

ДИНАМИКА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МЕСТЕ ОБРАЗОВАНИЯ МЮОННОГО АТОМА В АЛМАЗЕ И КРЕМНИИ

*С. А. Антипов, Ю. М. Белоусов, В. Р. Соловьев**

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 6 марта 2012 г.

Численно, с учетом самосогласованного электрического поля, проведено моделирование пространственно-временного распределения носителей заряда в месте расположения мюонного атома, образованного при захвате отрицательного мюона атомом решетки. В результате получено объяснение результатов μ SR-экспериментов с отрицательными мюонами в кристаллах алмаза и выяснены причины различия поведения поляризации спина отрицательного мюона в алмазе с примесью бора и в кремнии. Получено условие справедливости аналитического решения данной задачи. Показано, что в алмазе, в отличие от кремния, за времена мюонного эксперимента мюонный атом не успевает сформировать нейтральный акцепторный центр в парамагнитном состоянии и остается в диамагнитном состоянии положительного иона.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время положительные μ^+ и отрицательные μ^- мюоны широко применяются для различных исследований конденсированных сред, поведения водородоподобных легких примесей и моделирования химических процессов с участием атомарного водорода [1]. Поведение μ^+ и μ^- в среде существенно различается: положительно заряженный мюон представляет собой легкую примесь, моделирующую с химической точки зрения «легкий изотоп» водорода; отрицательно заряженный мюон быстро захватывается на ядро в $1s$ -состояние, образуя мюонный атом. Поскольку масса мюона в 207 раз больше массы электрона, отрицательный мюон экранирует заряд Z ядра, который эффективно становится на единицу меньше исходного и, таким образом, моделирует одиночный изотоп атома с зарядом $Z - 1$. Этот факт хорошо известен с ранней стадии мюонных исследований [2] и послужил началом создания мюонного метода исследования вещества (μ SR).

Систематическое изучение формирования примесей с зарядом ядра $Z - 1$ в конденсированных средах проводилось на ранних стадиях μ SR-исследований [3, 4]. В работе [5] было предложено изучать с помо-

щью μ^- свойства акцепторных центров в полупроводниках. Например, в кремнии ($Z = 14$) отрицательный мюон захватывается ядром, образуя «изотоп» алюминия ${}_{\mu}\text{Al}$ с зарядом ядра $Z = 13$, который представляет интерес как один из основных примесных акцепторных центров в кремниевых полупроводниках. В работах [6–8] было показано, что с помощью отрицательных мюонов можно получить ценную информацию о сверхтонкой структуре и взаимодействиях с решеткой акцепторных центров в различных полупроводниках.

При интерпретации экспериментальных данных, как правило, предполагается, что мюоны, попадая в конденсированную среду, быстро, за время меньшее времени разрешения экспериментальной аппаратуры, термализуются. Поэтому в начальный момент времени принимается значение поляризации спина мюона, соответствующее состоянию мюона, получившемуся в процессе его термализации. В частности, в работах [8–12] было получено, что в кремнии в начальный момент времени мюонный атом ${}_{\mu}\text{Al}$ находится в парамагнитном состоянии, в котором наблюдаются зависящий от температуры парамагнитный сдвиг частоты и затухание амплитуды прецессии спина мюона. Это состояние трактовалось как нейтральный акцепторный центр. С ростом температуры в диапазоне 5–50 К был зарегистрирован переход из парамагнитной в диамагнитную фазу,

*E-mail: vic_sol@mail.ru

трактовавшуюся как состояние μAl^- . По температурным зависимостям сдвига частоты и скорости затухания амплитуды прецессии были восстановлены характерные времена кинетических процессов в твердотельной плазме, образованной мюоном в конце своего трека торможения в кремнии [13].

Однако развитие техники эксперимента и расширение класса исследуемых объектов показало, что предположение о быстрой термализации мюонов в мишени не всегда верно. В частности, эксперименты по изучению деполяризации спина положительных мюонов в твердом водороде и гелии (наиболее характерные результаты представлены соответственно в работах [14, 15] и [16]) удалось теоретически объяснить, учитывая процессы термализации [17, 18]. Недавно проведенные эксперименты с отрицательными мюонами в кристаллах искусственного алмаза [19–21] также показывают, что, в отличие от кремния, в алмазе парамагнитный нейтральный акцепторный центр за время 10^{-9} с не образуется, поскольку наблюдается не парамагнитный сдвиг частоты прецессии спина мюона, а незатухающая прецессия спина мюона, соответствующая диамагнитной фракции [21]. Таким образом, интерпретацию результатов эксперимента в алмазе не удастся убедительно провести, исходя из предположения о быстром, за время меньше 10^{-10} с, образовании мюонного акцепторного центра μB .

В работе [22] была рассмотрена динамика образования акцепторного центра μB в кристалле алмаза, допированном примесью бора. Атом бора в алмазе представляет собой акцепторный центр, поэтому при его ионизации электронным ударом образуются отрицательный ион примеси B^- и дырка. Теоретические оценки распределения электронов, дырок и ионизованных примесей B^- в окрестности мюонного атома μB на временах, меньших 10^{-9} с, полученные в работе [22], не учитывали влияния самосогласованного электрического поля, создаваемого носителями заряда, на их пространственные распределения и, соответственно, на их концентрацию в месте локализации мюонного атома μB . За счет притяжения дырок полем облака отрицательных ионов примеси концентрация дырок на мюонном атоме может быть значительно больше, чем предсказывается аналитической оценкой [22], что может изменить оценку времени нейтрализации ионизованного мюонного атома.

Цель данной работы — получить объяснение наблюдаемого в экспериментах качественного различия в поведении поляризации спина отрицательного мюона в кремнии и алмазе с помощью численно-

го моделирования эволюции пространственного распределения электронов и дырок в окрестности мюонного атома μB с учетом самосогласованного электрического поля. Результаты моделирования позволили определить пределы применимости аналитического приближения [22], а их сравнение с временным распределением электронов и дырок на атоме μAl в кремнии дали возможность выяснить причину разного поведения поляризации спина мюона в кремнии и алмазе.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК

Для анализа процесса релаксации среды в месте образования мюонного атома промежутки времени с момента захвата отрицательного мюона атомом углерода до $t \approx 10^{-9}$ с так же, как и в работе [22], разобьем на три временных интервала, в каждом из которых преобладает всего один физический процесс.

На первом этапе, продолжающемся до $t \approx 5 \cdot 10^{-14}$ с и сопровождающемся «остыванием» электронов до энергии, равной ширине запрещенной зоны (5 эВ для алмаза), происходит ионизация среды высвободившимися при захвате мюона оже-электронами и порожденными ими вторичными электронами. Обладающие большой энергией оже-электроны разлетаются от места образования мюонного атома практически прямолинейно, поскольку скорость потерь энергии, определяемая преимущественно ионизацией, намного больше скорости изменения направления импульса. При этом они ионизуют атомы среды с образованием вторичных электронов, также обладающих достаточной для ионизации энергией.

