

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ

В. Р. Муниров^{a,b}, А. В. Филиппов^{a}*

*^a ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Москва, Троицк, Россия*

*^b Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.

Рассмотрено электростатическое взаимодействие двух заряженных диэлектрических сферических частиц с неоднородным распределением свободного заряда по их поверхностям во внешнем однородном электрическом поле. Получено точное решение для потенциала электрического поля, найдено аналитическое выражение для силы взаимодействия двух частиц. Подробно рассмотрен случай однородного распределения свободного заряда и установлена область параметров на плоскости отношение радиусов–отношение зарядов, в которой по мере уменьшения межчастичного расстояния отталкивание между одноименно-заряженными частицами переходит в притяжение.

DOI: 10.7868/S0044451013110059

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о взаимодействии двух сферических частиц имеет давнюю историю. Пуассон в 1811 г. методом разложения по полиномам Лежандра решал задачу о взаимодействии двух сферических частиц из проводящего материала (см. работы [1, 2]). Далее эту задачу решал Кельвин методом изображений и методом разложения по полиномам Лежандра в бисферической системе координат [3]. Максвелл нашел решение для потенциала взаимодействия методом разложения по полиномам Лежандра в сферической системе координат с точностью до членов R^{-22} [4], где R — расстояние между центрами частиц. В этой работе получено разложение полиномов Лежандра с полюсом в центре одной частицы по полиномам Лежандра с полюсом в центре другой частицы методом дифференцирования (подробнее см. работу [5]). В работе [6] получены выражения для емкостных коэффициентов при малых расстояниях между поверхностями частиц $L = (R - a_1 - a_2)$. Эти выражения также были получены в работах [7, 8] и использованы автором для ответа на вопрос: есть ли

притяжения между частицами на малых расстояниях.

Ввиду того, что задача о взаимодействии двух сферических частиц даже из проводящего материала имеет решение только в виде суммы бесконечного ряда, который весьма медленно сходится при малых межчастичных расстояниях, требуется привлечение численных методов, и решение может быть получено только для частных случаев. Многочисленные аспекты данного взаимодействия и способы нахождения решения для случая проводящих шаров отражены в работах [7–26]; исследовалось также влияние внешнего однородного электрического поля на взаимодействие двух незаряженных и заряженных сферических частиц из проводящего материала [27, 28].

Исследование взаимодействия диэлектрических частиц является более сложной задачей, поэтому решение данной задачи имеет более короткую историю и ей посвящено заметно меньше работ [29–40]. В работах [29, 30] исследовалось взаимодействие двух одинаковых незаряженных диэлектрических частиц во внешнем электрическом поле, причем в работе [29] решение получено для любого угла между направлением внешнего поля и осью симметрии задачи, проходящей через центры частиц, а в работе [30] — только для параллельного и перпендикулярного направлений. В работах [31, 32] рассматри-

*E-mail: fav@triniti.ru

вались частицы разного размера и имеющие разные значения диэлектрической проницаемости во внешнем электрическом поле, направленном вдоль линии, соединяющей центры частиц [31], и перпендикулярно ей [32]. В работе [33] исследовался случай одинаковых частиц, но при произвольном направлении внешнего поля, а в [34] — случай разных частиц. В работах [29–34] задача решалась в бисферической системе координат.

В работе [35] взаимодействие двух заряженных диэлектрических частиц, находящихся в контакте, исследовалось численно методом конечных элементов Галеркина. В работе [36] задача для двух заряженных сферических частиц решалась в сферической системе координат методом переразложения полиномов Лежандра с полюсом в центре одной из частиц по полиномам Лежандра с полюсом в центре другой частицы¹⁾. В работе [37] для исследования взаимодействия двух равномерно-заряженных диэлектрических шаров использовался этот же метод и была определена область параметров, в которой на малых расстояниях имеется притяжение между одноименно-заряженными диэлектрическими шарами. Далее в работах [38–40] использовалась созданная в работе [37] аналитическая модель для исследования взаимодействия кластеров углерода и фуллеренов [38, 39] и диэлектрических частиц в диэлектрическом растворителе [40].

Отметим, что в работах [18, 19] проведено исследование взаимодействия точечного заряда со сферической проводящей макрочастицей в плазме, а в работе [43] — с диэлектрической макрочастицей в плазме с однородным внешним электрическим полем.

