является удобным объектом для изучения свойств неидеальных систем [1–3]. Многие свойства таких систем определяются потенциалом взаимодействия заряженных макрочастиц. В работе [4] было изучено взаимодействие точечного заряда с заряженным проводящим телом сферической формы в плазме с учетом дебаевского экранирования. Было установлено, что взаимодействие в случае, когда постоянным в процессе сближения остается заряд сферической макрочастицы, сильно отличается от случая, когда постоянным остается потенциал поверхности. В настоящей работе эта задача обобщена на случай диэлектрической макрочастицы. Рассмотрен общий случай неравномерного распределения свободного заряда на поверхности макрочастицы. В случае постоянного потенциала поверхности макрочастицы диэлектрические свойства макрочастицы не играют никакой роли и эта задача, по сути, уже решена в работе [4], поэтому в настоящей работе рассмотрен только случай постоянного заряда макрочастицы. Неравномерное распределение заряда может поддерживаться, например, в процессе фотоэмиссионной зарядки пылевых частиц внешним источником ультрафиолетового излучения или на пылевых частицах, левитирующих в приэлек-

тродном слое ВЧ-разряда или в катодном слое или стратах в разрядах постоянного тока, где формируются электростатические ловушки для пылевых частиц и имеются сильнонаправленные ионные потоки. Также определен момент электростатических сил, действующих на макрочастицу в плазме.

2. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ МАКРОЧАСТИЦЫ И ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим взаимодействие в плазме сферической макрочастицы с радиусом a_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и точечной частицы с зарядом q_2 . В лабораторных условиях пылевые частицы обычно левитируют в областях с достаточно сильным электрическим полем, компенсирующим действие силы тяжести, поэтому в рассмотрение включим и постоянное электрическое поле \mathbf{E}_0 . Выберем центр декартовой системы координат в центре макрочастицы, направим ось z вдоль линии, соединяющей центры частиц, а ось x направим так, чтобы вектор \mathbf{E}_0 лежал в плоскости xz . Также введем сферические координаты, как показано на рис. 1.

Положим, что в области I ($r < a_1$) нет свободных объемных зарядов, поэтому потенциал электрического поля в этой области определяется уравнением Лапласа [5]:

$$\Delta\phi_I = 0. \quad (1)$$

*E-mail: fav@triniti.ru

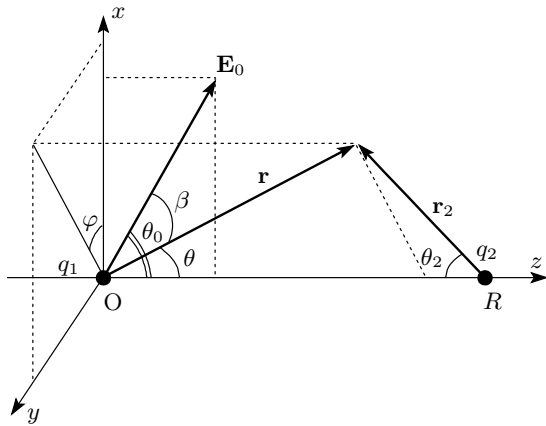


Рис. 1. Геометрия задачи о взаимодействии точечного заряда с макрочастицей: r, θ, φ — координаты точки наблюдения в сферической системе координат с началом в центре макрочастицы; r_2, θ_2, φ — координаты точки наблюдения в сферической системе координат с началом в точке нахождения точечного заряда; R — межчастичное расстояние; q_1, q_2 — заряды частиц в элементарных зарядах; \mathbf{E}_0 — вектор напряженности постоянного электрического поля, лежащий в плоскости xz ; θ_0 — угол, задающий направление \mathbf{E}_0 в сферической системе координат с началом в центре макрочастицы; β — угол между векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{r}

В области II ($r > a_1$) самосогласованный потенциал макрочастицы и плазмы будем искать на основе линеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана [6]:

$$\Delta\phi_1 - k_D^2\phi_1 = 0, \tag{2}$$

где k_D — обратный дебаевский радиус. Вследствие линейности рассматриваемой задачи суммарный потенциал можно представить в виде

$$\phi = \begin{cases} \phi_I & \text{в области I,} \\ \phi_{II} \equiv \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 & \text{в области II,} \end{cases} \tag{3}$$

где $\phi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} = -E_0 r \cos \beta$ — потенциал постоянного электрического поля, β — угол между векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{r} , ϕ_2 — самосогласованный потенциал точечной частицы в плазме. Как известно, в равновесной плазме потенциал точечной частицы является дебаевским [6]:

$$\phi_2(r_2) = \frac{q_2}{\varepsilon r_2} \exp(-k_D r_2). \tag{4}$$

Отметим, что в плазме $\varepsilon \approx 1$, но в электролитах или биологических системах диэлектрическая проницаемость среды ε может отличаться от единицы.