Следующий этап приходится на интервал времени $5 \cdot 10^{-14}$ с $\leq t \leq 10^{-10}$ с и характеризуется диффузионным движением нетермализованных носителей заряда и ионизацией атомов примеси В, потенциал ионизации которой (0.37 эВ) много меньше ширины запрещенной зоны. При энергиях, меньших ширины запрещенной зоны, скорость потери энергии становится на порядок меньше скорости релаксации направления импульса, и движение электронов приобретает диффузионный характер. Для оценки скорости потерь энергии на этом этапе использовалось приближение непрерывных потерь, которое справедливо в алмазе до энергий порядка 0.1 эВ. К моменту времени порядка 10^{-10} с практически все носители оказываются термализованными.

Последний этап для $t > 10^{-10}$ с связан с захватом термализованных дырок на ионизованные примеси (в том числе и на мюонный акцепторный центр). Электрическое поле, создаваемое отрицательными ионами примеси, удерживает в окрестности мюонного атома некоторое количество дырок. Избыточные носители уходят из области ионизованных примесей.

Оценки, выполненные в работе [22], показывают, что к моменту времени $t_0 \approx 5 \cdot 10^{-14}$ с, когда движение электронов (дырок) приобретает диффузионный характер, они распределены в тонком сферическом слое радиуса $r_0 \approx 3.3 \cdot 10^{-6}$ см примерно с одинаковой энергией $\varepsilon_0 \approx 5$ эВ. В случае алмаза в сферическом слое содержится около $N \approx 800$ электронов и дырок, образованных на первом этапе релаксации среды после захвата мюона. Это распределение берется в качестве начального распределения для следующего, диффузионного, этапа релаксации среды.

На диффузионном этапе полученное в [22] сферически-симметричное пространственное распределение концентрации электронов описывается решением уравнения диффузии

$$n(r, t) = N \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + r_0^2}{4\tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0)}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{rr_0}{2\tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0)}\right)}{(2\pi)^{3/2} r r_0 \sqrt{2\tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0)}}, \quad (1)$$

где $\tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0)$ — введенный Ферми «возраст» частицы, отсчитанный от момента времени $t_0 \approx 5 \cdot 10^{-14}$ с,

когда энергия частицы была равна ε_0 ; $\varepsilon(t)$ — текущая энергия частицы. Величина $\tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0)$ связана со средним квадратом смещения частицы $\langle r^2(t) \rangle$ и выражается через скорость потерь энергии $g(\varepsilon)$ и коэффициент диффузии $D(\varepsilon)$:

$$\langle r^2(t) \rangle = 6\tau(t), \quad \tau(\varepsilon(t), \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon_0} \frac{D(\varepsilon')}{g(\varepsilon')} d\varepsilon'. \quad (2)$$

Убыль энергии в единицу времени $g(\varepsilon)$ рассматривается в приближении непрерывных потерь и обусловлена потерями на ионизацию примесей и рождение фононов. Она равна ($g_e(\varepsilon_e)$ для электронов и $g_i(\varepsilon_i)$ для дырок)

$$g_e(\varepsilon_e) = n_{imp} \langle \varepsilon_{sec} \rangle \sigma_{i-im}(\varepsilon_e) \sqrt{\frac{2\varepsilon_e}{m_e}} + \varepsilon_e \nu_{\varepsilon-ph}, \quad (3)$$

$$g_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i \nu_{\varepsilon_i-ph},$$

где n_{imp} — концентрация нейтральных атомов примеси, $\langle \varepsilon_{sec} \rangle$ и σ_{i-im} — соответственно средняя потеря энергии при ионизации и сечение ионизации атомов примеси; $\nu_{\varepsilon-ph}$ и ν_{ε_i-ph} — частоты потерь энергии на фононах соответственно для электронов и дырок. В ионизации атомов примеси дырки не участвуют.

Полученное в [22] решение для пространственного распределения доли ионизованных примесей, $W(r, t)$, без учета влияния поля образовавшихся отрицательных ионов на движение электронов имеет вид

$$W(r, t) = 1 - \exp \left[-N \int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon_0} \frac{\sigma_{i-im}(\varepsilon') \exp\left(-\frac{r^2 + r_0^2}{4\tau(\varepsilon'(t), \varepsilon_0)}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{rr_0}{2\tau(\varepsilon'(t), \varepsilon_0)}\right)}{(2\pi)^{3/2} r r_0 \sqrt{2\tau(\varepsilon'(t), \varepsilon_0)}} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} \frac{d\varepsilon'}{g(\varepsilon')} \right]. \quad (4)$$

Относительно масштаба времен, больших 10^{-10} с, в работе [22] предполагалось, что электрическое поле, создаваемое ионами примеси, удерживает в окрестности мюонного атома дырки в количестве, равном количеству ионов примеси. Характерное время выхода решения на эту квазинейтральную по заряду асимптотику не оценивалось.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

3.1. Постановка задачи

Для проверки и уточнения аналитического решения, полученного в работе [22], было проведено численное моделирование эволюции концентрации носителей заряда в месте локализации мюонного атома в

алмазе с учетом самосогласованного электрического поля, создаваемого всеми заряженными частицами. Модель учитывает ионизацию атомов примеси электронами, рекомбинацию носителей заряда и захват положительных носителей на отрицательные ионы примеси.

Моделирование эволюции пространственного распределения электронов и дырок проводилось путем численного решения уравнений переноса в дрейфово-диффузионном приближении. В качестве начального распределения, одинакового для обоих видов носителей для момента времени $t_0 \approx 5 \cdot 10^{-14}$ с, использовалось аналитическое распределение в виде тонкого сферического слоя, полученное в работе [22]:

$$n = N \frac{\exp\left(\frac{-(r^2 + r_0^2)}{2\delta^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{rr_0}{\delta^2}\right)}{(2\pi)^{3/2} r r_0 \delta}, \quad (5)$$

где характерный размер области $r_0 = 3.3 \cdot 10^{-6}$ см, а диффузионное размытие начального распределения $\delta = r_0/10 = 3.3 \cdot 10^{-7}$ см.

Задача решалась в цилиндрической системе координат, позволяющей при необходимости задать аксиально-симметричное внешнее поле.

Уравнения переноса для электронов и дырок имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_e &= -n_e n_i k_{rec}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_i &= -n_e n_i k_{rec} - n_i n_{imp}^- k_{ci} + \\ &+ n_e n_{imp} k_-, \end{aligned} \quad (6)$$

где n_e , n_i и n_{imp}^- — концентрации соответственно электронов, дырок и ионизованных атомов примеси; k_{rec} и k_{ci} — константы рекомбинации электронов с дырками и дырок с ионами примеси, k_- — константа ионизации атома примеси электронным ударом с образованием дырки и отрицательного иона примеси. Потоки \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_i носителей задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e &= -n_e K_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \\ \mathbf{j}_i &= n_i K_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i, \end{aligned} \quad (7)$$

где K и D — коэффициенты подвижности и диффузии; индекс «e» относится к электронам, «i» — к дыркам, \mathbf{E} — напряженность электрического поля.