Настоящая работа посвящена решению задачи электростатического взаимодействия двух неравномерно-заряженных диэлектрических сферических частиц разного радиуса, помещенных в однородный диэлектрик и в однородное внешнее электрическое поле.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим две сферические частицы с радиусами a_1, a_2 , с зарядами q_1, q_2 , которые в общем случае неравномерно распределены по их поверхностям, и с диэлектрическими постоянными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, помещенные

¹⁾ В работе [36] данный метод решения был назван методом Washizu [41, 42]. Выше уже отмечалось, что этот метод уже использовал Максвелл [4], а явные выражения переразложения полиномов Лежандра см. в работе [5].

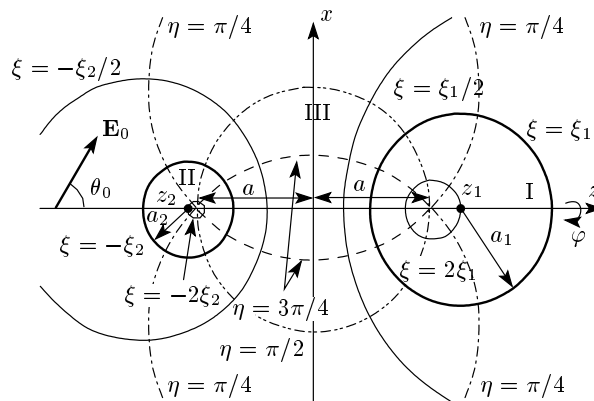


Рис. 1. Геометрия взаимодействия двух макрочастиц радиусами a_1 и a_2 в бисферической системе координат (ξ, η, φ)

в однородный диэлектрик (проницаемостью ε) и однородное до введения частиц внешнее электрическое поле E_0 . Введем декартову систему координат, так чтобы вектор напряженности внешнего поля лежал в плоскости xz , а ось z была направлена вдоль линии, соединяющей центры частиц (см. рис. 1).

Далее введем бисферические координаты (см. [44, 45]), как показано на рис. 1:

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{R^2 + a_1^2 - a_2^2}{2Ra_1}, \quad \operatorname{ch} \xi_2 = \frac{R^2 + a_2^2 - a_1^2}{2Ra_2},$$

$$R = z_1 - z_2 = a (\operatorname{cth} \xi_1 + \operatorname{cth} \xi_2) = a_1 \operatorname{ch} \xi_1 + a_2 \operatorname{ch} \xi_2,$$

$$a = a_1 \operatorname{sh} \xi_1 = a_2 \operatorname{sh} \xi_2, \quad z_1 = a \operatorname{cth} \xi_1 = a_1 \operatorname{ch} \xi_1,$$

$$z_2 = -a \operatorname{cth} \xi_2 = -a_2 \operatorname{ch} \xi_2.$$

Электростатическое взаимодействие частиц в однородном диэлектрике определяется уравнением Лапласа $\Delta \phi = 0$, которое в бисферических координатах может быть решено методом разделения переменных введением новой величины

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = \psi(\xi, \eta, \varphi) \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}.$$

Здесь ϕ — потенциал электростатического поля. Ограниченные решения уравнения Лапласа в бисферических координатах в областях внутри частиц и

во внешней области можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_I(\xi, \eta, \varphi) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_l^m \cos(m\varphi) + A_l^{-m} \sin(m\varphi)] \times \\ &\quad \times e^{-(l+1/2)\xi} P_l^m(\cos \eta), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi_{II}(\xi, \eta, \varphi) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [B_l^m \cos(m\varphi) + B_l^{-m} \sin(m\varphi)] \times \\ &\quad \times e^{(l+1/2)\xi} P_l^m(\cos \eta), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \psi_{III}(\xi, \eta, \varphi) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left\{ [C_l^m \cos(m\varphi) + C_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{-(l+1/2)\xi} + \right. \\ &\quad \left. + [D_l^m \cos(m\varphi) + D_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{(l+1/2)\xi} \right\} \times \\ &\quad \times P_l^m(\cos \eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Потенциал однородного внешнего электрического поля имеет вид:

$$\phi_0 = -E_{0x} \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} - E_{0z} \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad (4)$$