Граничные условия для нашей задачи имеют вид [5]

$$\phi_1|_{r=a_1} = (\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)|_{r=a_1}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a_1-0} - \varepsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a_1+0} = 4\pi\sigma(\theta, \varphi), \tag{6}$$

где σ — плотность поверхностного заряда макрочастицы.

Как известно, решения уравнений (1) и (2), конечные в нуле и обращающиеся в нуль на бесконечности, в сферических координатах имеют вид [5, 7, 8]

$$\begin{aligned} \phi_I(r, \theta, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos(m\varphi) + C_n^{-m} \sin(m\varphi)) \times \\ & \times P_n^m(\cos \theta) r^n, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos(m\varphi) + A_n^{-m} \sin(m\varphi)) \times \\ & \times P_n^m(\cos \theta) \frac{K_{n+1/2}(k_D r)}{\sqrt{r}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $K_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя второго рода или функции Макдональда полуцелого порядка, P_n^m — присоединенные полиномы Лежандра. Отметим, что в настоящей работе присоединенные полиномы Лежандра определены без учета фактора Шортли–Кондона (например, $P_1^1 = \sin \theta$).

Разложим распределение потенциала точечного заряда в плазме (4) по полиномам Лежандра, используя формулу Макдональда [8], которая при $r \leq R$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-\tilde{r}_2)}{r_2} = & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) \frac{I_{n+1/2}(\tilde{r}) K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{r} \tilde{R}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $I_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя первого рода или функции Инфельда полуцелого порядка,

$$r_2 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}, \quad \tilde{r} = k_D r, \quad \tilde{R} = k_D R.$$

Потенциал постоянного поля раскладывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_0 = -E_0 r \times & \times [\cos \theta_0 P_1^0(\cos \theta) + \sin \theta_0 \cos \varphi P_1^1(\cos \theta)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь угол θ_0 задает направление вектора \mathbf{E}_0 в нашей сферической системе координат (отметим, что, вследствие нашего выбора системы координат, для \mathbf{E}_0 азимутальный угол $\varphi_0 = 0$, см. рис. 1).

Плотность поверхностного заряда макрочастицы также разложим по сферическим гармоникам:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\sigma_n^m \cos(m\varphi) + \sigma_n^{-m} \sin(m\varphi)) \times P_n^m(\cos \theta). \quad (11)$$

В итоге из первого граничного условия (5) находим:

$$C_n^0 = A_n^0 \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{n+1/2}} + q_2(2n+1) \times \frac{I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\varepsilon a_1^{n+1/2} \sqrt{R}}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad (12)$$

$$C_1^0 = A_1^0 \frac{K_{3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} + 3q_2 \frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1) K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon a_1^{3/2} \sqrt{R}} - E_0 \cos \theta_0, \quad (13)$$

$$C_1^1 = A_1^1 \frac{K_{3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} - E_0 \sin \theta_0, \quad (14)$$

$$C_n^{\pm m} = A_n^{\pm m} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{n+1/2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Здесь $\tilde{a}_1 = k_D a_1$. Из второго граничного условия (6), используя (12)–(15), получаем:

$$A_1^0 = \frac{3q_2}{\varepsilon \sqrt{R}} K_{3/2}(\tilde{R}) M_{3/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) + \frac{[4\pi\sigma_1^0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 \cos \theta_0] a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (16)$$

$$A_n^0 = \frac{(2n+1)q_2}{\varepsilon \sqrt{R}} K_{n+1/2}(\tilde{R}) \times M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) + \frac{4\pi\sigma_n^0 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$A_1^1 = \frac{[4\pi\sigma_1^1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 \sin \theta_0] a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (18)$$

$$A_n^{\pm m} = \frac{4\pi\sigma_n^{\pm m} a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Здесь для удобства введена функция

$$M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{\varepsilon \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon - \varepsilon_1) n I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (20)$$