Система уравнений переноса (6) должна быть дополнена системой уравнений баланса для концентраций нейтральных и ионизованных примесей,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{imp}}{\partial t} &= -n_e n_{imp} k_- + n_i n_{imp}^- k_{ci}, \\ \frac{\partial n_{imp}^-}{\partial t} &= n_e n_{imp} k_- - n_i n_{imp}^- k_{ci}, \end{aligned} \quad (8)$$

и уравнением Пуассона для потенциала φ электрического поля,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \\ \Delta \varphi &= -4\pi e (n_i - n_e - n_{imp}^-). \end{aligned} \quad (9)$$

Для описания релаксации энергии электронов ε_e и дырок ε_i выбрана модель непрерывных потерь без учета пространственного переноса энергии за счет теплопроводности:

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = -g_e(\varepsilon_e), \quad \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -g_i(\varepsilon_i), \quad (10)$$

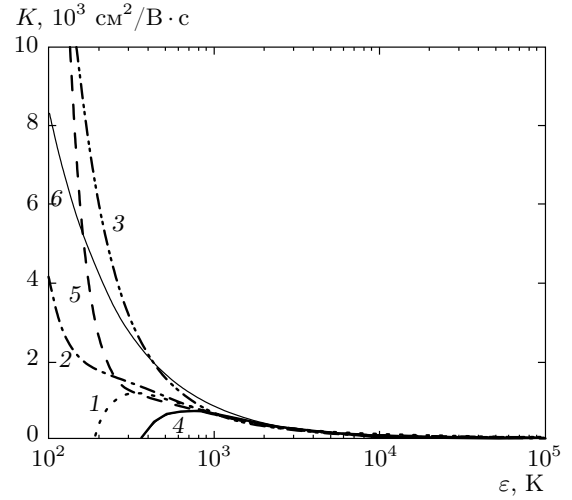


Рис. 1. Зависимости подвижности носителей в алмазе от энергии для различных температур среды: 1, 2, 3 — дырки при $T = 10, 25, 50$ К; 4, 5 — электроны при $T = 25, 50$ К; 6 — подвижность электронов в квазиупругом приближении (13). Концентрация примеси $n_{imp} = 10^{15} \text{ см}^{-3}$

начальная энергия электронов и дырок предполагалась одинаковой: $\varepsilon_e = \varepsilon_i = \varepsilon_0$ при $t = 0$.

Для проведения численных расчетов энергетическая зависимость подвижностей электронов и дырок взята из работ [23, 24], в которых был выполнен ее расчет с учетом неупругости рассеяния носителей на фононах, существенной при энергиях, меньших 2000 К. Результаты расчета, представленные на рис. 1, показывают, что квазиупругое приближение становится справедливым при $\varepsilon > 2000$ К, когда энергия носителей достаточно велика, $\varepsilon \gg ms^2$, а потери энергии в столкновениях с фононами малы по сравнению с ее величиной, $\Delta\varepsilon/\varepsilon \approx \sqrt{8ms^2/\varepsilon} \ll 1$ [25]. Здесь m — масса носителя, а s — скорость звука в кристалле. В алмазе $s = 1.86 \cdot 10^6$ см/с, и для легких дырок $m = 0.7m_e$ (m_e — масса электрона) $ms^2 = 16$ К.

В квазиупругом приближении для моноэнергетичных носителей заряда подвижность, как известно [26], выражается через транспортную частоту рассеяния $\nu_{tr}(\varepsilon)$ и имеет вид

$$K(\varepsilon) = \frac{e}{m\nu_{tr}(\varepsilon)} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3\nu_{tr}(\varepsilon)} \frac{\partial \nu_{tr}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right), \quad (11)$$

где e — заряд электрона. Транспортная частота рассеяния в квазиупругом приближении есть [25]

$$\nu_{tr}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{3ms^2} \frac{1}{\tau_0} + n_{imp}\sigma_{imp}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}, \quad (12)$$

$$\tau_0 = \frac{\pi\rho\hbar^4}{2\Xi^2 m^3 s}.$$

Здесь τ_0 — характерная временная постоянная задачи рассеяния частицы на фононах, ρ — плотность кристалла, Ξ — константа деформационного потенциала. В алмазе $\rho = 3.51$ г/см³, и для легких дырок с $m = 0.7m_e$ и $\Xi = 11.5$ эВ [23, 27] характерное время $\tau_0 = 4.17 \cdot 10^{-11}$ с. Второе слагаемое в выражении для транспортной частоты описывает рассеяние на атомах примеси с сечением рассеяния σ_{imp} , которое было оценено, как 10^{-14} см². После подстановки соотношения (12) в уравнение (11) получается аналитическое выражение для подвижности носителей в приближении квазиупругих столкновений:

$$K(\varepsilon) = e^{-\frac{\frac{2\varepsilon}{3\tau_0 ms^2} + 2n_{imp}\sigma_{imp}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}}{3\left(\frac{2\varepsilon}{3\tau_0 ms^2} + n_{imp}\sigma_{imp}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right)^2}}, \quad (13)$$

представленное кривой 6 на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что при достаточно низких температурах в используемой модели неупругих столкновений носителей с фононами подвижность носителей может становиться отрицательной. Это происходит оттого, что в области температур до 100 К основным механизмом рассеяния носителей оказывается рассеяние на акустических фононах, для которого характерен быстрый рост частоты с увеличением энергии. Как видно из соотношения (11), подвижность K становится отрицательной, если частота $\nu_{tr}(\varepsilon)$ растет с увеличением энергии быстрее, чем $\varepsilon^{3/2}$. Ориентируясь на объяснение экспериментальных данных [21], полученных при $T = 50$ К, используемые в данной работе значения подвижности (кривые 3 и 5 на рис. 1) были положительными во всем диапазоне изменения энергии носителей. Случай более низкой температуры и величины подвижности, которую при этом нужно использовать, требует отдельного рассмотрения.

По определению коэффициент диффузии частиц с энергией ε задается соотношением

$$D(\varepsilon, T) = \frac{2\varepsilon}{3m\nu_{tr}(\varepsilon, T)}, \quad (14)$$

а результаты соответствующего расчета представлены на рис. 2. В квазиупругом приближении коэффициент диффузии явно выражается через энергию ε носителя:

$$D(\varepsilon) = \frac{\tau_0 s^2}{1 + 3\tau_0 s^2 n_{imp}\sigma_{imp}\sqrt{m/2\varepsilon}}. \quad (15)$$

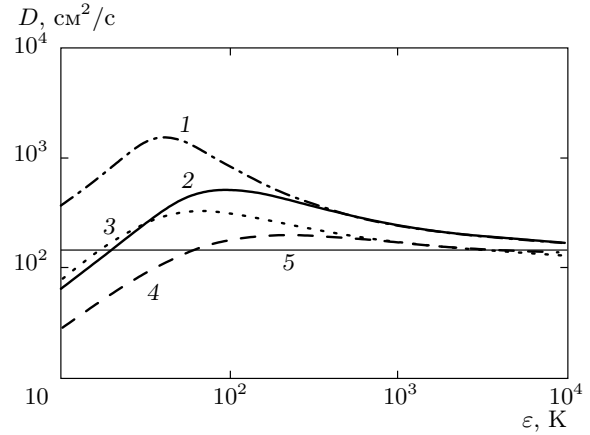


Рис. 2. Зависимости коэффициента диффузии носителей в алмазе от их энергии: 1, 2 — электроны при $T = 30, 50$ К; 3, 4 — дырки при $T = 30, 50$ К; 5 — коэффициент диффузии электронов в квазиупругом приближении (15)

При энергиях, больших 2000 К, коэффициенты диффузии практически не зависят от температуры среды и совпадают с результатами, полученными в квазиупругом приближении (15); при этом коэффициент диффузии электронов больше, чем коэффициент диффузии дырок.