где $E_{0x} = E_0 \sin \theta_0$, $E_{0z} = E_0 \cos \theta_0$. Его разложение по полиномам Лежандра в нашей бисферической системе координат определяется выражением

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -\sqrt{2} a E_{0z} \operatorname{sign} \xi \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \times \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-(l+1/2)|\xi|} P_l(\cos \eta) - \\ &\quad - 2\sqrt{2} a E_{0x} \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \times \\ &\quad \times \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(l+1/2)|\xi|} P_l^1(\cos \eta) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу принципа суперпозиции результирующий потенциал в области III будет суммой выражений (3) и (5).

Из непрерывности потенциала и разрыва нормальных составляющих вектора электрической индукции вытекают следующие граничные условия [46]:

$$\phi|_{\xi=\xi_1-0} = \phi|_{\xi=\xi_1+0}, \quad \phi|_{\xi=-\xi_2-0} = \phi|_{\xi=-\xi_2+0}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1-0} - \varepsilon_1 \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1+0} &= 4\pi\sigma_1, \\ \varepsilon_2 \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-\xi_2-0} - \varepsilon \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-\xi_2+0} &= 4\pi\sigma_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_1, σ_2 — поверхностная плотность свободных зарядов соответственно первой и второй макрочастиц, которые в общем случае являются функциями η и φ ; h_ξ — коэффициент Ламэ (см. ниже).

Распределение свободных поверхностных зарядов легче всего найти в сферической системе координат с началом в центре каждой из частиц:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\theta_i, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\sigma_{i,n}^m \cos m\varphi + \sigma_{i,n}^{-m} \sin m\varphi) \times \\ &\quad \times P_n^m(\cos \theta_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь θ_i — широта точки поверхности i -й частицы в сферической системе координат с полюсом в ее центре, φ — долгота этой точки. В Приложении показано, что разложение распределения (8) по полиномам Лежандра в бисферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_i(\theta_i, \varphi) &= \sqrt{\operatorname{ch} \xi_i - \cos \eta} \times \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (\tilde{\sigma}_{i,l}^m \cos m\varphi + \tilde{\sigma}_{i,l}^{-m} \sin m\varphi) \times \\ &\quad \times e^{-(l+1/2)|\xi_i|} P_l^m(\cos \eta), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{i,l}^{\pm m} = \sum_{n=m}^{\infty} b_{i,l}^{nm} \sigma_{i,n}^{\pm m}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_{i,l}^{nm} &= 2^{m+1/2} e^{-(n-m)\xi_i} \operatorname{sh}^m \xi_i \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ &\quad \times \sum_{\nu=0}^{\min(l,n)-m} (-1)^{n-m+\nu} e^{2\nu\xi_i} \times \\ &\quad \times \frac{(l+n-\nu)!}{\nu! (n-m-\nu)! (l-m-\nu)!}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из условий непрерывности потенциала (6) выразим коэффициенты $A_l^{\pm m}$ и $B_l^{\pm m}$ через $C_l^{\pm m}$ и $D_l^{\pm m}$. Затем, используя условия (7) и свойства присоединенных функций Лежандра [5], после несложных, но длинных выкладок получим следующие уравнения для определения коэффициентов разложения потенциала:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_l^{\pm m} \mathbf{y}_{l-1} + \mathbb{C}_l^{\pm m} \mathbf{y}_l + \mathbb{B}_l^{\pm m} \mathbf{y}_{l+1} &= \mathbf{F}_l^{\pm m}; \\ l = 0, 1, \dots, \infty, \quad m = 0, 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\mathbf{y}_l = \begin{pmatrix} C_l^{\pm m} \\ D_l^{\pm m} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_l^{\pm m} = (l - m) \times \begin{pmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_1) e^{-(l-1/2)\xi_1} & -(\varepsilon + \varepsilon_1) e^{(l-1/2)\xi_1} \\ -(\varepsilon + \varepsilon_2) e^{(l-1/2)\xi_2} & (\varepsilon - \varepsilon_2) e^{-(l-1/2)\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (C_l^{\pm m})_{11} &= (\varepsilon - \varepsilon_1) [\operatorname{sh} \xi_1 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_1] \times \\ &\quad \times e^{-(l+1/2)\xi_1}, \\ (C_l^{\pm m})_{12} &= [(\varepsilon - \varepsilon_1) \operatorname{sh} \xi_1 + (2l + 1) (\varepsilon + \varepsilon_1) \operatorname{ch} \xi_1] \times \\ &\quad \times e^{(l+1/2)\xi_1}, \\ (C_l^{\pm m})_{21} &= [(\varepsilon - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \xi_2 + (2l + 1) (\varepsilon + \varepsilon_2) \operatorname{ch} \xi_2] \times \\ &\quad \times e^{(l+1/2)\xi_2}, \\ (C_l^{\pm m})_{22} &= (\varepsilon - \varepsilon_2) [\operatorname{sh} \xi_2 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_2] \times \\ &\quad \times e^{-(l+1/2)\xi_2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbb{B}_l^{\pm m} = (l + m + 1) \times \begin{pmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_1) e^{-(l+3/2)\xi_1} & -(\varepsilon + \varepsilon_1) e^{(l+3/2)\xi_1} \\ -(\varepsilon + \varepsilon_2) e^{(l+3/2)\xi_2} & (\varepsilon - \varepsilon_2) e^{-(l+3/2)\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_l^1 = 2a \left\{ 4\pi\tilde{\sigma}_{1,l} + (\varepsilon - \varepsilon_1) \sqrt{2}E_{0z} \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{ch} \xi_1 - (2l + 1) \operatorname{sh} \xi_1] \right\} e^{-(l+1/2)\xi_1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_l^2 = 2a \left\{ 4\pi\tilde{\sigma}_{2,l} - (\varepsilon - \varepsilon_2) \sqrt{2}E_{0z} \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{ch} \xi_2 - (2l + 1) \operatorname{sh} \xi_2] \right\} e^{-(l+1/2)\xi_2},$$