3. СИЛА И ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАКРОЧАСТИЦЫ И ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Потенциал взаимодействия макрочастиц в изотермической плазме с постоянным числом электронов и ионов совпадает со свободной энергией [9, 10], для нахождения которой сначала вычислим силу взаимодействия. Сила, действующая на точечную заряженную частицу со стороны второй частицы конечного размера, вычисляется достаточно просто (здесь мы не рассматриваем силу, действующую на макрочастицу со стороны постоянного электрического поля, равную $q_1 \mathbf{E}_0$, так как полагаем, что она уравновешена силой тяжести):

$$\mathbf{F} = -q_2 \nabla \phi_1 \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=0}} = -q_2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=0}}. \quad (21)$$

Отсюда, используя выражение (8), после несложных вычислений для z -составляющей силы находим:

$$F_z = \varepsilon q_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^0}{R^{3/2}} \times \left[(n+1) K_{n+1/2}(\tilde{R}) + \tilde{R} K_{n-1/2}(\tilde{R}) \right]. \quad (22)$$

Потенциал взаимодействия не зависит от пути интегрирования, поэтому, интегрируя (22) по межчастичному расстоянию, получим выражение для потенциала взаимодействия:

$$U(R, \theta_0) = U_{DLVO} + U_{E0} \cos \theta_0 + \frac{4\pi a_1^2 q_2}{\sqrt{R} a_1} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0 K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} + \\ + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) \times \\ \times M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1). \quad (23)$$

Здесь U_{DLVO} — потенциал Дерягина–Ландау–Фервея–Овербека (ДЛФО-потенциал) (см., например, в [4]):

$$U_{DLVO} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R (1 + k_D a_1)} \exp\{-k_D (R - a_1)\} \equiv \\ \equiv \frac{q_1 e f f q_2}{\varepsilon R} \exp(-\tilde{R}), \quad (24)$$

U_{E0} — потенциал взаимодействия наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом:

$$U_{E0} = \frac{a_1^2 q_2}{\sqrt{R} a_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (25)$$

Третий член в правой части выражения (23) есть вклад взаимодействия неоднородного поверхностного заряда с точечным зарядом, четвертый — вклад взаимодействия точечного заряда с наведенным им же поверхностным зарядом.

Для потенциала взаимодействия точечной частицы и равномерно заряженной макрочастицы $\sigma_0^0 = q_1 / 4\pi a_1^2$ при $E_0 = 0$ получим

$$U(R) = U_{DLVO} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \left[\frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1)}{K_{3/2}(\tilde{a}_1)} K_{1/2}^2(\tilde{R}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) \right]. \quad (26)$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, т. е. в случае, если макрочастица является проводником, из (26) следует формула

$$U(R) = U_{DLVO} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \left[\frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1)}{K_{3/2}(\tilde{a}_1)} K_{1/2}^2(\tilde{R}) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) \frac{I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \right], \quad (27)$$

которая при $\varepsilon = 1$ переходит в формулу для потенциала взаимодействия проводящей сферы и точечного заряда из работы [4].

Если рассматривать взаимодействие в отсутствие плазмы при $k_D = 0$, то, учитывая разложение модифицированных функций Бесселя при малых аргументах (см. [8]), из (21) и (26) находим:

$$F \equiv F_z = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} + \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}, \quad (28)$$

$$U(R) = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1) n}{(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}. \quad (29)$$

Эти выражения совпадают с выражениями для силы и потенциала взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром в однородном диэлектрике [5].

4. НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНОГО ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ МАКРОЧАСТИЦЫ

4.1. Сила и потенциал взаимодействия

Теперь рассмотрим случай, когда на поверхности макрочастицы имеется неоднородное распределение заряда. Поскольку заряд на макрочастице формируется потоками электронов и ионов, асимметричность которых вызвана действием электрического поля в области левитации макрочастицы, положим, что распределение заряда аксиально симметрично вдоль направления вектора напряженности постоянного электрического поля:

$$\sigma(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\cos \beta).$$

Пользуясь теоремой сложения для многочленов Лежандра [11], для такого распределения заряда находим:

$$\sigma_n^0 = \sigma_n P_n(\cos \theta_0), \\ \sigma_n^m = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sigma_n P_n^m(\cos \theta_0), \quad (30) \\ \sigma_n^{-m} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Далее остановимся только на случае распределения заряда с преобладанием монополюсного и дипольного моментов, т. е. когда $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \beta$. В этом случае из выражений (21) и (23) находим (отметим, что $F_y \equiv 0$ для любого аксиально-симметричного

