

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ

В. И. Альшиц, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2012 г.

Описано резонансное возбуждение интенсивной упругой волны с помощью незеркального отражения в кристалле специальной волны накачки. Выбор плоскости и угла падения обусловлен требованием близости возбуждаемой отраженной волны к собственной объемной моде с потоком энергии вдоль свободной границы. Параметры резонанса найдены для среды произвольной анизотропии. Общие соотношения конкретизированы для моноклинных, ромбических и гексагональных систем. Сформулирован критерий оптимального подбора кристаллов, в которых резонансное отражение близко к конверсионному, когда практически вся энергия из падающего пучка волны накачки попадает в приповерхностный узкий отраженный пучок высокой интенсивности. На примере таких кристаллов приводятся оценки и иллюстрации. Интенсивность отраженного пучка увеличивается с его сужением, но по мере этого сужения растет и его дифракционная расходимость. Тем не менее при достаточно высоких частотах можно повысить интенсивность пучка в 5–10 раз, сохранив его расходимость на приемлемом уровне. При сжатии пучка в двух измерениях путем его двукратного отражения можно достичь усиления на два порядка.

DOI: 10.7868/S0044451013060074

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная кристаллоакустика является важной составляющей многочисленных приборов и устройств, основанных на использовании концентрированных пучков ультра- и гиперзвука, линий задержки, поверхностных и объемных волн и т. д. Многие акустические эффекты в кристаллах возникают исключительно благодаря анизотропии. В частности, пьезоэлектричество существует только в кристаллах и широко используется в акустических устройствах [1]. Другим ярким примером нетривиальной роли анизотропии является эффект фононной фокусировки [2] — концентрирования энергии в кристалле вдоль особых направлений, для которых акустический пучок по векторам Пойнтинга гораздо уже, чем по волновым векторам. В настоящей работе мы рассмотрим другой принцип концентрирования энергии в акустических волнах, тоже всецело обусловленный анизотропией кристаллов.

Интенсивные пучки ультразвука широко применяются в технике, медицине, научном приборостроении и т. д. Обычно для преобразования таких пучков используются их отражение и преломление на границах раздела слоистых изотропных структур. Как мы увидим, кристаллы открывают новые возможности преобразования пучков.

Рассмотрим, например, резкое сужение пучка при его незеркальном отражении от поверхности кристалла. На рис. 1а показана ситуация, когда при отражении падающего пучка ширины D_i один из двух отраженных пучков распространяется под малым углом β_r к поверхности и потому сильно сужается до ширины d_r . Если подобрать кристалл и геометрию распространения так, чтобы в «сжатый» пучок попадала достаточно большая доля энергии η , то его интенсивность может значительно превысить интенсивность падающего пучка. В таком случае коэффициент увеличения интенсивности пучка, очевидно, будет величиной порядка $\eta D_i/d_r = \eta \sin \alpha_i / \sin \beta_r \gg 1$. О том, как это осуществить, и пойдет речь в данной работе.

Казалось бы, аналогичный эффект можно получить при падении того же пучка на границу раздела двух изотропных сред под углом, близким к углу

*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

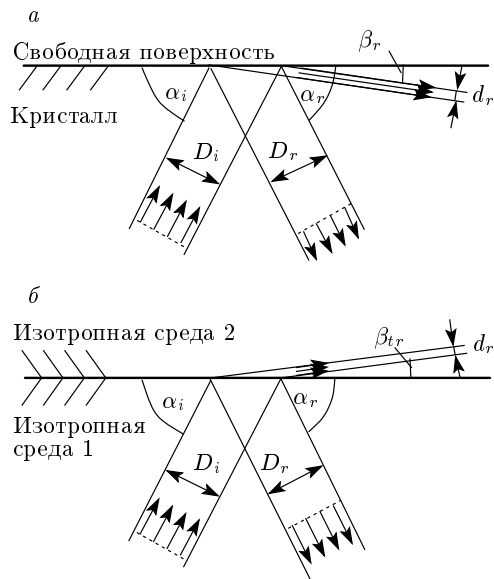


Рис. 1. Схемы сужения акустического пучка: при незеркальном отражении от свободной поверхности кристалла (а) и при преломлении на границе раздела изотропных сред (б)

полного внутреннего отражения, когда преломленный пучок распространяется вблизи границы раздела и потому узок (рис. 1б). Аналогия выглядит почти полной, за исключением одной важной детали: в этом случае доля η энергии в преломленном пучке стремится к нулю по мере уменьшения его ширины [3]. А при незеркальном отражении в кристаллах определенной ориентации она может быть достаточно высокой. Как мы увидим ниже, существуют кристаллы, в которых реализуется уровень η даже весьма близкий к единице.

Конфигурации типа изображенной на рис. 1а могут быть найдены на основе следующих соображений. Согласно работе [4], в кристалле произвольной анизотропии всегда можно выбрать такую поверхность с нормалью \mathbf{n} , а на ней такое направление распространения \mathbf{m} , которые допускают существование собственной плоской упругой волны, удовлетворяющей условиям свободной границы и стандартным уравнениям движения. Речь идет об особой (exceptional) объемной волне с потоком энергии вдоль поверхности. Для данной выделенной геометрии распространения $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ в кристалле однопарциальная особая объемная волна может либо заменять поверхностную волну, либо сосуществовать с ней [5].

Вектор поляризации и поток энергии данной собственной моды всегда параллельны поверхности [6, 7]. А ее волновой вектор \mathbf{k} , из-за анизотропии,

напротив, не обязательно направлен вдоль границы и может иметь проекции на оба единичных вектора, \mathbf{m} и \mathbf{n} : $\mathbf{k} = k(\mathbf{m} + p\mathbf{n})$, где $k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}$. Скорость распространения вдоль поверхности такой волны с частотой ω принято характеризовать приведенной фазовой скоростью (tracing speed) $v = \omega/k$.

Согласно [4], при определенном непрерывном согласованном изменении ориентации векторов \mathbf{n} и \mathbf{m} рассматриваемое собственное объемное решение сохраняет свое существование. Иными словами, решения для особых объемных волн в любом кристалле должны занимать целые линии в трехмерном пространстве углов, задающих ориентацию взаимно ортогональной пары $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$.

Такие решения существуют на всех трех полостях поверхности медленности (поверхности рефракции) любого кристалла. Особой объемной волне на средней полости всегда сопутствует независимое отражение, в котором падающая и отраженная волны распространяются в плоскости (\mathbf{m}, \mathbf{n}) с той же приведенной скоростью v и принадлежат внешней полости. При несогласованном возмущении ориентаций поверхности и сагиттальной плоскости ни то, ни другое решение не может сохраниться. В этом случае вместо двух распавшихся решений должна появиться их суперпозиция, в которую бывшая особая объемная волна войдет как новая отраженная компонента, поток энергии в которой составляет малый угол с поверхностью. Ясно, что малое возмущение исходной геометрии относительно слабо нарушит удовлетворение этой приповерхностной компонентой граничного условия свободной поверхности. Компенсация этого нарушения остается на долю остальных компонент. Поэтому новая приповерхностная отраженная волна должна иметь амплитуду, значительно превышающую амплитуды других парциальных волн, включая и падающую. Этот процесс можно рассматривать как резонансное возбуждение интенсивной объемной волны с помощью слабой волны накачки, падающей на поверхность кристалла под надлежащим углом.

Возвращаясь от рассмотренной плосковолновой суперпозиции к ограниченному пучку, мы и приходим к «сюжету», изображенному на рис. 1а. Конечно, в изотропной среде никакое возмущение ориентации распространения не может устранить такое известное объемное решение как SH-волна. Она, в принципе, не может превратиться в интенсивную отраженную компоненту в задаче отражения. Поэтому обсуждаемый механизм специфичен для кристаллов.

Ниже сформулированная проблема будет решена как в общем случае среды произвольной анизотропии, так и для кристаллов моноклинной, ромбической и гексагональной систем. Получив общие выражения для коэффициента усиления интенсивности волны и параметра η эффективности резонанса, мы подробно их исследуем (аналитически и численно), сформулируем критерии подбора кристаллов для будущих экспериментов и обсудим оптимальные условия реализации эффекта.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Уравнение движения и граничные условия

Рассмотрим произвольную полубесконечную упругую среду с модулями упругости c_{ijkl} и плотностью ρ . Соответствующие обсуждаемым решениям векторные поля смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ удобно искать в виде суперпозиций плоских волн:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} \exp \{ ik [(\mathbf{m} + p_{\alpha} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r} - vt] \}, \quad (1)$$

где C_{α} и \mathbf{A}_{α} — скалярные амплитуды и нормированные векторы поляризации парциальных волн. Их число зависит от конкретных условий и будет уточняться в процессе рассмотрения. Выберем систему координат, в которой плоскость xy совпадает с сагитальной плоскостью, а плоскость xz — с плоскостью границы. При этом ось x , параллельная \mathbf{m} , принадлежит границе, а ось y направлена вдоль внутренней нормали \mathbf{n} к поверхности (рис. 2).

В суперпозиции (1) каждая парциальная волна

$u_i^{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ должна удовлетворять уравнению динамической теории упругости [8]

$$\rho \ddot{u}_i^{\alpha} = c_{ijkl} u_{l,kj}^{\alpha}, \quad (2)$$

где, как обычно, две точки над u_i^{α} означают вторую производную по времени, символ « \dots, k » обозначает дифференцирование по пространственной компоненте x_k , а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. При этом линейная комбинация (1) подбирается с такими амплитудами C_{α} , чтобы удовлетворилось граничное условие свободной поверхности

$$\sigma_{ij} n_j |_{y=0} = 0. \quad (3)$$

Каждый член в выражении (1) вносит парциальный вклад в нормальную проекцию напряжения $\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}$ на границе. Следуя Стро [9], введем для этого вклада обозначение

$$\sigma_{ij}^{\alpha} n_j |_{y=0} \equiv -ik C_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \exp [ik(x - vt)]. \quad (4)$$

В этих терминах граничное условие (3) принимает вид

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = 0. \quad (5)$$

2.2. Шестимерный формализм Стро

Объединим неизвестные векторы \mathbf{A}_{α} и \mathbf{L}_{α} в один 6-мерный вектор

$$\boldsymbol{\xi}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\alpha} \\ \mathbf{L}_{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В рамках формализма Стро [9] векторы $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ (6) и скалярные параметры p_{α} в (1) находятся как собственные векторы и собственные значения 6×6 -матрицы

$$\hat{N} = - \begin{pmatrix} (nn)^{-1}(nm) & (nn)^{-1} \\ (mn)(nn)^{-1}(nm) - (mm) - \rho v^2 \hat{I} & (mn)(nn)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь \hat{I} — единичная 3×3 -матрица, а матрицы (ab) заданы компонентами $(ab)_{jk} = a_i c_{ijkl} b_l$.

Собственные векторы $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, 6$) обладают свойствами ортогональности и полноты,

$$\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \hat{T} \boldsymbol{\xi}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

$$\sum_{\alpha=1}^6 \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \otimes \hat{T} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} = \hat{I}_6, \quad (9)$$

где \otimes — знак диадного произведения, \hat{I}_6 и \hat{T} — 6×6 -матрицы,

$$\hat{I}_6 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

и $\hat{0}$ — нулевая 3×3 -матрица.