$$\mathbf{F}_l^{1,2} = \begin{pmatrix} 2a \left[4\pi\tilde{\sigma}_{1,l} - (\varepsilon - \varepsilon_1) 2\sqrt{2}E_{0x} \operatorname{sh} \xi_1 \right] e^{-(l+1/2)\xi_1} \\ 2a \left[4\pi\tilde{\sigma}_{2,l} - (\varepsilon - \varepsilon_2) 2\sqrt{2}E_{0x} \operatorname{sh} \xi_2 \right] e^{-(l+1/2)\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_l^{\pm m} = \begin{pmatrix} 8\pi a \tilde{\sigma}_{1,l}^{\pm m} e^{-(l+1/2)\xi_1} \\ 8\pi a \tilde{\sigma}_{2,l}^{\pm m} e^{-(l+1/2)\xi_2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Данная система уравнений представляет собой систему с блочной трехдиагональной матрицей. Для решения таких задач разработан ряд численных методов, в данной работе используются методы матричной прогонки и редукции [47]. (В работе [34] решение такой системы для случая незаряженных частиц получено в виде бесконечной дроби.)

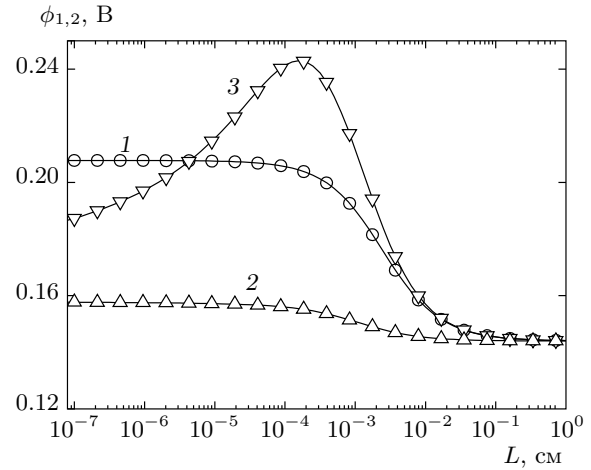


Рис. 2. Потенциалы поверхностей макрочастиц как функции наименьшего расстояния между их поверхностями: 1 — при $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $q_1 = q_2 = 10^3 e$; 2, 3 — при $a_1 = 10$ мкм, $a_2 = 1$ мкм, $q_1 = 10^3 e$, $q_2 = 10^2 e$ (2 — потенциал поверхности большей частицы, 3 — меньшей). Сплошные линии — результаты расчетов в настоящей работе при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$ для $\eta = 0$, символы — для макрочастиц из проводящего материала с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$ согласно [18, 19]