По определению константа ионизации k_- атома примеси электроном с энергией ε равна

$$k_-(\varepsilon) = \sigma_{i-im}(\varepsilon)\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_e}}. \quad (16)$$

Сечение ионизации $\sigma_{i-im}(\varepsilon)$ можно аппроксимировать формулой [28]

$$\sigma_{i-im}(\varepsilon) = \frac{\pi e^4}{J^2} f\left(\frac{\varepsilon}{J}\right), \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{10(x-1)}{(x+0.5)(x+8)},$$

где J — потенциал ионизации; для примеси бора в алмазе $J = 0.37$ эВ [27].

Для описания рекомбинации нетермализованных носителей (k_{rec} и k_{ci}) константа рекомбинации, вычисленная для равновесного ансамбля носителей с максвелловской функцией распределения по энергиям [25], не применима, и необходимо использовать сечение рекомбинации носителя с энергией ε , выведенное Лэксом [29] и уточненное Абакумовым и Ясиевич [30]. Согласно модели Лэкса, рекомбинация происходит в результате захвата свободного носителя в возбужденное связанное состояние с испусканием акустического фонона и последующей диффу-

зии захваченной частицы в пространстве энергий либо до достижения основного связанного состояния, либо до выхода обратно в непрерывный спектр. Сечение рекомбинации носителя в безразмерных переменных энергии носителя, $\xi = 2\varepsilon/ms^2$, и температуры, $\gamma = 2k_B T/ms^2$, описывается формулой [24]

$$\sigma_{rec}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty d\eta \times \frac{\frac{\sigma_1}{\xi}(\sigma + \eta)^2 \left[1 - \left(1 + \frac{\eta}{\gamma} \right) \exp\left(-\frac{\eta}{\gamma}\right) \right]}{\left[\left(1 + \frac{\xi + \eta}{4} \right)^2 - \xi \right]^3 \left[1 - \exp\left(-\frac{\xi + \eta}{\gamma}\right) \right]}, \quad (18)$$

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{6s\tau_0} \left(\frac{Ze^2}{\kappa ms^2} \right)^3, \quad (19)$$

где интегрирование ведется по безразмерной энергии $\eta = 2U/ms^2$ связанных состояний. Здесь U — абсолютная величина энергии связи состояния, в которое захвачен носитель, κ — диэлектрическая проницаемость кристалла, Z — зарядовое число притягивающего центра, k_B — постоянная Больцмана. В случае $Z = 1$ для легких дырок в алмазе получаем $\sigma_1 = 4.2 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$. Сечение рекомбинации нетермализованных носителей на заряженных центрах противоположного знака резко уменьшается с ростом энергии.

Граничные условия в поставленной задаче были заданы при $z = \pm L/2$, $r = 0$, $r = R$ (L — размер области по оси z , R — размер области по радиусу r). Мюонный атом располагался в начале координат.

Из условия цилиндрической симметрии задачи следует

$$\left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = -E_r|_{r=0} = 0, \quad (20)$$

$$n = n_e, n_i.$$

На внешней границе области, моделирующей условия на бесконечности, предполагаются отсутствие потоков электронов и дырок,

$$\left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{z=\pm L} = 0, \quad n = n_e, n_i, \quad (21)$$

и, в силу электронейтральности области, равенство электрического поля на границах области значению внешнего поля, которое в нашем случае равно нулю:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\pm L} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = -E_{out} = 0. \quad (22)$$

Для решения уравнения Пуассона (9) был реализован метод продольно-поперечных прогонок. Система уравнений переноса (6) решалась методом переменных направлений с дополнительными итерациями, разрешающими нелинейность по электрическому полю [31].

Поскольку на внешней границе области, моделирующей невозмущенную среду, потоки носителей равны нулю, по мере разлета частиц область расчета расширялась. Шаги сетки по r и z при этом увеличивались в соответствующее количество раз. Шаг по времени выбирался, исходя из условия Куранта. Относительная точность для вычисления концентраций и потенциала электрического поля была принята равной 10^{-4} .

3.2. Сравнение аналитического и численного решений

Для проверки аналитического решения, полученного в работе [22], было проведено моделирование процессов переноса электронов и дырок для различных значений концентрации примеси бора (10^{15} , 10^{16} , 10^{17} см^{-3}) при температуре среды 50 К.

Результаты численного моделирования для образца алмаза с начальной концентрацией примеси бора $n_{imp} = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, приблизительно соответствующей условиям эксперимента [21] с $n_{imp} = 2.6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, показали, что различия в предсказании поведения носителей аналитическим приближением [22] и численным расчетом начинаются с времен порядка $t \approx 10^{-12} \text{ с}$, когда на движение частиц начинает влиять поле, создаваемое ионизованными атомами примеси. При этом результаты моделирования, проведенного с «выключенным» электрическим полем, полностью совпадали с результатами аналитического расчета [22] на всех временах.

На рис. 3 показаны пространственные распределения электронов и дырок в моменты времени $7 \cdot 10^{-13} \text{ с}$ и $2.5 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ при максимальной из рассмотренных концентрации примеси $n_{imp} = 10^{17}$. В момент времени $7 \cdot 10^{-13} \text{ с}$, как и до этого, результаты аналитического расчета (квадраты) и численной модели (кривая 3) хорошо совпадают, при этом движение обоих сортов носителей имеет характер диффузионного разлета от центра. К моменту времени $2.5 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ электроны продолжают уходить из центра, а дырки, напротив, начинают притягиваться в область центра, где образовалось облако отрицательных ионов примеси. Расхождение между предсказанным теорией распределением частиц (ромбы) и результатами моделирования (кривая 4) становится

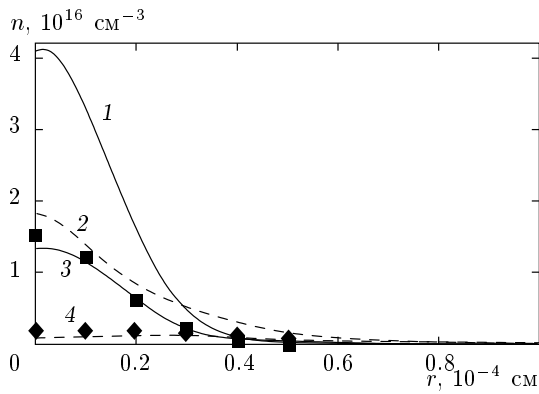


Рис. 3. Распределения дырок (кривые 1, 2) и электронов (3, 4) по расстоянию от мюонного атома в моменты времени $t = 7 \cdot 10^{-13}$ с (сплошные линии) и $t = 2.5 \cdot 10^{-12}$ с (штриховые линии); $n_{imp} = 10^{17}$ см⁻³, $T = 50$ К; символами отмечены значения концентрации электронов, предсказанные теорией [22]