вдоль направления вектора напряженности постоянного электрического поля распределения заряда, а выражение для z -составляющей силы легко получается из (22)):

$$F_x = -\frac{q_2 K_{3/2}(\tilde{R}) \sin \theta_0 a_1^{3/2}}{R^{3/2}} \times \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 + 4\pi\sigma_1}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (31)$$

$$U(R, \theta_0) = U_{DLVO} + (U_{E0} + U_{\sigma_1}) \cos \theta_0 + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1), \quad (32)$$

где

$$U_{\sigma_1} = \frac{q_2}{\sqrt{R a_1}} \frac{4\pi a_1^2 \sigma_1 K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (33)$$

4.2. Момент сил, действующих на макрочастицу

В предположении, что среда находится в механическом и тепловом равновесии, на элемент поверхности диэлектрика действует удельный момент сил [12]:

$$\mathbf{m} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ [\mathbf{r} \times \mathbf{E}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] \right\} = \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} E_r (E_\theta \mathbf{e}_\varphi - E_\varphi \mathbf{e}_\theta). \quad (34)$$

Используя рекуррентные соотношения для присоединенных многочленов Лежандра и их производных [11], для проекций моментов на декартовы оси находим¹⁾:

¹⁾ Вычисление интегралов сильно упростится, если обратить внимание на то, что вектор в круглых скобках в правой части (34) с точностью до множителя есть результат действия оператора орбитального момента на потенциал электрического поля, а проекции этого вектора на декартовы оси координат — результат действия на ϕ соответствующих проекций этого оператора [13].

$$M_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_x(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi a_1^3 \sigma_1^{-1} E_0 \times \cos \theta_0 \frac{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)} - \frac{q_2}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi n(n+1) \sigma_n^{-1} a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \times \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}, \quad (35)$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_y(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi a_1^3 E_0 \tilde{a}_1 \times K_{5/2}(\tilde{a}_1) \frac{\varepsilon (\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)} + \frac{q_2}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{4\pi \sigma_n^1 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \times \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}, \quad (36)$$

$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_z(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{(4/3) \pi a_1^3 \varepsilon \sigma_1^{-1} E_0 \sin \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (37)$$

В случае аксиально-симметричного (вдоль направления внешнего поля) распределения свободного заряда по поверхности пылевой частицы из (35), (37) получаем

$$M_x = M_z = 0,$$

а выражение для момента вдоль оси y примет вид

$$M_y = \frac{q_2}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi n(n+1) \sigma_n^1 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \times \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}. \quad (38)$$

При действии только внешнего поля ($q_2 = 0$) из (35)–(37) находим:

$$M_x = \frac{4}{3} \pi a_1^3 \frac{\varepsilon \sigma_1^{-1} E_0 \cos \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (39)$$

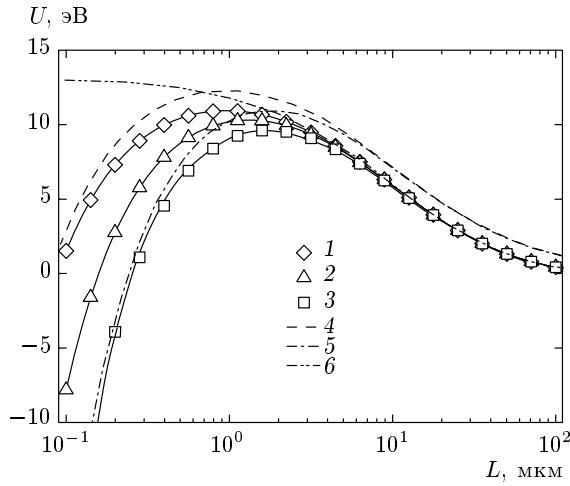


Рис. 2. Зависимости от L потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для $q_1 = 10^3 e$, $a_1 = 10$ мкм, $q_2 = 10^2 e$, $k_D^{-1} = 50$ мкм при различных значениях диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_1 = 2$ (1), 4 (2), 81 (3). Сплошные линии — расчет по (32), символы — по (42), 4 — по (29) при $\varepsilon_1 = 2$, 5 — по (29) при $\varepsilon_1 = \infty$, 6 — DLVO-потенциал (24)