С учетом соотношений (6) и (10) условие ортогональности (8) приобретает вид

$$\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{L}_{\beta} + \mathbf{L}_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \quad (11)$$

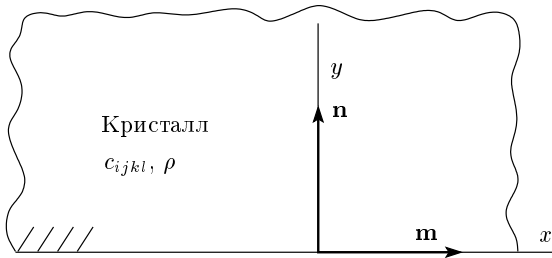


Рис. 2. Полубесконечная анизотропная среда в сечении сагиттальной плоскостью $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$

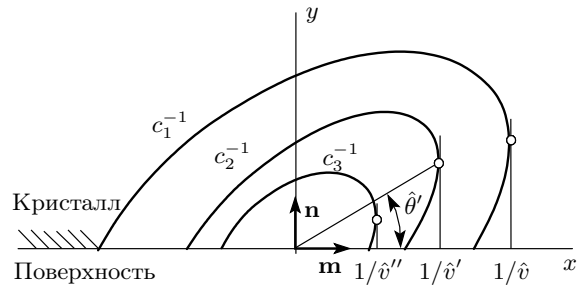


Рис. 3. Сечение полостей поверхности медленности сагиттальной плоскостью $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$

с вытекающей отсюда нормировкой

$$2\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{L}_\alpha = 1. \quad (12)$$

А условие полноты (9) в этих терминах распадается на три уравнения:

$$\sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{A}_\alpha = \hat{0}, \quad \sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{L}_\alpha \otimes \mathbf{L}_\alpha = \hat{0}, \quad (13)$$

$$\sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{L}_\alpha = \hat{I}.$$

Конечно, вектор \mathbf{L}_α не является независимым и связан с вектором поляризации \mathbf{A}_α соотношением

$$\mathbf{L}_\alpha = -[(nm) + p_\alpha(nn)] \mathbf{A}_\alpha. \quad (14)$$

2.3. Волновые параметры в различных интервалах приведенной скорости v

Собственные векторы ξ_α и собственные значения p_α вещественной матрицы Стро \hat{N} (7) в зависимости от величины приведенной фазовой скорости v должны быть либо вещественными, либо попарно комплексно-сопряженными. Проследим изменение этих параметров с ростом скорости v по отношению к ключевым интервалам, связанным с сечением поверхности медленности сагиттальной плоскостью $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$. Эта поверхность, схематически показанная на рис. 3, имеет три полости в соответствии с тем, что в любом направлении безграничного кристалла могут распространяться три независимые объемные волны со скоростями c_1, c_2 и c_3 . Каждая точка поверхности удалена от центра на расстояние c_i^{-1} ($i = 1, 2, 3$). Нормаль к полости в такой точке задает направление потока энергии в соответствующей объемной волне.

В «дозвуковом» (subsonic) диапазоне скоростей $0 < v < \hat{v}$, где \hat{v} — так называемая предельная ско-

рость (limiting velocity) для данной волновой геометрии $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ (см. рис. 3), имеются три пары комплексно-сопряженных параметров:

$$\xi_{\alpha+3} = \xi_\alpha^*, \quad p_{\alpha+3} = p_\alpha^*, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Далее номера выбираются так, чтобы при $\alpha = 1, 2, 3$ было либо $\text{Im} p_\alpha > 0$, либо $p_\alpha > 0$.

В данном интервале волновая суперпозиция (1) может представлять только неоднородные (локализованные) волны. Из нее должны быть исключены нефизические компоненты, экспоненциально нарастающие в глубину кристалла, т. е. следует положить $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ и суммировать в (1) по α от 1 до 3. Именно к этой области скоростей относятся теоремы Барнетта–Лоте [5] о существовании и единственности решений для поверхностных волн.

При $v = \hat{v}$ мнимые добавки в одной из сопряженных пар обращаются в нуль. Возникает так называемое неполупростое (nonsemisimple) вырождение:

$$\xi_1 = \xi_4 = \hat{\xi} \equiv \left(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{L}} \right)^T, \quad p_1 = p_4 = \hat{p}, \quad (16)$$

где T — знак транспонирования. Соответствующая предельная волна имеет вектор потока энергии $\hat{\mathbf{P}}$, параллельный поверхности, и, в принципе, может быть особой объемной, если только отвечающая ей сила на границе окажется нулевой, $\hat{\mathbf{L}} = 0$. Это возможно лишь при специальном подборе геометрии распространения.

В первом «межзвуковом» (intersonic) интервале $\hat{v} < v < \hat{v}'$ вырождение снимается, а пары $\xi_1 \neq \xi_4$ и $p_1 \neq p_4$ остаются вещественными. В этом интервале при любой скорости v существует четырехпарциальная волновая суперпозиция (1), описывающая отражение, которое включает две объемные компоненты ($\alpha = 1, 4$), соответственно отраженную и падающую, а также две локализованные парциальные волны ($\alpha = 2, 3$). В данном случае выбор скорости

эквивалентен выбору угла падения. На некоторых срезах при определенной скорости может реализоваться коллинеарность $\mathbf{L}_2 \parallel \mathbf{L}_3$, которая обеспечивает существование дупарциальной ($\alpha = 2, 3$) сверхзвуковой поверхностной волны [10]. При этом обязательно коллинеарны и два других вектора нашей суперпозиции: $\mathbf{L}_1 \parallel \mathbf{L}_4$. Это значит, что такой дупарциальной волне всегда сопутствует чистое отражение (simple reflection), но не наоборот [11].

В следующей предельной точке $v = \hat{v}'$ формируется очередное переходное (transonic) состояние, где возникает новое вырождение собственных векторов и собственных значений:

$$\begin{aligned} \xi_2 = \xi_4 = \hat{\xi}' &\equiv (\hat{\mathbf{A}}', \hat{\mathbf{L}}')^T, \\ p_2 = p_5 = \hat{p}' &= \text{tg } \hat{\theta}'. \end{aligned} \quad (17)$$

Когда данная предельная волна удовлетворяет условию свободной поверхности ($\hat{\mathbf{L}}' = 0$), т. е. является особой объемной волной, при той же скорости \hat{v}' независимо реализуется трехпарциальное отражение ($\alpha = 1, 3, 4$). При возмущении геометрии эти два решения объединяются в резонансную суперпозицию, которая ниже будет детально исследоваться.

С переходом в следующий скоростной интервал, $\hat{v}' < v < \hat{v}''$, уже четыре пары собственных векторов ξ_α и собственных значений p_α становятся вещественными и, вообще говоря, невырожденными: ξ_1, p_1 ; ξ_2, p_2 ; ξ_4, p_4 ; ξ_5, p_5 . Только две пары остаются комплексно-сопряженными: $\xi_6 = \xi_3^*$, $p_6 = p_3^*$. Здесь могут быть построены два четырехпарциальных отражения с разным выбором падающей волны ($\alpha = 4$ или $\alpha = 5$), к которой добавляются две отраженные волны ($\alpha = 1, 2$) и одна локализованная ($\alpha = 3$).

С переходом через последнюю точку вырождения $v = \hat{v}''$ мы попадаем в последний интервал, где все собственные векторы и собственные значения вещественны. Здесь возможны три суперпозиции четырехпарциального отражения с разным выбором падающей волны ($\alpha = 4, 5, 6$), но с одним и тем же набором трех отраженных компонент: $\alpha = 1, 2, 3$.

3. ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО ОТРАЖЕНИЯ

3.1. Особая объемная волна и независимое отражение

Будем предполагать, что на рассматриваемой поверхности с нормалью \mathbf{n} есть такое направление $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, вдоль которого предельная волна на поверхности (c_2^{-1}) при $v = \hat{v}'_0$ является особой объемной, т. е.

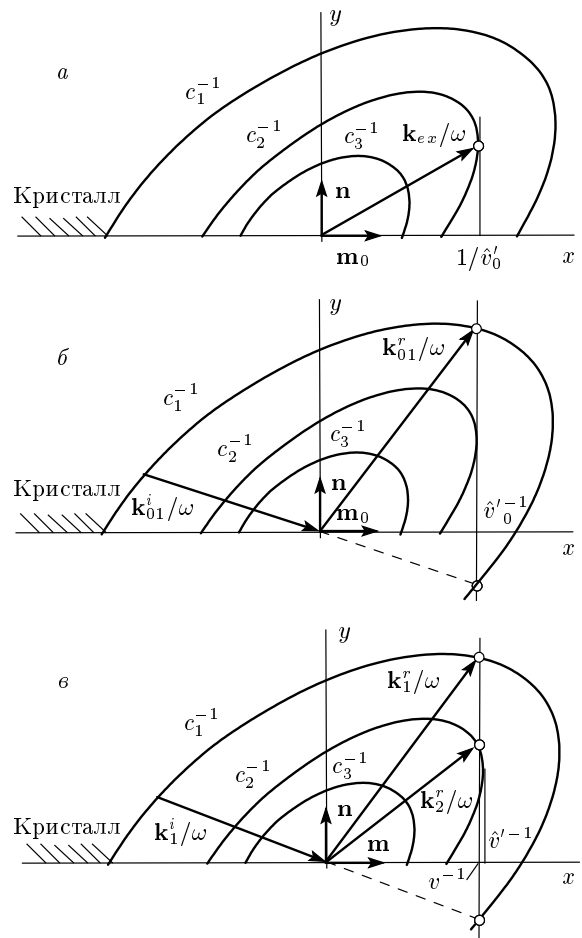


Рис. 4. Конфигурации волновых векторов объемных парциальных волн: *a* — особая объемная волна; *b* — отражение в невозмущенной конфигурации; *в* — резонансное отражение при малом повороте сакгитальной плоскости

удовлетворяет условию свободной границы $\hat{\mathbf{L}}'_0 = 0$ (рис. 4*a*). Поле смещений в такой волне имеет вид

$$\mathbf{u}_{ex}(\mathbf{r}, t) = C \hat{\mathbf{A}}'_0 \exp \{ ik [(\mathbf{m}_0 + \hat{p}'_0 \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r} - \hat{v}'_0 t] \}. \quad (18)$$

Здесь и далее индексом «0» отмечаем величины, относящиеся к невозмущенной геометрии.

При той же скорости \hat{v}'_0 существует независимое трехпарциальное отражение,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = [C_i \mathbf{A}_1^i \exp(ikp_1^i y) + C_r \mathbf{A}_1^r \exp(ikp_1^r y) + C_l \mathbf{A}_3^l \exp(ikp_3^l y)] \exp \{ ik(x - \hat{v}'_0 t) \}, \quad (19)$$

включающее падающую (*i*) и отраженную (*r*) волны с внешней полости (c_1^{-1}) поверхности медленности (рис. 4*b*), а также сопутствующую локализованную (*l*) компоненту с внутренней полости (c_3^{-1}). Послед-

няя компонента имеет комплексный волновой вектор, который на рис. 4б изображен быть не может.

Напомним, что в точках контакта вертикальной прямой с поверхностью медленности типа \hat{v}'^{-1} (см. рис. 3), в том числе и при $v = \hat{v}'_0$, мы имеем дело с волновыми решениями в условиях неполупростого вырождения матрицы Стро \hat{N} (7), когда система ее собственных векторов ξ_α утрачивает полноту из-за слияния (17). В этом случае фундаментальные свойства (8), (9), (11)–(13) должны быть модифицированы [12]. Во-первых, вырожденную систему $\xi_1, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \hat{\xi}'$ следует дополнить независимым вектором, который строится из векторов, испытывающих вырождение. В качестве такого вектора удобно выбрать

$$\xi_g = (\partial \xi_2 / \partial p)_{v=\hat{v}'}. \quad (20)$$

В отличие от вырожденного значения $\hat{\xi}'$, остающегося собственным вектором матрицы \hat{N} , новый вектор ξ_g таковым не является [12]:

$$\hat{N} \hat{\xi}' = \hat{p}' \hat{\xi}', \quad \hat{N} \xi_g = \hat{p}' \xi_g + \hat{\xi}'. \quad (21)$$

Еще более важно подчеркнуть, что присоединенный вектор ξ_g не задает дополнительной парциальной волны, поскольку произведение $\mathbf{A}_g \exp[ik(x + \hat{p}'y - \hat{v}'t)]$, вообще говоря, не удовлетворяет волновому уравнению (2).

Свойство ортогональности (8) сохраняется для всех невырожденных векторов $\xi_1, \xi_3, \xi_4, \xi_6$ как между собой, так и по отношению к $\hat{\xi}'$ и ξ_g . Для последней пары условия ортогональности и нормировки выглядят иначе:

$$\hat{\xi}' \cdot \hat{T} \hat{\xi}' = 0, \quad \xi_g \cdot \hat{T} \xi_g = 0, \quad \hat{\xi}' \cdot \hat{T} \xi_g = 1, \quad (22)$$

или в трехмерном представлении:

$$\hat{\mathbf{A}}' \cdot \hat{\mathbf{L}}' = 0, \quad \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{L}_g = 0, \quad \hat{\mathbf{A}}' \cdot \mathbf{L}_g + \hat{\mathbf{L}}' \cdot \mathbf{A}_g = 1. \quad (23)$$

Замена нормировки (12) на (23) устраняет расходимость вектора поляризации $\hat{\mathbf{A}}'_0$ в (18), которая неизбежно возникла бы в случае $\hat{\mathbf{L}}' \rightarrow 0$ при условии (12).