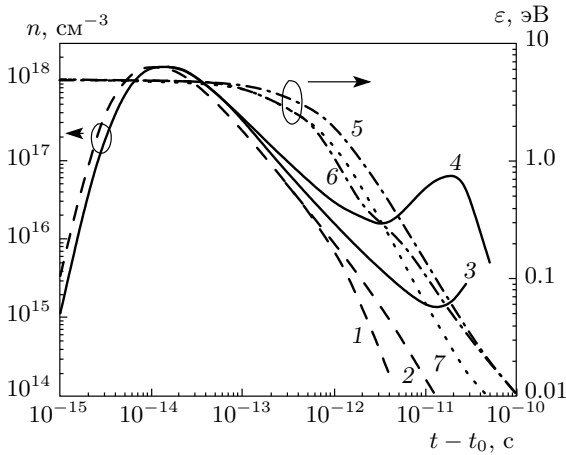


Рис. 4. Зависимости плотности носителей в центре области (на мюонном атоме) и их энергии от времени: 1, 2 — концентрация электронов при $n_{imp} = 10^{17}, 10^{16}$ см⁻³; 3, 4 — концентрация дырок при $n_{imp} = 10^{16}, 10^{17}$ см⁻³; 5, 6 — энергия электронов при $n_{imp} = 10^{16}, 10^{17}$ см⁻³; 7 — энергия дырок; $T = 50$ К

ся заметным. Количество дырок (кривые 1, 2) превышает количество электронов вследствие ионизации атомов примеси с образованием отрицательного иона и дырки.

К моменту времени $2.5 \cdot 10^{-12}$ с энергия электронов еще достаточно велика, около 3000 К (рис. 4), т. е. самосогласованное электрическое поле может существенно влиять и на поведение еще нетермализованных носителей. При меньших концентра-

циях примеси, $n_{imp} < 10^{17}$ см⁻³, поле начинает существенно влиять на распределение концентрации носителей на больших временах, когда последние затормозятся до меньших энергий. Так, для $n_{imp} = 10^{16}$ см⁻³ влияние поля заметно при $\epsilon < 1000$ К, а для $n_{imp} = 10^{15}$ см⁻³ — при $\epsilon < 100$ К. Полученный результат логичен, поскольку с уменьшением концентрации примеси поле облака отрицательных ионов уменьшается, а его влияние на движение частиц существенно, когда потенциальная энергия частиц в поле становится сопоставимой по величине с их кинетической энергией.

На рис. 4 показаны временные зависимости плотности носителей на мюонном атоме и их энергии. Зависимость концентрации носителей немонотонная. Поскольку начальное распределение имеет вид тонкого сферического слоя, рост концентрации носителей в центре на временах, меньших 10^{-14} с, обусловлен диффузионным заполнением области внутри этой сферы. Максимальное значение концентрации носителей в центре порядка 10^{18} см⁻³ достигается к моменту времени $t \approx 10^{-14}$ с, затем концентрация частиц убывает из-за диффузионного разлета. Поскольку коэффициент диффузии электронов больше коэффициента диффузии дырок (см. рис. 2), максимум плотности первых наблюдается несколько раньше.

На графиках плотности дырок имеется второй локальный максимум при $t \approx 3 \cdot 10^{-11}$ с, обусловленный тем, что часть «разбежавшихся» дырок притягивается ионизованными примесями обратно в окрестность мюонного атома. При этом для меньших концентраций примеси возвращается меньшее количество дырок из-за меньшей величины электрического поля (кривые 3 и 4 на рис. 4). На временах, больших $3 \cdot 10^{-11}$ с, когда энергия частиц уменьшается до величины порядка 100 К (около 0.01 эВ) и константа рекомбинации резко возрастает, вернувшиеся дырки начинают захватываться на ионизованные примеси, и их концентрация в центре стремительно убывает.

Таким образом, формула (1) хорошо описывает пространственно-временное распределение частиц только при условии, когда поле, создаваемое ионами примеси, достаточно мало, что справедливо для тем больших времен, чем меньше концентрация примеси. При $n_{imp} = 10^{17}$ см⁻³ аналитическое решение дает правильный результат для $t < 10^{-12}$ с.

Количество ионизованных примесей в окрестности мюонного атома определяет количество дырок, которые останутся в данной области на временах, больших 10^{-10} с. Формула (4) для вероят-

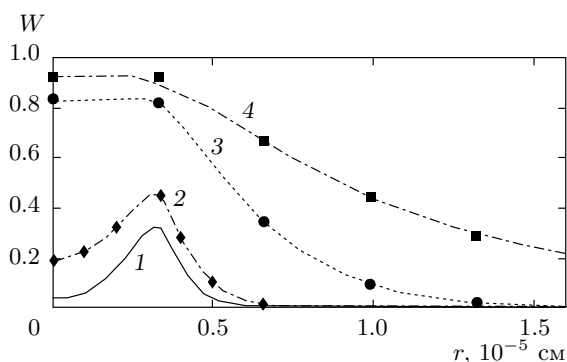


Рис. 5. Распределения доли W ионизованных примесей в различные моменты времени: 1 — $t = 5 \cdot 10^{-15}$ с; 2 — $t = 10^{-14}$ с; 3 — $t = 10^{-13}$ с; 4 — $t = 2.5 \cdot 10^{-12}$ с; символами отмечены теоретические значения; $n_{imp} = 10^{17}$ см $^{-3}$, $T = 50$ К

ности ионизации примеси была получена без учета влияния самосогласованного электрического поля на распределение носителей заряда. Для проверки ее справедливости было проведено представленное на рис. 5 сравнение зависимости (4) (символы на рис. 5) с результатами численного моделирования для $n_{imp} = 10^{17}$ см $^{-3}$ и $T = 50$ К.

Из рис. 5 следует, что в окрестности мюонного атома ионизация примесей происходит за время порядка 10^{-13} с, когда энергия электронов еще сравнительно велика и влияние поля на их распределение мало. Кривая 4 соответствует моменту времени $2.5 \cdot 10^{-12}$ с, когда практически все атомы примеси в области радиусом $4 \cdot 10^{-6}$ см оказываются ионизованными и ионизация заканчивается. Вследствие того, что основная часть примесей ионизируется за малые времена, когда влияние самосогласованного поля еще мало, формула (4) достаточно точно описывает их пространственное распределение.