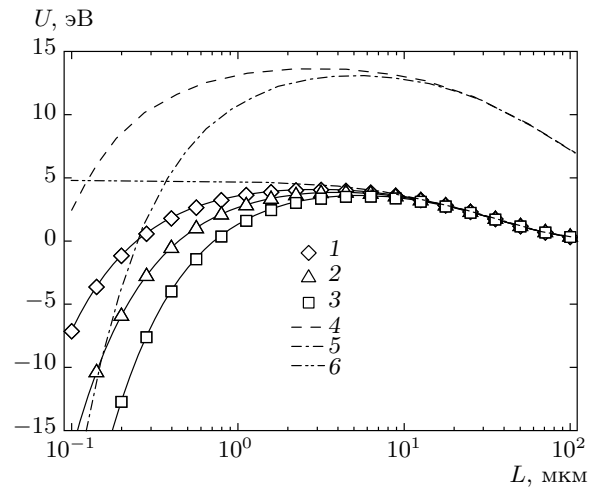


Рис. 3. Зависимости от L потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для $q_1 = 10^4 e$, $a_1 = 100$ мкм, $q_2 = 10^2 e$, $k_D^{-1} = 50$ мкм при различных значениях диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_1 = 2$ (1), 4 (2), 81 (3). Сплошные линии — расчет по (32), символы — по (42), 4 — по (29) при $\varepsilon_1 = 2$, 5 — по (29) при $\varepsilon_1 = \infty$, 6 — DLVO-потенциал (24)

$$M_y = \frac{4}{3} \pi a_1^3 \frac{\varepsilon E_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) (\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (40)$$

$$M_z = -\frac{4}{3} \pi a_1^3 \frac{\varepsilon \sigma_1^{-1} E_0 \sin \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (41)$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2, 3 изображены зависимости от $L = R - a_1$, наименьшего расстояния между поверхностью макрочастицы и точечным зарядом, потенциальной энергии взаимодействия при различных режимах экранирования (далее рассматривается только плазменная среда, поэтому принято, что $\varepsilon = 1$). Полагалось, что свободный заряд однородно распределен по поверхности макрочастицы. Расчеты показали, что потенциал взаимодействия в случае проводящей макрочастицы с $\varepsilon_1 = \infty$ практически не отличается от потенциала для частицы с $\varepsilon_1 = 81$ на всех межчастичных расстояниях.

Из рис. 2, 3 видно, что на малых расстояниях между одноименно заряженной сферической макрочастицей и точечным зарядом отталкивание переходит в притяжение, причем при больших зна-

чениях диэлектрической проницаемости этот переход происходит на больших межчастичных расстояниях. При расчетах учитывались первые 10^4 членов разложения по полиномам Лежандра (заметим, что такое количество членов требовалось только при $L = 0.1$ мкм, при этом первый отбрасываемый член был в 10^{31} раз меньше самого потенциала взаимодействия. С ростом межчастичного расстояния число необходимых для достижения указанной точности членов быстро уменьшается). В работе [4] отмечалось, что несмотря на больший (в 10 раз) заряд макрочастицы в расчетах в плазме с более сильным экранированием, энергия взаимодействия в максимуме оказывается меньше, чем в менее плотной плазме. Это является следствием влияния как размера макрочастиц (ср. кривые 4, 5 на рис. 2 и 3), так и плазменного экранирования ($U_{DLVO}|_{L=0} = 4.8$ эВ при более сильном экранировании и $U_{DLVO}|_{L=0} = 12.9$ эВ при более слабом).

На рис. 2, 3 приведены также кривые, рассчитанные с использованием выражения

$$U_a(R) = U_{DLVO}(R) + \left(\frac{a_1}{R}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} a_1 q_2 E_0 \cos \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{n+1} \frac{q_2}{(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1} \times \left[4\pi a_1 \sigma_n^0 + \frac{q_2}{2\varepsilon R} (\varepsilon - \varepsilon_1) n \right], \quad (42)$$

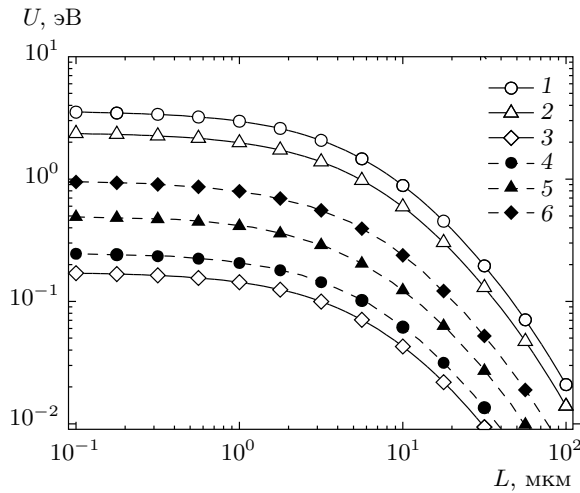


Рис. 4. Зависимости от L потенциала взаимодействия неоднородного поверхностного заряда с точечным зарядом (33) (кривые 1–3) и наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом (25) (кривые 4–6) для $q_1 = 10^3 e$, $a_1 = 10$ мкм, $q_2 = 10^2 e$, $k_D^{-1} = 100$ мкм, $E_0 = 10$ В/см, $\sigma_1 = \sigma_0 = q_1/4\pi a_1^2$ при различных значениях диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_1 = 2$ (1, 4), 4 (2, 5), 81 (3, 6)