В этих терминах при малом отклонении Δv от точки \hat{v}' вырождающиеся пары собственных векторов и собственных значений удобно представить в виде [13]

$$\begin{aligned} \xi_{2,5}(v) &= \hat{\xi}' \pm \xi_g \delta p(v) + O(\Delta v), \\ p_{2,5}(v) &= \hat{p}' \pm \delta p(v) + O(\Delta v). \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом (23), легко проверить, что представлениям (24) соответствует нормировка

$$\xi_{2,5} \cdot \hat{T} \xi_{2,5} = \pm 2\delta p. \quad (25)$$

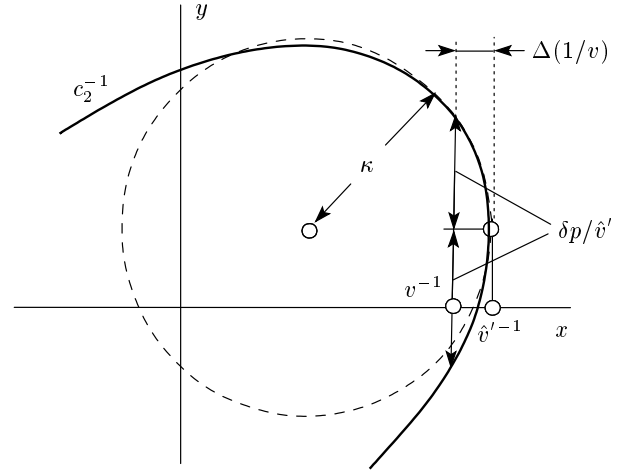


Рис. 5. Связь между приращением медленности $\Delta(1/v)$ и изменением параметра $\delta p/\hat{v}'$

Как видно из рис. 5, связь между малыми параметрами δp и Δv имеет вид [14]

$$\delta p = \sqrt{2\kappa \Delta v}, \quad (26)$$

где κ — радиус кривизны сечения поверхности медленности плоскостью $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ в точке на промежуточной полости, отвечающей $v = \hat{v}'$.

Условие полноты при $v = \hat{v}'$ принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_1 \otimes \hat{T} \xi_1 + \xi_3 \otimes \hat{T} \xi_3 + \xi_4 \otimes \hat{T} \xi_4 + \\ + \xi_6 \otimes \hat{T} \xi_6 + \hat{\xi}' \otimes \hat{T} \xi_g + \xi_g \otimes \hat{T} \hat{\xi}' = \hat{I}_6. \end{aligned} \quad (27)$$

В частности, отсюда вытекает соотношение для 3×3 -диад:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_3 \otimes \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4 \otimes \mathbf{L}_4 + \\ + \mathbf{L}_6 \otimes \mathbf{L}_6 + \hat{\mathbf{L}}' \otimes \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_g \otimes \hat{\mathbf{L}}' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Пользуясь этим тождеством, нетрудно найти скалярные коэффициенты C_α уравнения

$$C_4 \mathbf{L}_4 + C_1 \mathbf{L}_1 + C_3 \mathbf{L}_3 + C_g \mathbf{L}_g = 0. \quad (29)$$

Умножим скалярно соотношение (28) на векторное произведение $\mathbf{L}_6 \times \mathbf{L}_g$. Это дает решение уравнения (29) в виде следующих смешанных произведений векторов:

$$\begin{aligned} C_4 = C[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_6 \mathbf{L}_g], \quad C_1 = C[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_6 \mathbf{L}_g], \\ C_3 = C[\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_6 \mathbf{L}_g], \quad C_g = C[\hat{\mathbf{L}}' \mathbf{L}_6 \mathbf{L}_g]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь следует подчеркнуть, что уравнение (29), несмотря на его формальное сходство с (5), не явля-

ется граничным условием для волновой суперпозиции, поскольку последний член в левой части уравнения (29) не связан с парциальной волной, удовлетворяющей уравнению (2). Тем не менее уравнения (29), (30) весьма полезны для нас. При $\dot{\mathbf{L}}' \rightarrow 0$ амплитуда C_g в (29) и (30) обращается в нуль, а первые три амплитуды определяют волновое поле независимого отражения (19) при

$$\begin{aligned} C_i &= C[\mathbf{L}_4^0 \mathbf{L}_6^0 \mathbf{L}_g^0], & \mathbf{A}_1^i &= \mathbf{A}_4^0, & p_1^i &= p_4^0, \\ C_r &= C[\mathbf{L}_1^0 \mathbf{L}_6^0 \mathbf{L}_g^0], & \mathbf{A}_1^r &= \mathbf{A}_1^0, & p_1^r &= p_1^0, \\ C_l &= C[\mathbf{L}_3^0 \mathbf{L}_6^0 \mathbf{L}_g^0], & \mathbf{A}_3^r &= \mathbf{A}_3^0, & p_3^l &= p_3^0. \end{aligned} \quad (31)$$

В пределе $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_0$ векторы $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$ автоматически становятся компланарными:

$$[\mathbf{L}_1^0 \mathbf{L}_3^0 \mathbf{L}_4^0] = 0. \quad (32)$$

3.2. Коэффициенты отражения при возмущенной геометрии распространения

Рассмотрим теперь слабое возмущение исходной геометрии, при которой поверхность не меняется, а сагиттальная плоскость поворачивается вокруг нормали \mathbf{n} к границе на малый угол $\varphi = \angle(\mathbf{m}, \mathbf{m}_0)$ относительно исходной ориентации. В новом положении сагиттальной плоскости $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$, предельная волна при $v = \hat{v}'$ более не удовлетворяет граничному условию свободной поверхности, т. е. не является особой объемной ($\dot{\mathbf{L}}' \neq 0$), хотя отвечающий ей вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}}'$ по-прежнему параллелен поверхности.

Нас будет интересовать задача отражения при скорости v , слегка отличающейся (в сторону увеличения) от предельного значения: $v = \hat{v}' + \Delta v$ (рис. 4в). В интервале скоростей $\hat{v}' < v < \hat{v}^n$ (см. рис. 3) имеются два комплексно-сопряженных параметра p_α : физический — p_3 ($\text{Im } p_3 > 0$) и нефизический — $p_6 = p_3^*$, а также четыре вещественных параметра, которые описывают отраженные (p_1, p_2) и падающие (p_4, p_5) волны. Из суперпозиции парциальных волн должны быть исключены нефизическая волна 6 и одна из падающих волн: мы выбираем волну 5, близкую к вырождению. Таким образом, остаются следующие парциальные волны: падающая (4), две отраженных (1 и 2), а также локализованная волна (3). Соответственно, граничное условие свободной поверхности принимает вид

$$C_i \mathbf{L}_4 + C_{r1} \mathbf{L}_1 + C_{r2} \mathbf{L}_2 + C_l \mathbf{L}_3 = 0. \quad (33)$$

Амплитуда C_i считается известной, а остальные выражаются через нее скалярным умножением уравне-

ния (33) на векторные произведения $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_3$ или $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$:

$$\begin{aligned} C_{r1} &= -C_i \frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}, & C_{r2} &= C_i \frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}, \\ C_l &= -C_i \frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь удобно перейти от стандартной нормировки формализма Стро [9, 12, 13], заданной соотношениями (12), (23), (25), к более традиционному универсальному условию

$$\mathbf{A}_\alpha^2 = 1, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad (35)$$

позволяющему записывать коэффициенты отражения просто как отношения амплитуд C_α (34) к амплитуде падающей волны C_i : $R_\alpha = C_\alpha / C_i$.

В выражениях (34) ключевым параметром является вектор \mathbf{L}_2 , поскольку он мал по модулю, будучи возмущением величины $\dot{\mathbf{L}}'_0 = 0$. В амплитудах C_{r1} и C_l этот малый параметр присутствует как в числителе, так и в знаменателе. Поэтому соответствующие этим амплитудам коэффициенты отражения

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{C_{r1}}{C_i} = -\frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}, \\ R_l &= \frac{C_l}{C_i} = -\frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]} \end{aligned} \quad (36)$$

фактически не имеют сингулярности.

Амплитуда C_{r2} и отвечающий ей коэффициент отражения

$$R_2 = \frac{[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]}, \quad (37)$$

в отличие от других, содержат \mathbf{L}_2 только в знаменателе. При этом, однако, и числитель в (37) мал, ибо в соответствии с (32) в невозмущенной геометрии он строго равен нулю. Но эта малость, конечно, не «сокращается» при делении. Таким образом, как и ожидалось, компонента отражения R_2 должна вести себя сингулярным образом.

Ниже мы сосредоточимся на анализе коэффициентов отражения объемных волн, R_1 и R_2 .

3.3. Коэффициенты отражения R_1 и R_2 как функции параметров возмущения

Числитель выражения (37) для R_2 с учетом (32) можно приближенно представить в виде

$$[\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3] \approx \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} [\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3] \right)_0, \quad (38)$$

где индекс «0» при смешанном произведении векторов означает, как и раньше, невозмущенное состояние $\varphi = 0$, $\Delta v = 0$.

Для вычисления знаменателя в выражениях для коэффициентов отражения R_1 (36) и R_2 (37) разложим по отдельности два сомножителя:

$$\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1 \approx \mathbf{L}_3^0 \times \mathbf{L}_1^0 + \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} [\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1] \right)_0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 &= \hat{\mathbf{L}}'(\varphi) + \mathbf{L}_g \delta p + O(\delta p^2) \approx \\ &\approx \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right)_0 \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi^2} \right)_0 \varphi^2 + \mathbf{L}_g \delta p. \end{aligned} \quad (40)$$

При написании (40) мы воспользовались формулой (24), а также тем, что по условию $\hat{\mathbf{L}}'_0 = 0$. Подставляя выражения (39), (40) в знаменатели отношений (36) и (37), нетрудно убедиться, что член, линейный по φ , из результата выпадает. Этот член пропорционален смешанному произведению, которое равно нулю:

$$\left[\mathbf{L}_3^0 \mathbf{L}_1^0 \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right)_0 \right] = 0, \quad (41)$$

поскольку, как мы увидим, составлено из компланарных векторов. Докажем, что все они перпендикулярны одному и тому же вещественному вектору $\hat{\mathbf{A}}'_0$. Из условия ортогональности (11) имеем для первых двух векторов ($\alpha = 1, 3$)

$$\mathbf{L}_\alpha^0 \cdot \hat{\mathbf{A}}'_0 + \mathbf{A}_\alpha^0 \cdot \hat{\mathbf{L}}'_0 = \mathbf{L}_\alpha^0 \cdot \hat{\mathbf{A}}'_0 = 0, \quad (42)$$

где мы вновь воспользовались тем, что $\hat{\mathbf{L}}'_0 = 0$. Из того же условия (11) следует, что свойство (42) справедливо также для $\alpha = 4, 6$.

Для доказательства того, что и производная по φ в (41) ортогональна вектору $\hat{\mathbf{A}}'_0$, продифференцируем тождество (23), $\hat{\mathbf{A}}'(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{L}}'(\varphi) = 0$, а затем положим $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} [\hat{\mathbf{A}}'(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{L}}'(\varphi)] \right\}_0 = \\ &= \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}'}{\partial \varphi} \cdot \hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{A}}' \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right\}_0 = \hat{\mathbf{A}}'_0 \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right)_0. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя в знаменатели коэффициентов отражения (36), (37) разложения (39), (40), с учетом (41) получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3] &\approx \\ &\approx \left\{ [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_g \mathbf{L}_3]_0 \delta p + \varphi^2 \left(\left[\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial (\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1)}{\partial \varphi} \right]_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\mathbf{L}_1 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi^2} \mathbf{L}_3 \right]_0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Совершенно аналогично числитель коэффициента отражения R_1 (36) равен

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3] &\approx \\ &\approx \left\{ [\mathbf{L}_4 \mathbf{L}_g \mathbf{L}_3]_0 \delta p + \varphi^2 \left(\left[\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial (\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_4)}{\partial \varphi} \right]_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\mathbf{L}_4 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi^2} \mathbf{L}_3 \right]_0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, найденные выражения (38), (44) и (45) приводят нас к искомой структуре зависимостей коэффициентов отражения от φ и δp :

$$R_1 \approx -\frac{F_4 \delta p + G_4 \varphi^2}{F_1 \delta p + G_1 \varphi^2}, \quad R_2 \approx -\frac{H \varphi}{F_1 \delta p + G_1 \varphi^2}. \quad (46)$$

Здесь введены параметры

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_4 \mathbf{L}_3] \right)_0, \quad F_\alpha = [\mathbf{L}_\alpha \mathbf{L}_g \mathbf{L}_3]_0, \\ G_\alpha &= \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial (\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_\alpha)}{\partial \varphi} \right]_0 + \frac{1}{2} \left[\mathbf{L}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi^2} \mathbf{L}_3 \right]_0, \end{aligned} \quad (47)$$

которые комплексны из-за комплексности входящего в них вектора \mathbf{L}_3 .