3.3. Вероятность перехода акцепторного центра из ионизованного состояния в нейтральное

Согласно общепринятым представлениям, изложенным, в частности, в работе [9], к моменту времени порядка 10^{-9} с, когда уверенно можно говорить о регистрации прецессии спина мюона и работоспособности μ SR-метода, мюонный атом в кристалле алмаза уже восстановил свою нейтральность и, возможно, захватил электрон, перейдя в состояние μ B $^-$. Состояние мюонного атома соответствует либо парамагнитному состоянию нейтрального цен-

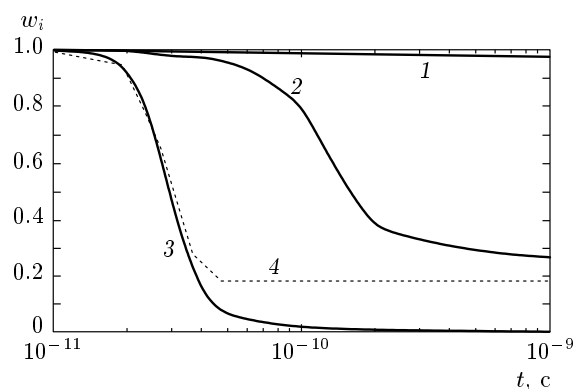


Рис. 6. Зависимости от времени вероятности $w_i(t)$ того, что ионизованный акцепторный центр не захватит дырку и останется ионизованным при различных концентрациях примеси: 1 — 10^{15} см $^{-3}$; 2 — 10^{16} см $^{-3}$; 3 — 10^{17} см $^{-3}$, $T = 50$ К; 4 — 10^{17} см $^{-3}$, $T = 10$ К

тра μ B 0 , либо диамагнитному состоянию ионизованного акцепторного центра μ B $^-$, либо парамагнитному состоянию нейтрального акцепторного центра μ B $^-$ + дырка.

Результаты расчета зависимости концентрации дырок в месте локализации мюонного атома от времени позволяют вычислить вероятность $w_i(t)$ сохранения изначально ионизованного состояния акцепторного центра (рис. 6) и, соответственно, вероятность $1 - w_i(t)$ перехода акцепторного центра из ионизованного в нейтральное состояние в результате захвата дырки.

Верхняя кривая 1 на рис. 6 соответствует концентрации примеси 10^{15} см $^{-3}$. При такой низкой концентрации количество образующихся отрицательных ионов мало, и они не удерживают в своей окрестности достаточное для эффективной рекомбинации количество дырок; основная часть носителей уходит из области вследствие диффузии. Соответственно, вероятность, что ионизованный мюонный акцепторный центр не сможет захватить дырку, остается высокой на временах до 10^{-9} с.

Нижняя кривая 3 соответствует концентрации $n_{imp} = 10^{17}$ см $^{-3}$. В этом случае образуется достаточно много ионов примеси, поле которых притягивает большое количество дырок. Вероятность того, что ионизованный мюонный акцепторный центр не сможет захватить дырку, быстро уменьшается уже на временах, меньших 10^{-10} с, и к моменту времени $t \approx 10^{-9}$ с ионизованные акцепторные центры полностью исчезают, переходя в нейтральное парамагнитное состояние. Этот расчет прибли-

зительно соответствует условиям эксперимента [21] с $n_{imp} = 2.6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $T = 50 \text{ К}$. Таким образом, если бы к моменту времени $t \approx 10^{-10} - 10^{-9} \text{ с}$ мюонный атом уже восстановил свои ковалентные связи в решетке алмаза и превратился бы в акцепторный центр, то μSR -эксперимент должен был бы зафиксировать большую парамагнитную фракцию нейтрального акцепторного центра, а не быстро исчезающую диамагнитную фракцию, соответствующую состоянию μB^- . Однако в эксперименте [21] наблюдалась как раз незатухающая поляризация спина мюона, соответствующая диамагнитному состоянию, а парамагнитная фракция не наблюдалась. Это обстоятельство приводит к предположению, что, возможно, на временах μSR -эксперимента $10^{-9} - 10^{-6} \text{ с}$ мюонный атом в решетке алмаза, в отличие от подобного мюонного атома в решетке кремния, еще не находится в состоянии акцепторного центра, а состояние мюонного атома соответствует диамагнитному состоянию, отличному от ионизованного акцепторного центра, например, состоянию μB^+ .

4. СРАВНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ В АЛМАЗЕ И В КРЕМНИИ

Рассмотрим процесс нейтрализации радиационного дефекта, образуемого отрицательным мюоном в кристаллах со структурой алмаза, и оценим скорости образования нейтрального центра μA^0 для алмаза и кремния. Полностью ионизованный положительный ион μA^{+Z} (Z — зарядовое число мюонного атома; $Z = 5$ для μB^{+5} в алмазе и $Z = 13$ для μAl^{+13} в кремнии) быстро, за времена, меньшие 10^{-12} с , захватывает $Z - 1$ электронов у соседних по решетке атомов и становится однократно заряженным ионом μA^{+1} . Поскольку потенциал ионизации образованного мюонного атома ниже, чем атома материала решетки (8.3 эВ против 11.26 эВ в паре В-С и 5.99 эВ против 8.15 эВ в паре Al-Si), для захвата последнего валентного электрона иону μA^{+1} не хватает потенциальной энергии. Таким образом, на временах порядка 10^{-12} с в кристалле формируется состояние радиационного дефекта в виде однократно ионизованного иона μA^{+*} (μB^{+*} в алмазе и μAl^{+*} в кремнии). Звездочка в обозначении этих состояний означает, что это гибридные возбужденные состояния, в которых валентные электроны еще не установили химические связи с окружающими атомами решетки.

Скорость изменения состояния μAl^{+*} за счет захвата свободного электрона с образованием ней-

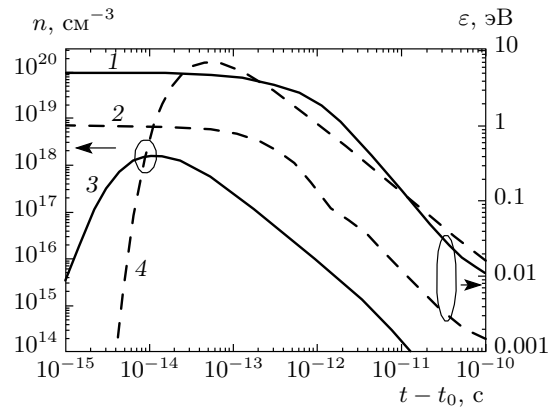


Рис. 7. Зависимости от времени энергии релаксирующих электронов (1, 2) и их концентрации в окрестности мюонного атома (3, 4) для алмаза (сплошные кривые) и кремния (штриховые); $T = 50 \text{ К}$

трального гибридного состояния μA^* ($\mu\text{A}^{+*} + e + \text{phonon} \rightarrow \mu\text{A}^* + \text{phonon}$) можно оценить, зная полученные в предыдущем разделе временные зависимости плотности и энергии электронов в месте остановки мюона. Частота рекомбинации иона μA^{+*} со свободным электроном равна

$$\nu_{rec}(t) = n_e|_{r=0}(t) \sqrt{\frac{2\varepsilon_e(t)}{m_e}} \sigma_{rec} \left(\frac{2\varepsilon_e(t)}{m_e s^2} \right), \quad (23)$$

где сечение σ_{rec} описывается формулой (18), а вероятность $w^{(0)}$ образования в результате рекомбинации гибридного состояния μA^* к моменту времени t определяется соотношением

$$w^{(0)}(t) = 1 - \exp \left[- \int_0^t \nu_{rec}(\tau) d\tau \right]. \quad (24)$$

Сравним вероятности $w^{(0)}$ образования нейтрального гибридного состояния в алмазе и в кремнии. В кремнии мюонный атом имитирует акцепторную примесь алюминия с потенциалом ионизации 0.067 эВ [27]. Данные о плотности электронов и их энергии для алмаза были получены в разд. 3.2, а для кремния — с использованием теоретических оценок (1)–(4), справедливость которых была подтверждена выше.