которое получено из (23) с сохранением эффектов экранирования только в DLVO-потенциале. Видно, что выражение (42) хорошо описывает потенциальную энергию взаимодействия в плазме на всех расстояниях.

Теперь перейдем к неоднородному распределению свободного заряда по поверхности макрочастицы, а именно, к случаю распределения, аксиально-симметричного вдоль направления внешнего электрического поля. Для простоты рассмотрим случай, когда важны только монопольный и дипольный члены разложения поверхностного заряда. В этом случае из (31) видно, что составляющая силы вдоль оси x отлична от нуля. Эта сила стремится повернуть точечный заряд так, чтобы направление прямой, соединяющей две частицы, совпало с направлением внешнего электрического поля. В этом положении ($\theta_0 = 0$ или π) потенциал взаимодействия (32) как функция угла θ_0 имеет экстремальные значения: при одном значении θ_0 будет максимум, а при другом — минимум. Где именно будет находиться максимум, а где минимум, зависит как от знаков q_2 и σ_1 , так и от значений E_0 , σ_1 и ε_1 .

На рис. 4 приведены зависимости $U_{E_0}(L)$ и $U_{\sigma_1}(L)$, рассчитанные соответственно из (25) и (33) при различных значениях диэлектрической прони-

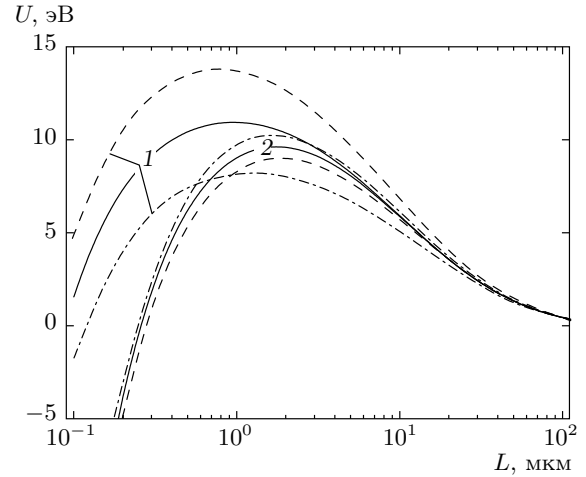


Рис. 5. Зависимости от L потенциала взаимодействия (32) макрочастицы с точечным зарядом для $q_1 = -10^3 e$, $a_1 = 10$ мкм, $q_2 = -10^2 e$, $k_D^{-1} = 100$ мкм, $E_0 = 10$ В/см, $\sigma_1 = \sigma_0 = q_1/4\pi a_1^2$ при различных значениях диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_1 = 2$ (1), 81 (2). Сплошные кривые — $\theta_0 = \pi/2$, штриховые — $\theta_0 = 0$, штрихпунктирные — $\theta_0 = \pi$

цаемости макрочастицы. Видно, что при малых ε_1 более важным оказывается взаимодействие дипольного момента свободного заряда с точечным зарядом, а с ростом ε_1 — взаимодействие наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом. Также отметим, что при малых ε_1 величина U_{σ_1} сравнима с потенциалом взаимодействия точечного заряда с равномерно заряженным диэлектриком, поэтому должна учитываться при рассмотрении таких явлений как коагуляция пылевых частиц в плазме. А при больших ε_1 становится не малой величина U_{E_0} .

В области левитации пылевых частиц поток положительных ионов плазмы направлен вдоль внешнего электрического поля, поэтому можно ожидать, что сторона поверхности макрочастицы, обращенная к потоку ионов будет захватывать больше ионов, чем противоположная сторона, а поток электронов на макрочастицу менее чувствителен к внешнему полю и обычно более изотропен из-за высокой температуры электронов в разряде. Следовательно, дипольный момент распределения свободного заряда по поверхности макрочастицы будет иметь отрицательный знак как в случае отрицательного, так и в случае положительного полного заряда. При этом члены U_{σ_1} и U_{E_0} в (32) будут иметь противоположные знаки и будут в некоторой степени компенсировать друг друга.