На рис. 2 приведены зависимости потенциала поверхности макрочастиц в случае большой диэлектрической постоянной $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$ для частиц одинакового и разного радиусов от наименьшего расстояния между их поверхностями: $L = (R - a_1 - a_2)$. При такой большой диэлектрической проницаемости частицы ведут себя практически как металлические, поэтому потенциал почти не меняется на всей поверхности макрочастицы (данные для $\eta = 0$ и π , где потенциал принимает свои экстремальные значения, практически совпадают). Например, при $L = 10^{-7}$ см отношение потенциалов у поверхности в случае частиц одинакового размера при $\eta = 0$ и $\eta = \pi$ отличается от единицы на $8.4 \cdot 10^{-6}$. Наблюдается полное согласие с аналогичным графиком для металлических макрочастиц из работ [18, 19]. Далее перейдем к вычислению силы взаимодействия частиц.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При вычислении равнодействующей сил, приложенных к диэлектрическому телу можно использовать максвелловский тензор натяжений [46] (вычисления будем проводить для первой макрочастицы,

которая находится со стороны положительных значений оси z , поэтому сила отталкивания со стороны второй макрочастицы для нее будет положительной, а притяжения — отрицательной):

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T}_{1n} dS, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1n} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_n \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{n} E^2 \right) \Big|_{\xi=\xi_1} \equiv \\ &\equiv \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{1}{2} (E_n^2 - E_\tau^2) \mathbf{n} + E_n E_\tau \boldsymbol{\tau} \right) \Big|_{\xi=\xi_1}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$E_n = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}_\xi;$$

$$E_\tau = -\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_1}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\eta;$$

\mathbf{e} — ортонормированные базисные векторы. Отметим, что

$$(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z) = -\cos \theta, \quad (\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z) = -\sin \theta.$$

Из формул (19), (20) для силы, действующей на первую частицу, находим (в этих формулах подразумевается, что все величины берутся при $\xi = \xi_1$)

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \left[\frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\text{sh } \xi \sin \eta \cos \varphi}{\text{ch } \xi - \cos \eta} + \right. \\ &+ E_\xi E_\eta \frac{(1 - \text{ch } \xi \cos \eta) \cos \varphi}{\text{ch } \xi - \cos \eta} + E_\xi E_\varphi \sin \varphi \left. \right] \times \\ &\times h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1y} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \left[\frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\text{sh } \xi \sin \eta \sin \varphi}{\text{ch } \xi - \cos \eta} + \right. \\ &+ E_\xi E_\eta \frac{(1 - \text{ch } \xi \cos \eta) \sin \varphi}{\text{ch } \xi - \cos \eta} - E_\xi E_\varphi \cos \varphi \left. \right] \times \\ &\times h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1z} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \left[\frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\text{ch } \xi \cos \eta - 1}{\text{ch } \xi - \cos \eta} + \right. \\ &+ E_\xi E_\eta \frac{\text{sh } \xi \sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta} \left. \right] h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (23) \end{aligned}$$

где h_ξ , h_η и h_φ — коэффициенты Ламэ, которые в бисферических координатах определяются выражениями [45]

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad h_\varphi = \frac{a \sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta}. \quad (24)$$

Используя свойства присоединенных полиномов Лежандра [5, 44, 45, 48, 49], после длинных выкладок для силы взаимодействия неоднородно-заряженных диэлектрических сфер в однородном диэлектрике в присутствии однородного внешнего электрического поля находим