На рис. 7 приведены рассчитанные зависимости энергии электронов от времени в процессе их релаксации в алмазе и в кремнии. Начальная энергия электронов в кремнии в пять раз меньше, чем в алмазе, и составляет приблизительно 1 эВ в соответствии с шириной запрещенной зоны в кремнии.

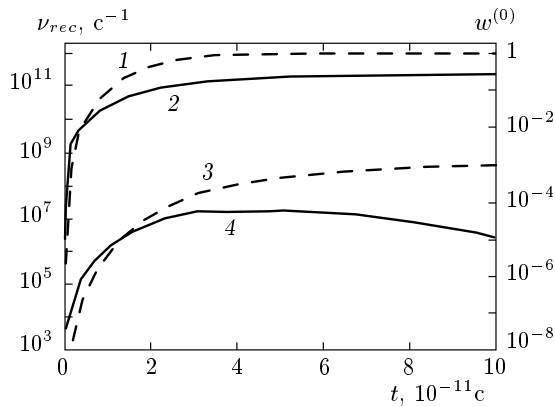


Рис. 8. Вероятности захвата электрона положительным ионом мюонного атома $w^{(0)}$ (штриховые кривые) и частоты захвата ν_{rec} (сплошные кривые) в кремнии (1, 2) и в алмазе (3, 4)

Также на рис. 7 приведены зависимости от времени концентрации электронов в точке остановки мюона для алмаза и кремния. Кривая для кремния рассчитывалась по формуле (1), в которую были подставлены соответствующие коэффициенты диффузии и скорости потерь энергии. Поскольку энергия, выделяющаяся при захвате отрицательного мюона в кремнии в $(Z_{Si}/Z_C)^2 = (14/6)^2 \approx 5.4$ раз больше, чем в алмазе, а число рожденных вторичных электронов в пять раз больше из-за во столько же раз меньшей ширины запрещенной зоны, начальное для этапа диффузии количество N электронов в кремнии, приблизительно, на два порядка больше, чем в алмазе, т. е. $N \approx 80000$.

Частота рекомбинации электронов на положительном ионе в алмазе достигает значений, больших 10^7 с^{-1} , лишь на короткое время, меньшее 10^{-10} с . В кремнии, вследствие меньшей энергии электронов, обеспечивающей большее значение сечения рекомбинации, и большей их концентрации, она достигает величин порядка 10^{11} с^{-1} (рис. 8).

Рассчитанная по этим данным вероятность $w^{(0)}$ захвата электрона положительным ионом мюонного атома представлена на рис. 8. В кремнии состояние μAl^* образуется с почти единичной вероятностью уже за время $4 \cdot 10^{-11} \text{ с}$, тогда как в алмазе вероятность образования μB^* к моменту времени 10^{-10} с составляет всего лишь 10^{-3} и выходит на насыщение. Частота рекомбинации $\nu_{rec}(t) < 10^6 \text{ с}^{-1}$ при $t > 10^{-10} \text{ с}$ и быстро убывает вследствие ухода электронов из окрестности мюонного атома, т. е. на временах, больших или порядка времени жизни мюона, не произойдет роста вероятности образования μB^* .

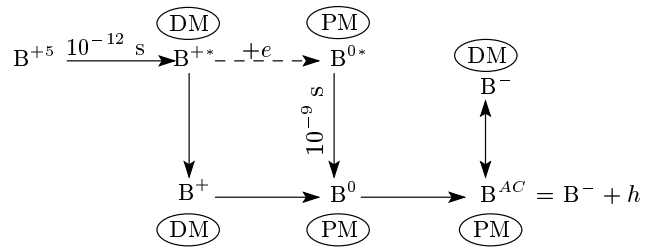


Рис. 9. Схема процесса образования мюонного акцепторного центра в алмазе: h — дырка, DM и PM — диамагнитное и парамагнитное состояния, B^{AC} — акцепторный центр В

Таким образом, процесс термализации радиационного дефекта, образованного отрицательным мюоном идет в различных кристаллах следующим образом. На временах порядка 10^{-10} с в кремнии и германии образуется возбужденное нейтральное состояние μA^* , а в алмазе — ионизованное состояние μB^{+*} , химические связи которых с окружающими атомами решетки не восстановлены, а внешняя электронная оболочка описывается гибридной функцией соответственно $nsnp^2$ и $2s2p$. Из возбужденного гибридного состояния радиационный дефект может перейти в состояние с восстановленными химическими связями радиационным образом за время порядка 10^{-9} с [32]. При этом в кристаллах кремния и германия три электрона радиационного дефекта образуют химическую связь с атомами решетки, а в алмазе — два. Ненасыщенная (разорванная) связь равновероятна для четырех ближайших соседей кластеров $(\text{AlSi}_4)^0$ и $(\text{GaGe}_4)^0$. В алмазе остаются две ненасыщенные связи, которые также равновероятны для четырех ближайших соседей кластера $(\text{BC}_4)^+$. Далее однократно заряженный дефект $(\text{BC}_4)^+$ в алмазе может нейтрализоваться в результате безрадиационных переходов электронов между связями с соседями следующей координационной сферы.

Дальнейшее поведение мюонного атома в решетках кремния, германия и алмаза становится одинаковым. После образования нейтрального центра μA^0 последний может насытить разорванную связь, захватив электрон либо из зоны проводимости, либо из валентной зоны. В первом случае получается ионизованный акцепторный центр, а во втором — в валентной зоне появляется вакансия (дырка), связанное состояние которой с заряженным центром μA^- образует нейтральный акцепторный центр. Именно эти состояния и представляют интерес для изучения мюонным методом.

Отображающая приведенные выше рассуждения схема процесса образования мюонного акцепторного центра в алмазе представлена на рис. 9. Штрихами показан процесс рекомбинации иона μB^{+*} со свободным электроном, который в алмазе, как показано, не реализуется из-за низкой вероятности, а в кремнии и германии успешно протекает, обеспечивая быстрое образование состояния μA^0 .

Таким образом, вероятность образования нейтрального состояния мюонного центра в алмазе за времена, характерные для μSR -эксперимента, крайне мала. Наблюдаемая в эксперименте [21] прецессия спина мюона, характерная для диамагнитной фракции, объясняется скорее всего тем, что мюонный атом находится в диамагнитном состоянии положительного иона μB^+ .