3.4. Коэффициенты возбуждения резонанса и принципы их оптимизации

По своему физическому смыслу квадраты модулей коэффициентов отражения, $|R_1|^2$ и $|R_2|^2$, дают отношения плотностей энергии в соответствующих отраженных волнах к плотности энергии в падающей волне. Представляется более точным характеризовать исследуемый резонанс отношениями не плотностей энергии, а интенсивностей (длин векторов Пойнтинга) соответствующих волн. Для этого надо домножить упомянутые величины $|R_{1,2}|^2$ на отношения $s_{1,2}/s_4$, где s_α — длины векторов лучевых скоростей \mathbf{s}_α , которые определяются соотношением [15]

$$\mathbf{s}_\alpha = \frac{(A_\alpha A_\alpha)(\mathbf{m} + p_\alpha \mathbf{n})}{\rho v}. \quad (48)$$

Здесь $(A_\alpha A_\alpha)$ — тензор второго ранга, определенный сверткой тензора упругих модулей \hat{c} с двумя векторами \mathbf{A}_α : $(A_\alpha A_\alpha)_{jk} = A_{\alpha i} c_{ijkl} A_{\alpha l}$ (см. аналогичные 3×3 -блоки в матрице \hat{N} (7)). Ниже будем называть определенные таким образом характеристики

$$K_1 = |R_1|^2 s_1/s_4, \quad K_2 = |R_2|^2 s_2/s_4 \quad (49)$$

коэффициентами возбуждения соответствующих волн.

Для удобства и компактности последующих вычислений введем новые безразмерные параметры порядка единицы:

$$\frac{H}{G_1} = \mu, \quad \frac{F_\alpha}{G_\alpha} = \lambda_\alpha = \lambda'_\alpha + i\lambda''_\alpha, \quad \alpha = 1, 4. \quad (50)$$

В этих обозначениях

$$K_1 = \left| \frac{G_4}{G_1} \right|^2 \frac{s_1}{s_4} \frac{(\lambda'_4 \delta p + \varphi^2)^2 + (\lambda''_4 \delta p)^2}{(\lambda'_1 \delta p + \varphi^2)^2 + (\lambda''_1 \delta p)^2}, \quad (51)$$

$$K_2 = \frac{|\mu|^2 (s_2/s_4) \varphi^2}{(\lambda'_1 \delta p + \varphi^2)^2 + (\lambda''_1 \delta p)^2}. \quad (52)$$

В принятом нулевом приближении здесь лучевые скорости s_α и параметры δp должны вычисляться в невозмущенной геометрии и от угла φ не зависят. Как видно из (52), для фиксированного δp , т. е. при $\Delta v = \text{const}$, функция $K_2(\varphi^2)$ образует пик. При $\varphi^2 \ll \delta p$ имеет место линейный по аргументу рост, $K_2 \propto \varphi^2/\delta p^2$ (с крутым наклоном из-за малой величины δp^2 в знаменателе). При $\delta p \ll \varphi^2 \ll 1$ резкий рост сменяется плавным убыванием, $K_2 \propto \varphi^{-2}$. Максимум достигается при

$$\varphi_{max}^2 = |\lambda_1| \delta p. \quad (53)$$

При этом высота пика обратно пропорциональна малому параметру δp :

$$K_2^{max} = K_2(\varphi_{max}^2) = \frac{k}{\delta p}, \quad k = \frac{|\mu|^2 s_2/s_4}{2(\lambda'_1 + |\lambda_1|)}. \quad (54)$$

Его полуширина линейна по δp :

$$\Delta(\varphi^2)_{1/2} = 2\delta p \sqrt{(\lambda'_1 + |\lambda_1|)(\lambda'_1 + 3|\lambda_1|)}. \quad (55)$$

Таким образом, при формальном стремлении $\Delta v \rightarrow 0$ высота пика (52) неограниченно нарастает, а его ширина стремится к нулю. Разумеется, на практике бесконечный резонанс реализоваться не может хотя бы потому, что он должен быть одновременно и бесконечно узким по углам падения. При переходе от плоских волн к реальным акустическим пучкам с конечной расходимостью (как минимум дифракционной) обсуждавшаяся выше ширина пика возбуждения плоской волны 2 приобретает физическое ограничение снизу. Как только она становится меньше, чем расходимость пучка, часть волнового пакета выходит из резонанса, и тем большая часть, чем меньше ширина резонанса. Это значит, что выбирать совсем малые углы φ бессмысленно. Ниже

мы вернемся к более подробному анализу физических ограничений на достижимую величину эффекта и обсудим способы его оптимизации.

Как видно из выражения (51), с коэффициентом возбуждения K_1 ничего похожего не происходит. Впрочем, мы и не ожидали в этом случае сингулярных особенностей. На самом деле, отражение $4 \rightarrow 1$, описываемое коэффициентом отражения R_1 (36) и сопутствующее резонансу, является паразитным эффектом. Волна 1 задает поток утечки, отводящий часть энергии из падающей волны 4 по нерезонансному каналу и ослабляющий возбуждаемую волну 2. Поэтому мы заинтересованы в подборе кристаллов с таким сочетанием материальных параметров, чтобы величина K_1 в области резонанса K_2 оказалась аномально малой, т. е. при отражении реализовалась ситуация, близкая к конверсии. В этом случае почти вся энергия из падающего пучка попадет в узкий отраженный пучок парциальной волны 2. Количественный критерий такого подбора дается условием $K_1(\varphi_{max}^2) \ll 1$. Комбинируя выражения (51), (53), нетрудно видеть, что это неравенство эквивалентно двум независимым условиям для упругих модулей:

$$(\lambda'_4 + |\lambda_1|)^2 \ll 1, \quad \lambda''_4{}^2 \ll 1.$$

Это выглядит трудновыполнимым. Тем не менее, как мы увидим, такие кристаллы реально существуют благодаря комбинированному влиянию элементов симметрии и анизотропии.

4. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

4.1. Моноклинные симметрии

До сих пор мы рассматривали общий случай произвольной анизотропии. Предположим теперь, что сагиттальная плоскость исходного положения $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{n}\}$ является в данном кристалле плоскостью симметрии S . При этом вектор поляризации $\hat{\mathbf{A}}'_0$ особой объемной волны должен быть ортогональным плоскости S , совпадающей с плоскостью xy (хорошо известная SH-волна), или принадлежать ей. В последнем случае поляризация может быть только продольной (вектор $\hat{\mathbf{A}}'_0$ параллелен оси x), поскольку, как уже говорилось, волна, удовлетворяющая условию свободной границы $\hat{\mathbf{L}}'_0 = 0$, всегда поляризована в плоскости поверхности [6, 7]. Ситуация продольной особой объемной волны, принадлежащей средней полости поверхности медленности, хотя и не имеет термодинамического запрета, но обычно не реализуется в кристаллах (авторам таковые неизвестны).

Далее мы будем игнорировать такую возможность, предполагая, что

$$\hat{\mathbf{A}}'_0 \parallel \mathbf{e}_z, \quad (56)$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z .

Вектор \mathbf{L}_g^0 по тем же причинам тоже либо принадлежит плоскости S , либо ортогонален ей. Первая возможность исключается тем, что в соответствии с (23) $\hat{\mathbf{A}}'_0 \cdot \mathbf{L}_g^0 = 1$. Поэтому

$$\mathbf{L}_g^0 \parallel \hat{\mathbf{A}}'_0 \parallel \mathbf{e}_z. \quad (57)$$

Мы уже доказали выше, что векторы $\mathbf{L}_1^0, \mathbf{L}_3^0, \mathbf{L}_4^0$ и $(\partial \hat{\mathbf{L}}'/\partial \varphi)_0$ ортогональны вектору $\hat{\mathbf{A}}'_0$. Значит, они все принадлежат плоскости симметрии S , т. е.

$$L_{1z}^0 = L_{3z}^0 = L_{4z}^0 = (\partial \hat{L}'_z/\partial \varphi)_0 = 0. \quad (58)$$

При отклонении сагиттальной плоскости от симметричной ориентации на угол φ влияние плоскости S на волновые параметры продолжает сказываться. В частности, возмущенные векторы \mathbf{L}_α ($\alpha = 1, 3, 4$) приобретают структуру

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{pmatrix} L_{\alpha x}^0 + O(\varphi^2) \\ L_{\alpha y}^0 + O(\varphi^2) \\ (\partial L_{\alpha z}/\partial \varphi)_0 \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_\alpha^0 = \begin{pmatrix} L_{\alpha x}^0 \\ L_{\alpha y}^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Их производные в невозмущенной позиции имеют только одну ненулевую компоненту:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_\alpha}{\partial \varphi} \right)_0 = \left(0, 0, \left(\frac{\partial L_{\alpha z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right)^T. \quad (60)$$

При этом в соответствии с (58) производная $(\partial \hat{\mathbf{L}}'/\partial \varphi)_0$ имеет другую структуру:

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right)_0 = \left(\left(\frac{\partial \hat{L}'_x}{\partial \varphi} \right)_0, \left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0, 0 \right)^T. \quad (61)$$

Плоскость симметрии навязывает векторам \mathbf{L}_α и более «деликатные» свойства. Например, если трехмерная сила $\mathbf{L}_\alpha(\varphi)$ является блоком собственного вектора $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ (6) матрицы Стро, то и вектор $\mathbf{L}_\alpha(-\varphi)$ должен обладать этим свойством. Но собственных векторов всего шесть. Поэтому вектор $\mathbf{L}_\alpha(-\varphi)$ должен быть одним из них. При правиле нумерации (14) это дает

$$\mathbf{L}_\alpha(-\varphi) = \pm \mathbf{L}_{\alpha+3}(\varphi), \quad (62)$$

где мы учли, что векторы сил \mathbf{L}_α , как и векторы поляризации \mathbf{A}_α , определены с точностью до знака. При $\alpha = 2$ удобно выбрать в (62) нижний знак.

Тогда, учитывая тождественную связь $\mathbf{L}_5(\delta p) = \mathbf{L}_2(-\delta p)$, вытекающую из (24), имеем

$$\mathbf{L}_2(-\varphi, \delta p) = -\mathbf{L}_5(\varphi, \delta p) = -\mathbf{L}_2(\varphi, -\delta p). \quad (63)$$

Подстановка сюда выражения (40) дает

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi^2} \right)_0 = 0, \quad (64)$$

что упрощает последнюю из формул (47).