На рис. 5 представлены зависимости потенциала взаимодействия при ряде значений угла θ_0 , рассчитанные для отрицательно заряженной макрочастицы и отрицательного точечного заряда. Видно, что при малом значении $\varepsilon_1 = 2$ при использованных в расчете значениях параметров задачи потенциал взаимодействия оказывается минимальным при $\theta_0 = \pi$ и максимальным при $\theta_0 = 0$, а при $\varepsilon_1 = 81$ — наоборот.

Теперь перейдем к обсуждению вращения пылевых частиц вокруг собственной оси, которое наблюдалось в работах [14–17]. В отсутствие магнитного поля можно ожидать, что распределение поверхностного заряда на пылевых частицах в среднем во времени будет аксиально-симметричным вдоль направления внешнего электрического поля. Для такого распределения заряда из формул (39)–(41) следует, что

$$M_x = M_y = M_z = 0,$$

т. е. для аксиально-симметричного распределения поверхностного заряда момент сил, действующих на уединенную пылевую частицу в области ее левитации, будет равен нулю, что находится в согласии с выводами работы [17] об отсутствии собственного вращения пылевых частиц сферической формы в разряде без магнитного поля. Отметим, что в случае пылевых частиц из проводящего материала все моменты также обратятся в нуль (во всех названных выше работах [14–17] исследовалось вращение только диэлектрических пылевых частиц).

При наложении магнитного поля аксиальная симметрия задачи нарушится и в этом случае возможно появление такого неоднородного распределения заряда, что σ_1^{-1} и, возможно, $\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0$ станут отличными от нуля. Покажем это качественно. Направим ось z вдоль направления E_0 ($\theta_0 = 0$), а ось x вдоль магнитного поля. В работе [17] индукция магнитного поля B не превышала 300 Гс; в таких полях электроны замагничены, а ионы — практически нет. Поэтому магнитное поле в условиях экспериментов [17] практически не влияло на ток ионов в слое (страте), а в скрещенных электрическом и магнитном полях имеется дрейфовый ток электронов, направленный вдоль векторного произведения $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$, т. е. вдоль оси y . Отметим, что при $B \approx 300$ Гс этот ток заметно превосходит дрейфовый ток электронов вдоль электрического поля. Следовательно, мы можем написать, что поток ионов на макрочастицу в дипольном приближении будет описываться зависимостью $J_i = J_{0i} - J_{1i} \cos \theta$, а по-

ток электронов с той же точностью — зависимостью $J_e = J_{0e} + J_{1e} \sin \varphi$.

Далее предположим, что плотность электронного заряда на поверхности пылевых частиц повторяет угловую зависимость потока электронов, а ионов — потока ионов, тогда

$$\sigma(\theta, \varphi) \approx \sigma_i + \sigma_e \sim \sigma_0 - \sigma_{1i} \cos \theta + \sigma_{1e} \sin \varphi.$$

Для такого распределения поверхностного заряда

$$\sigma_1^0 = -\sigma_{1i}, \quad \sigma_1^1 = 0, \quad \sigma_1^{-1} = \frac{3\pi}{8}\sigma_{1e}.$$

Следовательно, как видно из (39)–(41), будет отличным от нуля только момент M_x . В режиме слабого экранирования для рассматриваемого случая находим

$$M_x \approx \frac{3\pi^2 a_1^3 \sigma_{1e} E_0}{2(2 + \varepsilon_1)}. \quad (43)$$

Момент силы сопротивления газа для вращающейся сферической частицы согласно работе [18] определяется выражением

$$M_{fr} = \frac{2\pi}{3} \varrho_{gas} v_{th, gas} \omega_{rot} a_1^4, \quad (44)$$

где ϱ_{gas} — плотность газа, $v_{th, gas}$ — тепловая скорость частиц газа, ω_{rot} — угловая скорость вращения пылевой частицы. Учтем условие левитации пылевых частиц

$$q_1 E_0 + m_d g = 0,$$

где m_d — масса пылевой частицы, g — ускорение свободного падения. Введем также параметр, определяющий степень анизотропности распределения заряда электронов по поверхности пылевых частиц:

$$\zeta_{1e} = \frac{4\pi a_1^2 \sigma_{1e}}{q_1}.$$

В итоге, приравняв (44) и (43), для угловой скорости вращения пылевых частиц находим

$$\omega_{rot} = -\frac{3\pi \zeta_{1e}}{4(2 + \varepsilon_1)} \frac{\varrho_d}{\varrho_{gas}} \frac{g}{v_{th, gas}}, \quad (45)$$

где ϱ_d — плотность материала пылевой частицы. Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении угловая скорость вращения зависит от параметров разряда только через параметр ζ_{1e} и явно не зависит ни от размера пылевых частиц, ни от их заряда.