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) \left[D_l^1 (\tilde{C}_{l-1} + \tilde{C}_{l+1} - 2\tilde{C}_l) - \right. \\ &- \tilde{C}_l^1 (D_{l-1} + D_{l+1} - 2D_l) \left. \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{8} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \times \\ &\times \left[D_l^{m+1} (\tilde{C}_{l-1}^m + \tilde{C}_{l+1}^m - 2\tilde{C}_l^m) + \right. \\ &+ D_l^{-(m+1)} (\tilde{C}_{l-1}^{-m} + \tilde{C}_{l+1}^{-m} - 2\tilde{C}_l^{-m}) - \\ &- \tilde{C}_l^{m+1} (D_{l-1}^m + D_{l+1}^m - 2D_l^m) - \\ &- \tilde{C}_l^{-(m+1)} (D_{l-1}^{-m} + D_{l+1}^{-m} - 2D_l^{-m}) \left. \right], \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1y} &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) \left[D_l^{-1} (\tilde{C}_{l-1} + \tilde{C}_{l+1} - 2\tilde{C}_l) - \right. \\ &- \tilde{C}_l^{-1} (D_{l-1} + D_{l+1} - 2D_l) \left. \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{8} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \times \\ &\times \left[D_l^{-(m+1)} (\tilde{C}_{l-1}^m + \tilde{C}_{l+1}^m - 2\tilde{C}_l^m) - \right. \\ &- D_l^{m+1} (\tilde{C}_{l-1}^{-m} + \tilde{C}_{l+1}^{-m} - 2\tilde{C}_l^{-m}) - \\ &- \tilde{C}_l^{-(m+1)} (D_{l-1}^m + D_{l+1}^m - 2D_l^m) + \\ &+ \tilde{C}_l^{m+1} (D_{l-1}^{-m} + D_{l+1}^{-m} - 2D_l^{-m}) \left. \right], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1z} &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (2l+1) \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \times \\ &\times (\tilde{C}_l^m D_l^m + \tilde{C}_l^{-m} D_l^{-m}) - \\ &- \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \left[(\tilde{C}_l^m D_{l+1}^m + \tilde{C}_l^{-m} D_{l+1}^{-m}) + \right. \\ &+ (\tilde{C}_{l+1}^m D_l^m + \tilde{C}_{l+1}^{-m} D_l^{-m}) \left. \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{C}_l = C_l - (2l+1)\sqrt{2}aE_{0z}$, $\tilde{C}_l^1 = C_l^1 - 2\sqrt{2}aE_{0x}$, $\tilde{C}_l^{-1} = C_l^{-1}$, $\tilde{C}_l^{\pm m} = C_l^{\pm m}$, $m > 1$ и принято, что $C_l^{-m} = C_l^m$ и $D_l^{-m} = D_l^m$ при $m = 0$.

В случае однородно-заряженных частиц и при отсутствии внешнего электрического поля из выражений (25)–(27) следует, что отлична от нуля только z -составляющая силы:

$$F_{1z} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \times \\ \times [(2n+1)D_n - (n+1)D_{n+1} - nD_{n-1}] \equiv \\ \equiv \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n [(2n+1)C_n - (n+1)C_{n+1} - nC_{n-1}]. \quad (28)$$

4. ПРИТЯЖЕНИЕ ОДНОИМЕННО- И ОДНОРОДНО-ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Отталкивание между одноименно-заряженными частицами может перейти в притяжение на малых расстояниях из-за взаимно наведенных зарядов на их поверхностях. Например, известно, что в случае взаимодействия точечного заряда с одноименно-заряженной проводящей или диэлектрической сферой они начинают притягиваться друг к другу на малых расстояниях [45]. Далее исследуем взаимодействие двух диэлектрических сферических частиц, несущих одноименные заряды, однородно распределенные по их поверхностям. Также для определенности полагаем, что $\varepsilon = 1$.

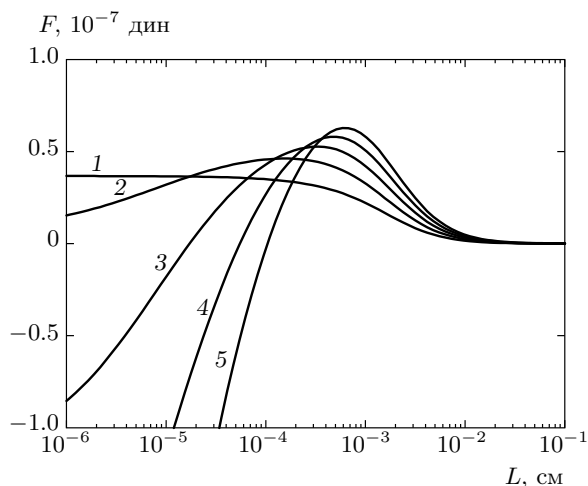


Рис. 3. Сила взаимодействия однородно-заряженных диэлектрических сфер в вакууме ($\varepsilon = 1$) как функция наименьшего расстояния между их поверхностями $L = (R - a_1 - a_2)$ для различных отношений зарядов при $a_1 = a_2 = 10^{-3}$ см, $q_1 = 10^3 e$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$. Кривая 1 — $q_1/q_2 = 1.0$, 2 — 1.5, 3 — 2.0, 4 — 2.5, 5 — 3