Из приведенного рассуждения также вытекает следующая симметрия векторных функций:

$$\hat{\mathbf{L}}'(-\varphi) = -\hat{\mathbf{L}}'(\varphi), \quad \mathbf{L}_g(-\varphi) = \mathbf{L}_g(\varphi), \quad (65)$$

причем вектор $\hat{\mathbf{L}}'$ принадлежит плоскости S , а вектор \mathbf{L}_g ортогонален ей. Таким образом, вырожденный вектор $\hat{\mathbf{L}}'(\varphi) = \mathbf{L}_{2,5}(\delta p = 0)$ (24) в возмущенной позиции $\varphi \neq 0$ не имеет компоненты вдоль z :

$$\hat{L}'_z(\varphi) = 0. \quad (66)$$

4.2. Ромбическая симметрия

Пусть теперь и невозмущенная сагиттальная плоскость xy , и поверхность xz кристалла будут плоскостями симметрии кристалла. Тогда автоматически и третья координатная плоскость yz тоже будет плоскостью симметрии. В таком кристалле шесть собственных векторов $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ должны «размножаться» элементами симметрии, впрочем, как и раньше, без увеличения их числа, т. е. превращаясь друг в друга. В частности, к вектору $\mathbf{L}_\alpha = [L_{\alpha x}, L_{\alpha y}, L_{\alpha z}]$ должен быть добавлен вектор

$$\mathbf{L}_{\alpha+3} = [L_{\alpha x}, -L_{\alpha y}, L_{\alpha z}] \quad (67)$$

или эквивалентный ему вектор

$$\mathbf{L}_{\alpha+3} = [-L_{\alpha x}, L_{\alpha y}, -L_{\alpha z}]. \quad (68)$$

При $\alpha = 1$ удобно выбрать первую калибровку (67). Тогда первая пара векторов сил, симметричных относительно поверхности, имеет вид

$$\mathbf{L}_1 = [L_{1x}, L_{1y}, L_{1z}], \quad \mathbf{L}_4 = [L_{1x}, -L_{1y}, L_{1z}]. \quad (69)$$

И, соответственно, с учетом (59) получаем

$$\mathbf{L}_1^0 = [L_{1x}^0, L_{1y}^0, 0], \quad \mathbf{L}_4^0 = [L_{1x}^0, -L_{1y}^0, 0]. \quad (70)$$

Заметим, что обсуждаемой симметрии векторов сил \mathbf{L}_α и $\mathbf{L}_{\alpha+3}$ должна сопутствовать симметрия волновых векторов падающих и отраженных волн (при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$). Это означает одновременную смену знаков соответствующих параметров $p_\alpha = k_{\alpha y}/k$. При $\alpha = 1$ это дает

$$p_4 = -p_1. \tag{71}$$

В действительности, симметрия (69) формально обеспечивается тем, что $L_{1y} \propto p_1$.

При $\alpha = 2$ аналогичное свойство сводится к требованию, чтобы

$$p_{2,5} = \pm \delta p. \tag{72}$$

В соответствии с (40), $\mathbf{L}_{2,5} = \hat{\mathbf{L}}' \pm \delta p \mathbf{L}_g$. С учетом доказанных выше свойств $\mathbf{L}_g \parallel \mathbf{e}_z$ и $\hat{L}'_z = 0$ отсюда видно, что два симметричных вектора имеют разные знаки своих z -компонент. Это значит, что в данном случае мы должны выбрать калибровку (68):

$$\mathbf{L}_2 = [L_{2x}, L_{2y}, L_{2z}], \quad \mathbf{L}_5 = [-L_{2x}, L_{2y}, -L_{2z}]. \tag{73}$$

Таким образом, дополнительная симметрия требует, чтобы не только компонента L_{2z} , но и L_{2x} были пропорциональны δp . Но тогда вектор $\hat{\mathbf{L}}'$, получаемый из пары $\mathbf{L}_{2,5}$ предельным переходом $\delta p \rightarrow 0$, должен иметь единственную ненулевую компоненту

$$\hat{\mathbf{L}}'(\varphi) = [0, \hat{L}'_y(\varphi), 0]. \tag{74}$$

Отсюда вместо (61) получаем

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi} \right)_0 = \left(0, \left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0, 0 \right)^T. \tag{75}$$

Для пары $\alpha = 3$ и $\alpha = 6$, когда параметры p_3 и p_6 являются комплексно-сопряженными (15), симметрия относительно поверхности требует, чтобы эти параметры были чисто мнимыми: $p_{3,6} = \pm iq$. Выбор калибровки векторов $\mathbf{L}_{3,6}$ в этом случае может

быть сделан, исходя из требования инвариантности величины F_1 (47), т.е. смешанного произведения $[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_g \mathbf{L}_3]$, при операции симметрии $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$. Учитывая, что $\mathbf{L}_g \parallel \mathbf{e}_z$, речь идет об инвариантности произведений $L_{1x} L_{3y}$ и $L_{1y} L_{3x}$. Поскольку, в соответствии с (70), при этой операции $L_{1x} \rightarrow L_{1x}$, $L_{1y} \rightarrow -L_{1y}$, одновременно должно быть $L_{3x} \rightarrow -L_{3x}$, $L_{3y} \rightarrow L_{3y}$. Это эквивалентно калибровке (68). Поэтому последняя симметричная пара сил имеет вид

$$\mathbf{L}_3 = [L_{3x}, L_{3y}, L_{3z}], \quad \mathbf{L}_6 = [-L_{3x}, L_{3y}, -L_{3z}]. \tag{76}$$

С учетом условия сопряженности векторов \mathbf{L}_3 и \mathbf{L}_6 (15) получаем

$$\mathbf{L}_3 = [il_{3x}, L_{3y}, il_{3z}], \tag{77}$$

где l_{3x} , L_{3y} и l_{3z} — вещественные параметры. Комбинируя формулы (77) и (60), получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial \varphi} \right)_0 = \left(0, 0, i \left(\frac{\partial l_{3z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right)^T. \tag{78}$$

Подставляя найденные формулы (59), (60), (64), (70), (75), (77), (78) в выражения (47), имеем

$$\begin{aligned} H &= -2iL_{1y}^0 \times \\ &\times \left[L_{1x}^0 \left(\frac{\partial l_{3z}}{\partial \varphi} \right)_0 - l_{3x}^0 \left(\frac{\partial L_{1z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right], \\ F_{1,4} &= iL_g^0 (\pm l_{3x}^0 L_{1y}^0 + iL_{1x}^0 L_{3y}^0), \\ G_1 = G_4 &= i \left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0 \times \\ &\times \left[L_{1x}^0 \left(\frac{\partial l_{3z}}{\partial \varphi} \right)_0 - l_{3x}^0 \left(\frac{\partial L_{1z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right]. \end{aligned} \tag{79}$$

С учетом (79) нетрудно найти ключевые параметры (50):

$$\begin{aligned} \mu &= -2L_{1y}^0 \left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0^{-1}, \quad \lambda_{1,4} = \pm \lambda' + i\lambda'', \\ \lambda' &= \frac{L_g^0 l_{3x}^0 L_{1y}^0}{\left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0 \left[L_{1x}^0 \left(\frac{\partial l_{3z}}{\partial \varphi} \right)_0 - l_{3x}^0 \left(\frac{\partial L_{1z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right]} = \lambda'_1 = -\lambda'_4, \\ \lambda'' &= \frac{L_g^0 L_{1x}^0 L_{3y}^0}{\left(\frac{\partial \hat{L}'_y}{\partial \varphi} \right)_0 \left[L_{1x}^0 \left(\frac{\partial l_{3z}}{\partial \varphi} \right)_0 - l_{3x}^0 \left(\frac{\partial L_{1z}}{\partial \varphi} \right)_0 \right]} = \lambda''_1 = \lambda''_4. \end{aligned} \tag{80}$$

В условиях ромбической симметрии угол падения α_i волны 4 и угол отражения α_r волны 1, как и ширины соответствующих пучков и лучевые скорости в них, равны друг другу. Поэтому отношение отраженного потока энергии в волне 1 к падающему потоку в волне 4 измеряется величиной $K_1 = |R_1|^2$. С учетом выражений (79), (80) формула (51) дает

$$K_1 = \frac{(\varphi^2 - \lambda'\delta p)^2 + (\lambda''\delta p)^2}{(\varphi^2 + \lambda'\delta p)^2 + (\lambda''\delta p)^2}. \quad (81)$$

Поскольку локализованная парциальная волна 3 не выходит за пределы пятна перекрытия объемных пучков 4, 1 и 2, вся остальная энергия, падающая на поверхность, стационарно отводится от нее волновым пучком 2. Это значит, что относительный поток энергии, попадающий в волну 2, определяется величиной

$$\eta = 1 - K_1 = \frac{4\lambda'\delta p\varphi^2}{(\varphi^2 + \lambda'\delta p)^2 + (\lambda''\delta p)^2}. \quad (82)$$

Но функция $\eta(\varphi^2)$ с точностью до множителя повторяет функцию $K_2(\varphi^2)$ (52), которая в данном случае принимает вид

$$K_2 = \frac{|\mu|^2(s_2/s_4)\varphi^2}{(\varphi^2 + \lambda'\delta p)^2 + (\lambda''\delta p)^2}. \quad (83)$$

Поэтому в рассматриваемом приближении условие $\varphi_{max}^2 = |\lambda_1|\delta p$ (53) геометрической оптимизации резонанса одновременно обеспечивает и максимально возможное попадание энергии в возбуждаемый пучок 2. Полуширина пика функции $\eta(\varphi^2)$ при этом дается той же формулой (55), что и для функции $K_2(\varphi^2)$, т. е. линейно увеличивается с ростом δp . А высота пика функции $\eta(\varphi^2)$ (82) в рассматриваемом приближении от δp не зависит:

$$\eta_{max} = 1 - K_1(\varphi_{max}^2) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (\lambda''/\lambda')^2}} < 1. \quad (84)$$

Соотношения $G_1 = G_4$ (79) и $\lambda'_1 = -\lambda'_4 = \lambda'$, $\lambda''_1 = \lambda''_4 = \lambda''$ (80), а также $s_1 = s_4$, возникающие благодаря ромбической симметрии, не только приводят выражение (51) к более компактному виду (81). Они значительно облегчают реализуемость близости кристалла к конверсии $K_1 = 0$, заменяя пару независимых условий одним неравенством. Действительно, стремление к конверсии означает приближение η_{max} к единице. Согласно (84), это условие реализуется при

$$(\lambda''/\lambda')^2 \ll 1, \quad (85)$$

что, в свою очередь, эквивалентно простому неравенству

$$(L^0_{1x}L^0_{3y}/l^0_{3x}L^0_{1y})^2 \ll 1. \quad (86)$$

4.3. Гексагональная симметрия

Рассмотрим теперь гексагональный кристалл с поверхностью xz , параллельной главной оси симметрии z , и сагиттальной плоскостью, совпадающей (до возмущения φ) с плоскостью xy поперечной изотропии (рис. 6). Для гексагонального кристалла в этой именно волновой геометрии собственные векторы $\xi_\alpha = (\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)^T$ (6) и собственные значения p_α матрицы Стро \hat{T} (7) уже были найдены ранее в явном виде как при малых углах φ возмущения [16], так и для произвольных φ [17]. Здесь мы приведем только значения параметров, фигурирующих в нашей теории:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,4} \\ \mathbf{L}_{1,4} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\Delta_{46}/c_{66}} \\ -1 \\ 0 \\ 2c_{66} - c_{44} \\ \pm 2\sqrt{c_{66}\Delta_{46}} \\ c_{44}\varphi \end{pmatrix}, \quad (87)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma\varphi \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ c_{44}\beta\varphi \\ -c_{44}p_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{L}_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{44}}} \begin{pmatrix} 1 \\ iq \\ \gamma\varphi \\ 2iqc_{66} \\ c_{44} - 2c_{66} \\ iq c_{44}\alpha\varphi \end{pmatrix},$$

где введены упругие модули c_{ij} в двухиндексной записи Фойгта, а также параметры

$$\begin{aligned} p_{01} &= \sqrt{\frac{\Delta_{46}}{c_{66}}}, \quad p_2 = \delta p, \quad q = \sqrt{\frac{\Delta_{14}}{c_{11}}}, \\ \Delta_{ij} &= c_{ii} - c_{jj}, \quad \alpha = \frac{c_{11} + c_{13}}{c_{11} - c_{44}}, \\ \beta &= 1 + \frac{d(c_{44} - 2c_{66})}{c_{44}\Delta_{14}}, \\ \gamma &= \frac{d}{\Delta_{14}}, \quad d = c_{44} + c_{13}. \end{aligned} \quad (88)$$

Здесь предполагается, что упругие модули удовлетворяют условиям $c_{66} < c_{44} < c_{11}$.