Проведем оценки угловой скорости собственного вращения пылевых частиц для условий экспериментов [17], где исследовалось вращение полых сферических частиц из стекла в неоне при давлении $p = 0.15$ Торр. Положим, что

$$\zeta_{1e} = 10^{-2}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad \rho_d \approx 2 \text{ г/см}^3, \quad \varepsilon_1 \approx 6.$$

Из формулы (45) находим, что угловая скорость вращения вокруг оси x (напомним, что мы ее направили вдоль вектора магнитной индукции) $\omega_{rot} \approx 500$ рад/с. Такое значение угловой скорости и направление оси вращения согласуются с полученными в работе [17], причем такое большое значение обеспечивается всего лишь 1 %-й анизотропией электронного заряда. Для более точного количественного сравнения необходимо более строгое рассмотрение распределения поверхностного заряда в экспериментах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе рассмотрение электростатического взаимодействия заряженной сферической диэлектрической макрочастицы с точечным зарядом в плазме в присутствии внешнего однородного электрического поля показало, что потенциал взаимодействия на всех расстояниях хорошо описывается суперпозицией «дальнодействующего» ДЛФО-потенциала и «короткодействующего» потенциала взаимодействия дипольного и более высоких моментов распределения свободного и наведенного (внешним электрическим полем и точечным зарядом) поверхностного заряда с точечным зарядом в вакууме. Установлено, что потенциал взаимодействия точечного заряда с макрочастицей имеет экстремальное значение в тех положениях, когда линия, соединяющая их центры, направлена вдоль направления внешнего электрического поля. При этом положения максимума и минимума зависят от соотношения значений внешнего электрического поля и дипольного момента распределения поверхностного заряда. Исследование момента электростатических сил, действующих на проводящую макрочастицу в однородном внешнем электрическом поле, показало, что для частицы сферической формы он точно равен нулю, а в случае диэлектрической макрочастицы отличен от нуля. Оценки угловой скорости собственного вращения пылевых частиц, вызванного неоднородным распределением свободного заряда по их поверхности, показали, что даже незначительная неоднородность распределения заряда по поверхности может привести к значительным угловым скоростям собственного вращения диэлектрических макрочастиц.

Работа выполнена при поддержке Роснауки (ГК № 02.740.11.5096) и гранта Президента РФ № НШ-2447.2012.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Фортов, С. А. Храпак, А. Г. Храпак и др., УФН **174**, 495 (2004).
2. S. V. Vladimirov, K. Ostrikov, and A. A. Samarian, *Physics and Applications of Complex Plasmas*, Imperial College Press, London (2005).
3. G. E. Morfill and A. V. Ivlev, Rev. Mod. Phys. **81**, 1353 (2009).
4. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).
5. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, РХД, Ижевск (2002).
6. P. Debye and E. Hückel, Phys. Zeitschr. **24**, 185 (1923).
7. Г. Карслоу, Д. Егер, *Теплопроводность твердых тел*, Наука, Москва (1964) [H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon, Oxford (1959); Nauka, Moscow (1964)].
8. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, т. 1, Изд-во иностр. лит., Москва (1949) [G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, London (1922)].
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. VI, Статистическая физика*, Наука, Москва (1976), с. 267
10. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. С. Иванов, Письма в ЖЭТФ **83**, 640 (2006).
11. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952) [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Univ. Press, Cambridge (1931)].
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. VIII, Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
13. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, J. Wiley & Sons, New York (1957).
14. N. Sato, AIP Conf. Proc. **799**, 97 (2005).
15. S. I. Krasheninnikov, Phys. Plasmas **13**, 114502 (2006).
16. S. I. Krasheninnikov, V. I. Shevchenko, and P. K. Shukla, Phys. Lett. A **361**, 133 (2007).
17. Е. С. Дзалиева, В. Ю. Карасев, О. Ф. Петров, ЖЭТФ **14**, 189 (2012).
18. P. S. Epstein, Phys. Rev. **23**, 710 (1924).