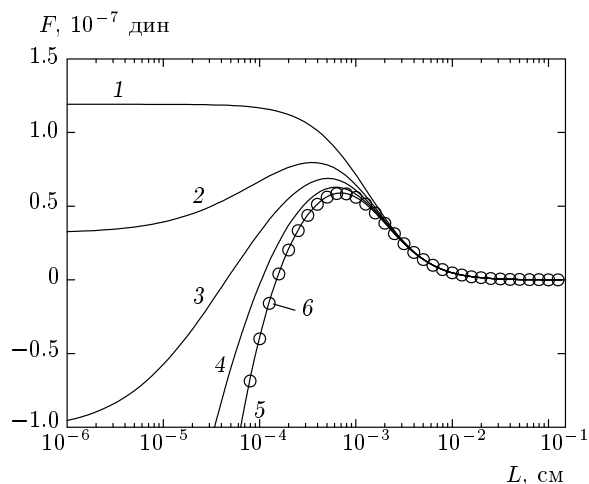


Рис. 4. Сила взаимодействия однородно-заряженных диэлектрических сфер в вакууме для различных диэлектрических постоянных от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $q_2 = 10^3 e$, $q_1 = 3q_2$. Кривая 1 — $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$, 2 — 5, 3 — 10, 4 — 25, 5 — 10^3 , 6 — расчеты для металлических частиц $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$ согласно работам [18, 19]

На рис. 3 изображена зависимость силы взаимодействия одинаковых частиц с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$ от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц для различных отношений зарядов. Отрицательные значения силы соответствуют притяжению, а положительные — отталкиванию. Видно, что с ростом отношения зарядов отталкивание одноименно-заряженных макрочастиц переходит в притяжение. Для рассматриваемой диэлектрической постоянной это происходит при значении отношения q_1/q_2 между 1.5 и 2 (точнее при $q_1/q_2 \approx 1.556$, а при уменьшении отношения зарядов это происходит при $q_1/q_2 \approx 0.6426$, что является числом, обратным предыдущему, см. ниже).

Рисунок 4 показывает, как меняется характер взаимодействия двух сфер одинакового радиуса с отношением зарядов $q_1/q_2 = 3$ при изменении их диэлектрической проницаемости. Ясно видно, что увеличение диэлектрической постоянной приводит к уменьшению силы отталкивания на больших расстояниях и приводит к переходу отталкивания в притяжение на малых расстояниях (это происходит при значении диэлектрической проницаемости между 5 и 10), причем сила притяжения оказывается тем больше, чем больше значение диэлектрической проницаемости. Также видно, что при больших значениях диэлектрической проницаемости сила практи-

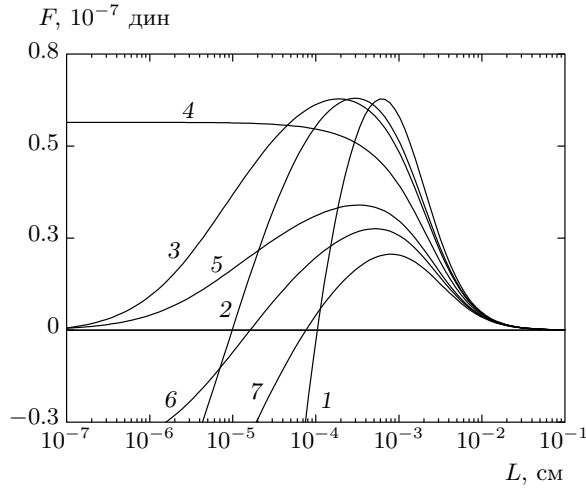


Рис. 5. Сила взаимодействия между сферическими частицами в вакууме для разных отношений радиусов макрочастиц a_1/a_2 от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_2 = 10$ мкм, $q_1 = 3q_2$, $q_2 = 10^3 e$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$. Кривая 1 — $a_1/a_2 = 1$, 2 — 1.3, 3 — 1.425, 4 — 1.828, 5 — 2.345, 6 — 2.6, 7 — 3.0

чески совпадает с силой взаимодействия металлических частиц.