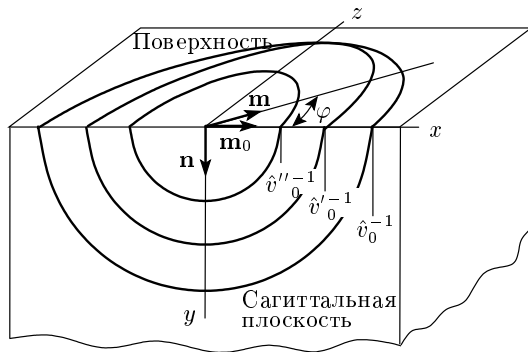


Рис. 6. Сечения поверхности медленности гексагонального кристалла плоскостью границы xz и невозмущенной сагиттальной плоскостью xy поперечной изотропии; ось z параллельна оси симметрии шестого порядка

С учетом соотношений (87) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1^0 &= \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}} \begin{pmatrix} 2c_{66} - c_{44} \\ 2c_{66}p_{01} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_3^0 &= \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{44}}} \begin{pmatrix} 2iqc_{66} \\ c_{44} - 2c_{66} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_y^0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{44} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \varphi}\right)_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{c_{66}c_{44}} \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial \varphi}\right)_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ iq\alpha\sqrt{c_{11}c_{44}} \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{L}}'}{\partial \varphi}\right)_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta c_{44} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (90)$$

Подставляя эти выражения в формулы (80), получаем явные выражения для ключевых параметров, описывающих исследуемый резонанс возбуждения:

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{4c_{66}}{\beta c_{44}} \sqrt{\frac{\Delta_{46}}{c_{44}}}, \quad \lambda' = \left(\frac{2c_{66}}{\beta c_{44}}\right)^2 \sqrt{\frac{\Delta_{46}}{c_{66}}}, \\ \lambda'' &= -\left(\frac{c_{44} - 2c_{66}}{\beta c_{44}}\right)^2 \sqrt{\frac{c_{11}}{\Delta_{14}}}. \end{aligned} \quad (91)$$

С помощью (87) нетрудно вычислить и групповые скорости (48) объемных волн 1, 2, 4:

$$\begin{aligned} s_{1,4} &= \frac{\hat{v}_0^2}{\hat{v}'_0} \left(1, \pm p_{01}, \frac{c_{44}}{c_{66}}\varphi\right), \\ s_2 &= \hat{v}'_0 \left(1, \delta p, \frac{c_{33}\Delta_{14} - d^2}{c_{44}\Delta_{14}}\varphi\right), \\ \hat{v}_0 &= \sqrt{c_{66}/\rho}, \quad \hat{v}'_0 = \sqrt{c_{44}/\rho}. \end{aligned} \quad (92)$$

При этом критерий (85) близости отражения к конверсии выглядит следующим образом:

$$(\lambda''/\lambda')^2 = \left(\frac{c_{44} - 2c_{66}}{2c_{66}}\right)^4 \frac{c_{11}c_{66}}{\Delta_{14}\Delta_{46}} \ll 1. \quad (93)$$

Если подобрать кристалл, в котором удовлетворяется неравенство (93), то везде можно приближенно положить $\beta \approx 1$, $\mu \approx -\sqrt{2}$ и $\lambda' \approx 1$. В результате оптимальное соотношение (53) между φ^2 и δp приобретает совсем простой вид:

$$\varphi_{max}^2 \approx \delta p, \quad (94)$$

а отношение лучевых скоростей дается оценкой

$$\frac{s_2}{s_4} \approx \frac{\hat{v}_0}{\hat{v}'_0} = \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}} \approx \sqrt{2}.$$

Соответствующая амплитуда (54) пика $K_2(\varphi^2)$ становится равной

$$K_2^{max} \approx 1/\sqrt{2} \delta p, \quad (95)$$

а его полуширина (55) оценивается величиной

$$\varphi_{1/2}^2 \approx 4\sqrt{2} \delta p. \quad (96)$$

При этом интенсивность (51) отраженной волны утечки 1 становится весьма малой:

$$K_1(\varphi_{max}^2) \approx \frac{1}{4} \lambda''^2 \approx \frac{c_{11}}{4\Delta_{14}} \left(\frac{c_{44} - 2c_{66}}{c_{44}}\right)^4. \quad (97)$$

В таблице приведены данные для трех гексагональных кристаллов, в которых неравенство $(\lambda''/\lambda')^2 \ll 1$ (93) реализуется в различной степени. Это значит, что в данных кристаллах паразитный сигнал серьезно подавлен и энергия падающей волны 4 в основном попадает в возбуждаемую интенсивную моду 2.

Таблица. Упругие модули в гигапаскалях [18] и параметры μ , λ' , λ'' и Λ

Кристалл	c_{11}	c_{44}	c_{66}	c_{33}	c_{13}	$-\mu$	λ'	$-\lambda''$	Λ
Li ₂ Bi	49.2	9.66	4.8	54.1	29.0	1.40	0.98	$4.25 \cdot 10^{-5}$	0.69
Таллий	40.8	7.26	2.7	52.8	29.0	0.92	0.44	0.044	0.87
Нефелин	79.0	37.3	20.5	126	19.2	1.70	1.46	$1.81 \cdot 10^{-2}$	0.33

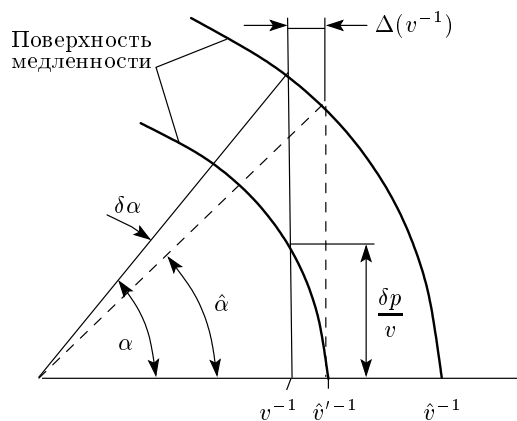


Рис. 7. Соотношения между параметрами $\delta\alpha$, δp и $\Delta(v)^{-1}$

До сих пор, характеризуя рассматриваемый резонанс, мы варьировали два свободных параметра: угол φ поворота сагиттальной плоскости (см. рис. 6) и параметр δp , связанный с изменением Δv приведенной фазовой скорости (см. формулу (26) и рис. 5). Величина Δv , в свою очередь, определяет отклонение $\delta\alpha$ угла падения $\alpha = \hat{\alpha} + \delta\alpha$ от предельного угла $\hat{\alpha}$ (рис. 7).

Конечно, из указанных трех величин отклонение $\delta\alpha$ угла падения является наиболее естественным управляющим параметром. К сожалению, в общем случае переход от δp к $\delta\alpha$ решается индивидуально для каждого кристалла численными методами. Однако в гексагональном кристалле с сагиттальной плоскостью, близкой к плоскости поперечной изотропии (см. рис. 6), это легко сделать и в аналитическом виде.

Как видно из рис. 7, в данном случае $\cos \alpha = v^{-1}/\hat{v}^{-1} = \hat{v}/v$. Дифференцируя это равенство вблизи $\alpha = \hat{\alpha}$ и, соответственно, $v = \hat{v}$, получим

$$\delta\alpha = \frac{\hat{v}\Delta v}{\hat{v}'^2 \sin \hat{\alpha}}. \tag{98}$$

После подстановки сюда из (26) $\Delta v = \hat{v}'\delta p^2/2$ находим

$$\delta\alpha = \frac{\hat{v}}{2\hat{v}' \sin \hat{\alpha}} \delta p^2. \tag{99}$$

В рассматриваемых условиях угол $\hat{\alpha}$, входящий в формулы (98), (99), находится из уравнения $\cos \hat{\alpha} = \hat{v}/\hat{v}' \approx \sqrt{c_{66}/c_{44}}$. Допустим, что кристалл подобран из условия (93) при $c_{44} \approx 2c_{66}$. Тогда приближенно получаем $\hat{v}/\hat{v}' \approx 1/\sqrt{2}$, $\hat{\alpha} \approx \pi/4$ и вместо (99) имеем

$$\delta\alpha \approx \frac{1}{2} \delta p^2. \tag{100}$$

Строго говоря, найденные аналитические связи между величинами $\delta\alpha$, φ_{max} и δp , основанные на разложениях по этим параметрам, заслуживают доверия лишь до тех пор, пока они достаточно малы, причем критерий этой малости является тем более жестким, чем выше анизотропия рассматриваемого кристалла. Следует иметь в виду, что из трех величин, $\delta\alpha$, φ и δp , только первые две являются свободными независимыми переменными. Параметр δp , который мы рассматривали выше как альтернативу величине Δv (или углу $\delta\alpha$) по своему физическому смыслу зависит не только от Δv , но и от угла φ . Пользуясь формулой (26), мы не учитывали изменение радиуса кривизны κ при повороте сагиттальной плоскости, поскольку он умножается на малый параметр Δv . Более точная формула для гексагонального кристалла, согласно [16], имеет вид

$$\delta p^2 = \delta p_0^2 \sqrt{1 + \Lambda \varphi^2}, \tag{101}$$

где $\delta p_0^2 = 2\Delta v/\hat{v}'_0$ и Λ — параметр анизотропии,

$$\Lambda = \frac{c_{33}\Delta_{14} - d^2}{c_{44}\Delta_{14}} - 1, \tag{102}$$

который по мере понижения анизотропии стремится к нулю. С учетом (92) в тех же терминах

$$\frac{s_2}{s_4} = \frac{\hat{v}'_0}{\hat{v}_0} \sqrt{1 + (\Lambda + 1)^2 \varphi^2}. \tag{103}$$

К счастью, как видно из таблицы, все три кристалла, выбранные нами для иллюстраций, характеризуются достаточно малыми параметрами анизотропии

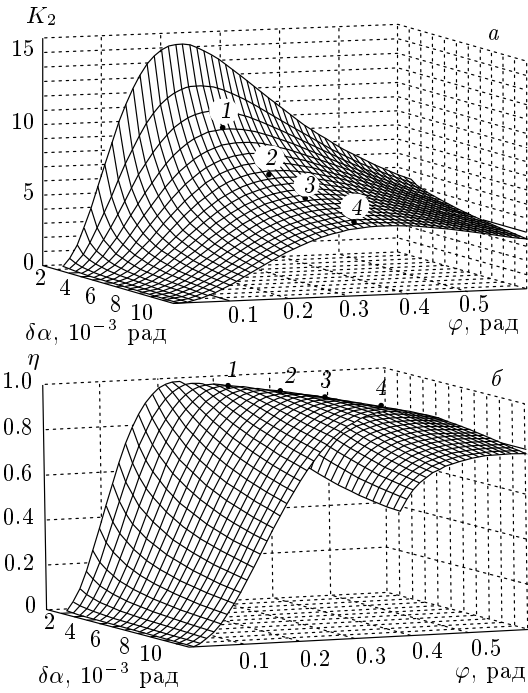


Рис. 8. Графики коэффициента усиления K_2 (а) и доли энергии в возбуждаемом пучке η (б) в зависимости от угла падения $\delta\alpha$ и угла отклонения сагиттальной плоскости φ в кристалле $\text{Li}_2\text{Вi}$

Λ , и использованные выше приближения $\delta p \approx \delta p_0$, $s_2/s_4 \approx \hat{v}'_0/\hat{v}_0 \approx \sqrt{2}$ являются вполне удовлетворительными.

С другой стороны, в соответствии с оценками (94), (95), (100), реализация даже весьма «скромного» резонанса $K_2^{max} \approx 5$ при $\delta p \approx \varphi_{max}^2 \approx 0.14$ требует весьма тонкой настройки угла падения $\delta\alpha \approx \approx 0.01$ рад. Но данный резонанс отвечает отнюдь не малому углу поворота сагиттальной плоскости $\varphi_{max} \approx 0.38$ рад. Впрочем, для всех трех рассматриваемых кристаллов даже при таком угле пренебрежение в подкоренных выражениях в (101), (103) слагаемыми, пропорциональными φ^2 , дает не слишком большую погрешность. Тем не менее, с учетом сказанного, дальнейший анализ для всех представленных в таблице кристаллов проводился не с помощью приближенных аналитических формул (52), (82), (91), а численно по точным формулам (36), (37) и (49), применимым к любым кристаллам независимо от их анизотропии.