В кремнии цепочка изменения состояний мюонного центра, изображенная на рис. 9, к началу мюонного эксперимента доходит до парамагнитного состояния μAl^0 с восстановленными химическими связями. Представленные в обзоре [9] результаты по измерению константы сверхтонкого взаимодействия и скорости релаксации орбитального момента мюонным методом относятся, скорее всего, именно к этому состоянию, а приведенная оценка по скорости захвата свободного электрона — к образованию μAl^- из μAl^0 . К этому процессу, по-видимому, относится и изменение соотношения парамагнитной и диамагнитной фракций прецессии мюона, наблюдаемое в эксперименте с кремнием [9].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен численный расчет динамики облака носителей заряда в окрестности мюонного атома, образованного при захвате отрицательного мюона в алмазе с примесью бора. Показано, что зависимость концентрации носителей от времени в месте локализации мюона носит немонотонный характер. К моменту времени $t \approx 5 \cdot 10^{-14}$ с электроны тормозятся до энергии, приблизительно равной ширине запрещенной зоны (5 эВ), образуя тонкий сферический слой. В последующие моменты времени в результате диффузии концентрация носителей в центре сначала повышается, достигая максимума на временах порядка $6 \cdot 10^{-14}$ – 10^{-13} с, а затем понижается из-за диффузионного разлета.

Следующий этап эволюции пространственного распределения носителей различен для электронов и дырок, поскольку в процессе охлаждения до энергии, равной потенциалу ионизации примеси (0.37 эВ

для бора в алмазе), электроны ионизовали атомы акцепторной примеси, создав облако отрицательных ионов и увеличив концентрацию дырок. В электрическом поле этого облака отрицательных ионов дырки притягиваются к центру, создавая второй локальный максимум концентрации в месте расположения мюонного атома, а электроны ускоряют свой разлет на периферию.

Численный расчет показывает, что самосогласованное электрическое поле существенно не меняет пространственного распределения носителей до момента времени, пока они не затормозятся до энергии, сравнимой с величиной потенциальной энергии в поле. Для концентрации примеси 10^{17} см^{-3} эта величина равна приблизительно 0.3 эВ и уменьшается с понижением концентрации примеси. При концентрации примеси ниже 10^{15} см^{-3} учет самосогласованного поля не влияет на результат вплоть до термализации носителей. Пространственно-временное распределение электронов и концентрация отрицательных ионов примеси в этом случае достаточно точно описываются удобным для использования аналитическим приближением, полученным в работе [22].

Показано, что образование нейтрального центра μB^0 в алмазе происходит за времена, превышающие время жизни мюона, что объясняет наблюдаемую в эксперименте незатухающую прецессию его спина на частоте свободного мюона, соответствующую диамагнитному состоянию μB^+ . Поэтому в алмазе не наблюдается сдвиг частоты прецессии, характерный для парамагнитного состояния μAl^0 в кремнии.

В кремнии ион μAl^+ за счет рекомбинации с электроном переходит в состояние возбужденного нейтрального центра за время порядка 10^{-10} с, а парамагнитное состояние μAl^0 с установившимися химическими связями образуется за времена порядка 10^{-9} с и наблюдается в мюонных экспериментах. Переход мюонного центра из парамагнитного в диамагнитное состояние, также зарегистрированный в экспериментах с кремнием, соответствует захвату свободного электрона на нейтральный центр μAl^0 с образованием ионизованного акцепторного центра μAl^- .

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» по Государственному контракту П558 от 17 мая 2010 г. Авторы выражают благодарность А. С. Батурину и Т. Н. Мамедову за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Смилга, Ю. М. Белоусов, *Мюонный метод исследования вещества*, Наука, Москва (1991).
2. А. О. Вайсенберг, *Мю-мезон*, Наука, Москва (1964).
3. J. Imazato, K. Nagamine, T. Yamazaki et al., *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1849 (1984).
4. H. Keller, R. F. Kiefl, H. P. Baumeler et al., *Hyperfine Interact.* **31**, 461 (1986).
5. M. Koch, K. Meier, J. Major et al, *Hyperfine Interact.* **65**, 1039 (1990).
6. В. Н. Горелкин, В. Г. Гребинник, К. И. Грицай и др., *ЯФ* **56**, 29 (1993).
7. T. N. Mamedov, I. L. Chaplygin, V. N. Duginov et al., *Hyperfine Interact.* **105**, 345 (1997).
8. T. N. Mamedov, K. I. Gritsaj, A. V. Stoykov et al., *Physica B* **289–290**, 574 (2000).
9. Т. Н. Мамедов, А. В. Стойков, В. Н. Горелкин, *ЭЧАЯ* **33**, 1005 (2002).
10. T. N. Mamedov, V. N. Duginov, V. G. Grebennik et al., *Hyperfine Interact.* **86**, 717 (1994).
11. В. Н. Горелкин, В. Г. Гребенник, К. И. Грицай и др., *Письма в ЖЭТФ* **63**, 539 (1996).
12. T. N. Mamedov, I. L. Chaplygin, V. N. Duginov et al., *J. Phys.: Condens. Matter* **11**, 2849 (1999).
13. А. С. Батурин, В. Н. Горелкин, В. Р. Соловьев, *ЖЭТФ* **126**, 385 (2004).
14. Дж. Брюэр, Е. П. Красноперов, С. Р. Крейцман и др., *Письма в ЖЭТФ* **53**, 577 (1991).
15. W. Higemoto, K. Sotoh, N. Nishida et al., *Hyperfine Interact.* **106**, 39 (1997).
16. Е. П. Красноперов, Е. Е. Мейлихов, Д. Герлах и др., *Письма в ЖЭТФ* **61**, 9647 (1995).
17. Ю. М. Белоусов, В. П. Смилга, *ЖЭТФ* **79**, 811 (1994).
18. Ю. М. Белоусов, *ЖЭТФ* **131**, 243 (2007).
19. T. N. Mamedov, D. Adnreika, A. S. Baturin et al., *Physica B* **374–375**, 390 (2006).
20. Т. Н. Мамедов, А. Г. Дутов, Д. Герлах, *Сообщения ОИЯИ Р14-2004-104*, Дубна (2004).
21. Т. Н. Мамедов, А. С. Батурин, В. Д. Бланк и др., *Сообщения ОИЯИ Р14-2007-12*, Дубна (2007).
22. А. С. Батурин, В. Н. Горелкин, В. Р. Соловьев и др., *Сообщения ОИЯИ Р14-2007-188*, Дубна (2007).
23. A. S. Baturin, V. N. Gorelkin, V. S. Rastunkov et al., *Physica B* **374–375**, 340 (2006).
24. А. С. Батурин, В. Н. Горелкин, В. Р. Соловьев и др., *Физика плазмы* **34**, 1 (2008).
25. В. Н. Абакумов, В. И. Перель, И. Н. Ясиевич, *Физика и техника полупроводников* **12**, 3 (1978).
26. Н. Л. Александров, А. М. Кончаков, А. П. Напартович и др., *Химия плазмы* **11**, 3 (1984).
27. O. Mandelung, *Semiconductors: Data Handbook*, Springer, Berlin (2004).
28. Б. М. Смирнов, *Ионы и возбужденные атомы в плазме*, Атомиздат, Москва (1974).
29. M. Lax, *Phys. Rev.* **119**, 1502 (1960).
30. В. Н. Абакумов, И. Н. Ясиевич, *ЖЭТФ* **71**, 657 (1976).
31. Р. П. Федоренко, *Введение в вычислительную физику*, Изд-во МФТИ, Москва (1994).
32. Yu. M. Belousov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **343**, 012013 (2012).