На рис. 8 представлены трехмерные изображения функций $K_2 = |R_2(\varphi, \delta\alpha)|^2$ и $\eta = 1 - K_1(\varphi, \delta\alpha)$, построенные численно для кристалла $\text{Li}_2\text{Вi}$. Для таллия и нефелина изображения получаются очень по-

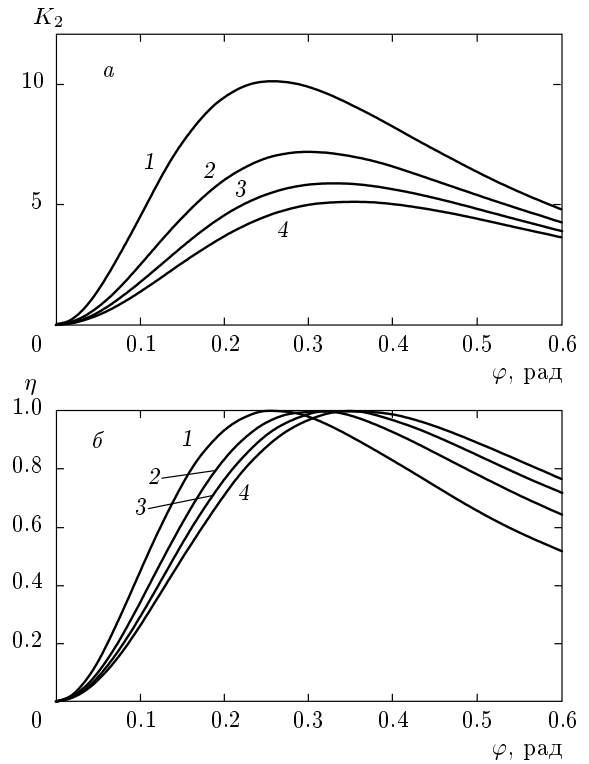


Рис. 9. Сечения поверхностей $K_2(\varphi, \delta\alpha)$ (а) и $\eta(\varphi, \delta\alpha)$ (б), приведенных на рис. 8, плоскостями, проходящими через точки $\delta\alpha = 2.5 \cdot 10^{-3}$ (1), $5.0 \cdot 10^{-3}$ (2), $7.5 \cdot 10^{-3}$ (3), $10.0 \cdot 10^{-3}$ (4) на гребнях этих поверхностей ортогонально оси $\delta\alpha$

хожие. Как подтвердила проверка, для всех этих кристаллов в большей части области рассмотрения результаты нашей теории, справедливой в рамках первого приближения, действительно оказываются весьма близкими к показанным на рис. 8 поверхностям, отвечающим компьютерным расчетам по точным формулам.

Как мы и ожидали, чувствительность резонанса к изменениям $\delta\alpha$ угла падения является гораздо более резкой, чем к поворотам φ сагиттальной плоскости, что выражается в разных масштабах отложенных углов по двум осям. Интервалы углов на рис. 8 выбраны так, чтобы амплитуда коэффициента усиления K_2 оставалась в пределах практически приемлемых значений (более подробное рассмотрение этого аспекта дано в разд. 5.2).

На рис. 9 приведены сечения поверхностей, показанных на рис. 8, плоскостями, перпендикулярными оси $\delta\alpha$ и проходящими через точки 1, 2, 3 и 4 на гребнях этих поверхностей. В частности, точка 4 на рис. 8, 9 отвечает амплитуде коэффициен-

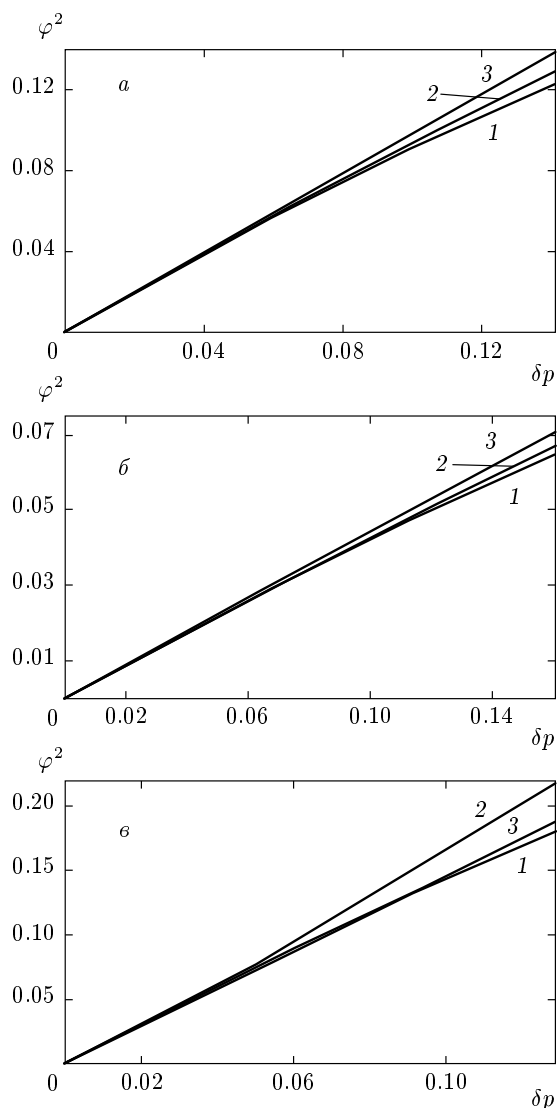


Рис. 10. Проекция линий максимумов функций $K_2(\varphi, \delta\alpha)$ (1) и $\eta(\varphi, \delta\alpha)$ (2) на горизонтальную плоскость $(\varphi, \delta\alpha)$, перестроенные в координатах $(\varphi^2, \delta\rho)$ для сравнения с аналитической прямой 3, отвечающей формуле (53), для кристаллов Li_2Bi (а), таллия (б) и нефелина (в)

та $K_2^{max} \approx 5$. Как видно из рис. 8, этот уровень для кристалла Li_2Bi реализуется при $\delta\alpha \approx 0.01$ рад, что почти точно соответствует нашим аналитическим оценкам (95), (100). Из рис. 9 также видно, что максимумы коэффициента эффективности η во всех рассмотренных сечениях близки к 100 %.

На рис. 10 для всех трех кристаллов из таблицы показаны проекции гребней поверхностей $K_2(\varphi, \delta\alpha)$ и $\eta(\varphi, \delta\alpha)$ на горизонтальную плоскость, перестроенные в координатах $\{\varphi^2, \delta\rho\}$ для сравнения с приближенной аналитической зависимостью (53). Неболь-

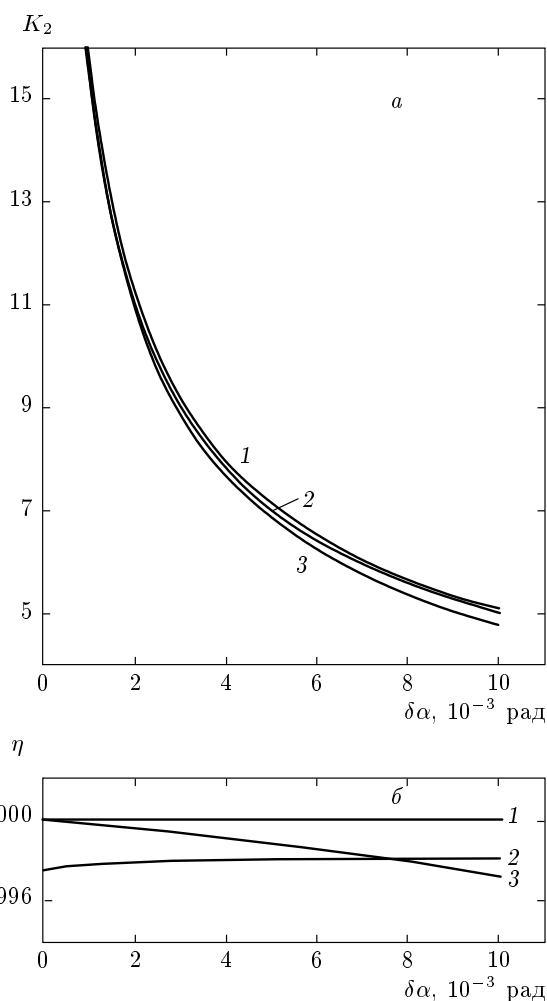


Рис. 11. Зависимости $K_2^{max}(\delta\alpha)$ (а) и $\eta_{max}(\delta\alpha)$ (б) для кристаллов Li_2Bi (1), таллия (2) и нефелина (3)

шое расхождение между численными кривыми 1 и 2 с ростом φ обусловлено присутствием в числителях выражений (82) и (83) параметров $\delta\rho$ и s_2/s_4 , по-разному зависящих от φ (в аналитической теории они считались постоянными параметрами). Естественно, что, отходя друг от друга с ростом угла φ , они отходят и от аналитической прямой. Как видно из рисунка, для всех рассматриваемых кристаллов траектории максимального усиления и конверсии оказываются достаточно близкими друг к другу, что представляется очень важным для практики.

Сами гребни функций $K_2(\varphi, \delta\alpha)$ и $\eta(\varphi, \delta\alpha)$, изображенных на рис. 8, 9, по мере скоррелированного роста углов φ и $\delta\alpha$ ведут себя по-разному. В пределах интервала изменения на рис. 8 первый из них понижается в несколько раз, а второй практически

остаётся на неизменном уровне (около 100%), что соответствует приближенным формулам (84) и (97). На рис. 11а построены соответствующие зависимости коэффициентов усиления $K_2^{max}(\delta\alpha)$ для трех гексагональных кристаллов, представленных в таблице. Видно, что во всех случаях уровень $K_2^{max} = 5$ достигается при значении угла $\delta\alpha \approx 10^{-2}$ рад. Это характеризует требуемую остроту настройки угла падения в будущих экспериментах.

На рис. 11б показаны зависимости $\eta_{max}(\delta\alpha)$ для той же группы кристаллов. Видно, что в рассматриваемом интервале углов $\delta\alpha$ все кристаллы сохраняют очень высокую эффективность, близкую к 100%, которая, в соответствии с предсказанием развитой выше простой теории, слабо зависит от угла падения. Это относится даже к кристаллу таллия, в котором упругие модули находятся дальше от условия конверсии $c_{44} = 2c_{66}$, чем в других кристаллах.

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФАКТОРЫ ВЛИЯНИЯ НА ЭФФЕКТ

5.1. Роль поглощения

В предыдущем анализе мы не учитывали поглощение кристалла, которое, однако, может оказаться существенным при достаточно высоких частотах. В теории упругости учет поглощения сводится к дополнению тензора упругих модулей c_{ijkl} тензором вязкости η_{ijkl} , т. е. к перенормировке [8]

$$c_{ijkl} \rightarrow c_{ijkl} - i\omega\eta_{ijkl}. \quad (104)$$

Компоненты тензора $\hat{\eta}$ обычно считаются малыми. Соответственно, фазовые скорости s упругих волн и волновые векторы \mathbf{k} тоже получают малые мнимые добавки. Это касается и ключевых волновых параметров нашей теории:

$$v \rightarrow v - iv', \quad k \rightarrow k + ik', \quad p_\alpha \rightarrow p_\alpha + ip'_\alpha. \quad (105)$$

Здесь все мнимые добавки пропорциональны поглощению. При этом параметры v' и k' не являются независимыми, поскольку по-прежнему $(v - iv') \times (k + ik') = \omega$.

Включение в рассмотрение поглощения, конечно, не приводит к радикальному изменению теории упругих волн в кристаллах. Поверхность медленности почти не меняется, определяясь вещественными компонентами фазовых скоростей s объемных волн. Правда, к ней добавляется новая волновая поверхность, связанная с мнимой компонентой скорости, характеризующей поглощение. При этом вещественная компонента v приведенной фазовой скорости иг-

рает в теории волновых процессов в полуограниченных средах ту же роль, что и при отсутствии поглощения. В частности, она по-прежнему задает направления распространения парциальных волн в задаче отражения (см. рис. 4). Однако параметры p_α теперь становятся комплексными даже для объемных парциальных волн.

Наиболее принципиальная поправка в нашей теории связана с зависимостью $\delta p(\Delta v)$ (26), поскольку она ликвидирует неограниченное уменьшение этого параметра, определяющее сингулярное возрастание до бесконечности амплитуды резонанса (54), (95) при $v \rightarrow \hat{v}'$. Формула (26), задающая связь вариации δp параметра p_2 с изменением скорости $\Delta v = v - \hat{v}'$ является решением волнового уравнения. В результате обобщения все параметры, входящие в (26), приобретают мнимые добавки. Но поскольку в области резонанса вещественная компонента v приведенной скорости, как и раньше, близка к предельной скорости \hat{v}' , параметр кривизны κ средней полости поверхности медленности (см. рис. 5) можно использовать без малой мнимой добавки. Это дает, вместо (26), в главном порядке

$$\delta p = \sqrt{2\kappa[v - \hat{v}'(1 - i\varepsilon)]} = \sqrt{\delta p_0^2 + 2i\varepsilon\kappa\hat{v}'}, \quad (106)$$

где ε — малый параметр, пропорциональный поглощению, и индекс «0» при δp_0 означает, что этот параметр вычислен в нулевом порядке по поглощению (26). Из выражения (106) видно, что в поглощающем кристалле при $v \rightarrow \hat{v}'$, когда $\delta p_0 \rightarrow 0$, параметр δp стремится не к нулю, а к предельному значению

$$\delta \hat{p} = \sqrt{2i\varepsilon\kappa\hat{v}'} = (1 + i)\sqrt{\varepsilon\kappa\hat{v}'}. \quad (107)$$

Это показывает, что учет поглощения снимает сингулярность резонанса в пределе $v \rightarrow \hat{v}'$.

Действительно, в предельном случае $(v - \hat{v}')/\hat{v}' \ll \varepsilon$, когда $\delta p \approx \delta \hat{p}$, формула (83) для пика $K_2(\varphi^2)$ в ромбическом кристалле должна быть заменена выражением

$$K_2 = \frac{\sqrt{2}|\mu|^2\varphi^2}{\varphi^4 + 2\varphi^2(\lambda' - \lambda'')\sqrt{\varepsilon\kappa\hat{v}'} + 2|\lambda_1|^2\varepsilon\kappa\hat{v}'}. \quad (108)$$

Именно к этой предельной функции теперь стремится резонансный пик $K_2(\varphi^2)$ при $v \rightarrow \hat{v}'$. Положение точки максимума нового пика также становится фиксированным,

$$\varphi_{max}^2 = |\lambda_1|\sqrt{2\varepsilon\kappa\hat{v}'}, \quad (109)$$

и так же, как его высота

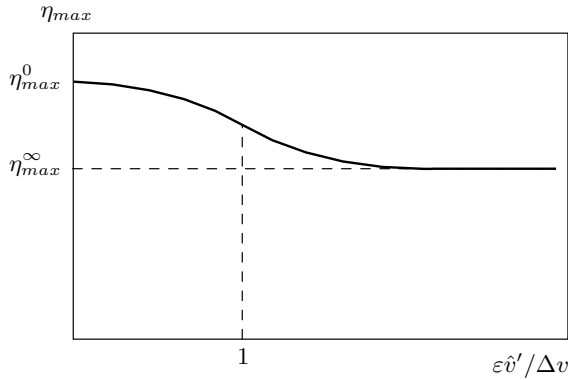


Рис. 12. Схематическая зависимость $\eta_{max}(\hat{v}'\varepsilon/\Delta v)$ с переходом от уровня η_{max}^0 (84) к асимптите η_{max}^∞ (112), отвечающей предельному переходу $\hat{v}'\varepsilon/\Delta v \rightarrow \infty$

$$K_2^{max} = K_2(\varphi_{max}^2) = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\kappa\hat{v}'}} \quad (110)$$

$$k = \frac{|\mu|^2}{2|\lambda_1| + \sqrt{2}(\lambda' - \lambda'')},$$

определяется уровнем поглощения. Полуширина пика дается оценкой $[\Delta(\varphi^2)]_{1/2} \sim \sqrt{\varepsilon}$.

В том же предельном случае $\Delta v/\hat{v}' \ll \varepsilon$ доля энергии η , попадающая при отражении в волну 2, определяется при учете поглощения функцией

$$\eta(\varphi^2) = 1 - K_1 = \frac{4\lambda'\varphi^2\sqrt{\varepsilon\kappa\hat{v}'}}{\varphi^4 + 2\varphi^2(\lambda' - \lambda'')\sqrt{\varepsilon\kappa\hat{v}'} + 2|\lambda_1|^2\varepsilon\kappa\hat{v}'} \quad (111)$$

вместо (82). Эта функция, как и прежде, лишь постоянным множителем отличается от $K_2(\varphi^2)$. Поэтому положение ее максимума совпадает с (109), а высота максимума равна

$$\eta_{max} = \frac{2\lambda'}{\sqrt{2}|\lambda_1| + \lambda' - \lambda''} \equiv \eta_{max}^\infty. \quad (112)$$

Этот результат, отвечающий условию $\varepsilon \gg \Delta v/\hat{v}'$, естественно, отличается от выражения (84), которое тривиально получается, если той же формулой (106) воспользоваться в другом предельном случае $\varepsilon \ll \Delta v/\hat{v}'$. На рис. 12 приведена схема, отвечающая случаю $\lambda'' < 0$ (91), который реализуется в гексагональных кристаллах.

Обычно поглощение ультразвука оценивается значениями $\varepsilon \sim 10^{-5} - 10^{-3}$. Поэтому для интересующих нас величин $\delta\rho_0 \sim 10^{-1}$ в формуле (106) реализуется именно последний предельный случай, когда $\delta\rho_0 \gg |\delta\hat{p}|$, и поглощение вносит в развитую выше теорию лишь малые поправки. Впрочем, как мы

увидим ниже, рассматриваемый резонанс наиболее эффективен при высоких частотах, когда поглощение увеличивается (104) и приведенные здесь оценки могут оказаться полезными.

5.2. Дифракционное уширение пучков

Еще один осложняющий фактор возникает при переходе от плоских волн к пучкам из-за такого нового их качества, как дифракционная расходимость, которая может существенно ограничивать возможности регулирования параметров резонанса. Угол расходимости любого пучка с длиной волны λ и шириной d оценивается величиной

$$\delta\psi \sim \lambda/d. \quad (113)$$

Как мы видели, исследуемая резонансная область является весьма узким по углам падения. Даже при относительно небольшом коэффициенте возбуждения $K_2 \approx 5$, лежащем за пределами области аномальной узости, требуется весьма тонкая настройка угла падения, отклоняющегося от предельного значения на величину $\delta\alpha \sim 10^{-2}$ рад (см. рис. 11). Но угол расходимости $\delta\psi$ (113) падающего пучка должен быть заведомо меньше $\delta\alpha$. Это значит, что длину волны λ следует выбирать достаточно малой, а частоту ν , соответственно, достаточно высокой. Если принять ширину падающего пучка $d = D_i \sim 1$ см, то из условия $\delta\psi \ll \delta\alpha$ и соотношения (113) вытекает следующая оценка порога эффекта по частоте: $\nu_c \sim 100$ МГц.

Еще более лимитирующей по отношению к увеличению коэффициента K_2 является расходимость отраженной волны 2. Действительно, если расходимость и ширина падающего (1) и отраженного (2) пучков равны соответственно $\delta\psi_i, D_i$ и $\delta\psi_r, d_r$, то из (113) следует, что $\delta\psi_r/\delta\psi_i \approx D_i/d_r$. С другой стороны, как было показано во Введении (см. рис. 1а), $K_2 \sim \eta D_i/d_r$. При $\eta \approx 1$ из этих соображений вытекает оценка

$$\delta\psi_r \approx K_2\delta\psi_i. \quad (114)$$

Отсюда видно, что увеличение интенсивности отраженного пучка 2 в K_2 раз по отношению к интенсивности падающего пучка во столько же раз увеличивает и его расходимость. Поэтому слишком большие значения коэффициента K_2 неприемлемы. Впрочем, если исходить из условно принятых выше значений $K_2 = 5$ и $\delta\psi_i = 2 \cdot 10^{-3}$ рад, то получаемая из (114) оценка $\delta\psi_r \approx 10^{-2}$ рад представляется вполне реализуемой.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитая выше аналитическая теория строится в рамках теории упругости и в пределах ее применимости является точной вплоть до формул (36), (37), выражающих коэффициенты резонансного отражения для произвольной анизотропной среды в терминах собственных векторов матрицы Стро (7). Зависимость этих векторов от геометрических параметров отражения в общем случае может быть легко найдена численными методами. Аналитической альтернативой является разложение точных формул (36), (37) в ряд по малым угловым параметрам. Наконец, возможен и явный аналитический расчет по этим формулам для ряда геометрий в кристаллах высокой симметрии (например, гексагональных). В настоящей работе использовались все три подхода: численные расчеты по формулам (36), (37), (49), их разложение в ряд и даже представление результатов в явном виде через упругие модули. При этом, избегая громоздкости вычислений и необозримости аналитических формул, мы во всех разложениях сохраняли лишь первые исчезающие члены, передающие ключевые зависимости исследуемого эффекта от физических параметров. С другой стороны, все графические результаты анализа получены с помощью компьютерных расчетов, основанных на точных формулах (36), (37).

Исходя из тех же принципов, образ акустических пучков мы использовали в наших рассуждениях лишь для наглядности. В действительности, мы не выходили в расчетах за рамки плосковолнового приближения, полагая его достаточным в интересующем нас коротковолновом пределе $\delta\psi \sim \lambda/d \sim 10^{-3}$ рад (109). Здесь мы также имели в виду возможные проявления эффекта в фононной физике, где язык плоских волн более уместен.

На основании проведенного анализа, по-видимому, можно рассчитывать на реализацию в кристаллах резонансного отражения, при котором широкий падающий акустический пучок почти всю свою энергию конвертирует в узкий отраженный пучок высокой интенсивности. Для оптимизации резонанса требуется специальный подбор кристаллов с определенным соотношением упругих модулей. Кроме того, из-за узости резонансной области по углам падения возникают жесткие требования слабой расходимости падающего пучка, $\delta\psi \sim 10^{-3}$ рад, которая может быть реализована только при высоких частотах ультразвука порядка 100 МГц. По той же причине ограничена и амплитуда коэффициента возбуждения величинами $K_2 \approx 5-10$. Впрочем, при повтор-

ной трансформации выходящего пучка путем его сужения и в перпендикулярном измерении эффективность интенсификации многократно возрастает до значений $K_2^2 \sim 10^2$. В гиперзвуковой области частот амплитуды усиления могут быть значительно повышены. Впрочем, в этом случае можно ожидать дополнительных ограничений, связанных с увеличением поглощения акустических волн.

Рассмотренный в настоящей работе акустический резонанс может проявляться и в фононной физике в виде каналирования энергии высокой плотности вблизи поверхностей кристаллов специально подобранных ориентаций, а также в сопутствующих нелинейных явлениях. Стратегия экспериментального поиска эффектов такого рода может быть основана на существующих методиках изучения проявлений фононной фокусировки [2] и распространения баллистических фононов [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. V. Gulyaev, IEEE Trans. Ultrason. Ferroel. Freq. Control **45**, 935 (1998).
2. J. P. Wolfe, *Heat Pulses and Phonon Imaging*, Springer, Berlin (1993).
3. Л. М. Бреховских, О. А. Годин, *Акустика слоистых сред*, Наука, Москва (1989).
4. В. И. Альшиц, Е. Лоте, Кристаллография **24**, 1122 (1979).
5. D. M. Barnett and J. Lothe, Proc. Roy Soc. London A **402**, 135 (1985).
6. P. Chadwick and G. P. Smith, Adv. Appl. Mech. **17**, 303 (1977).
7. В. И. Альшиц, Е. Лоте, Кристаллография **24**, 972 (1979).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
9. A. N. Stroh, J. Math. Phys. **41**, 77 (1962).
10. A. N. Darinskii, V. I. Alshits, J. Lothe, V. N. Lyubimov, and A. L. Shuvalov, Wave Motion **28**, 241 (1998).
11. V. I. Alshits and J. Lothe, Wave Motion **3**, 297 (1981).
12. T. C. T. Ting, *Anisotropic Elasticity. Theory and Applications*, Oxford Univ. Press, New York (1996).
13. A. N. Darinskii, J. Acoust. Soc. Amer. **103**, 1845 (1998).

14. V. I. Alshits and G. A. Maugin, *Wave Motion* **41**, 357 (2005).
15. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах*, Наука, Москва (1965).
16. Е. Лоте, В. И. Альшиц, *Кристаллография* **22**, 906 (1977).
17. В. И. Альшиц, Е. Лоте, *Кристаллография* **23**, 901 (1978).
18. Н. Н. Landolt and R. Börnstein, *Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Neue Serie*, III/11, ed. by K.-H. Hellwege, Springer, Berlin (1979).
19. В. И. Альшиц, С. Н. Иванов, Я. М. Соيفер, А. В. Таранов, Е. Н. Хазанов, *ФТТ* **31**(11), 63 (1989).