На рис. 5 приведены зависимости силы взаимодействия для диэлектрических частиц с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$ и с зарядами $q_1 = 3q_2$ для разных отношений их радиусов. Видно, как по мере увеличения отношения радиусов a_1/a_2 исчезает и снова появляется эффект притяжения. Такое поведение понятно из рис. 6, на котором приведены кривые для нескольких значений диэлектрической проницаемости частиц, которые ограничивают область параметров на плоскости $(a_1/a_2, q_1/q_2)$, в которой эффект притяжения одноименно-заряженных диэлектрических частиц не проявляется (эта область лежит между кривыми, различающимися индексами 1 и 2 при одной и той же букве для каждого значения диэлектрической проницаемости). Кривая 3 на рис. 5 соответствует точке пересечения кривой C_2 с прямой $q_1/q_2 = 3$ на рис. 6, а кривая 5 — точке пересечения той же прямой с кривой C_1 .

Далее покажем, что границы области, в которой отсутствует эффект притяжения, определяются только отношением радиусов и зарядов равномерно заряженных частиц. Для этого выпишем уравнения для определения коэффициентов разложения потенциала для случая равномерного распределения свободного заряда по поверхностям частиц в среде без внешнего электрического поля. Разделив получив-

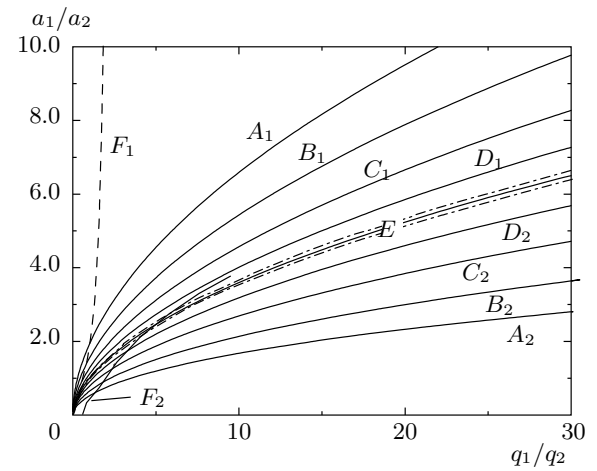


Рис. 6. Кривые, разделяющие области притяжения и отталкивания одноименно- и однородно-заряженных макрочастиц на плоскости $(a_1/a_2, q_1/q_2)$ для различных значений их диэлектрической проницаемости. В области между кривыми A_1 и A_2 , B_1 и B_2 и т. д. притяжения нет ни при каких расстояниях. Кривые (A_1, A_2) для $\kappa_1 = \kappa_2 = 5$, (B_1, B_2) — 10, (C_1, C_2) — 25, (D_1, D_2) — 81, штрихпунктирные кривые — 1000, кривая E согласно (35) для проводящих макрочастиц, (F_1, F_2) оцифрованные данные из [37] для $\kappa_1 = \kappa_2 = 25$

шиеся уравнения на $2\sqrt{2\varepsilon} \sqrt{q_1 q_2 / a_1 a_2}$, для рассматриваемого случая из формул (12)–(16) находим:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \kappa_1) l e^{\xi_1} \tilde{C}_{l-1} - (1 + \kappa_1) l e^{2\xi_1} \tilde{D}_{l-1} + \\
 & + (1 - \kappa_1) [\text{sh } \xi_1 - (2l + 1) \text{ch } \xi_1] \tilde{C}_l + \\
 & + [(1 - \kappa_1) \text{sh } \xi_1 + (2l + 1) (1 + \kappa_1) \text{ch } \xi_1] e^{(2l+1)\xi_1} \tilde{D}_l + \\
 & + (l + 1) (1 - \kappa_1) e^{-\xi_1} \tilde{C}_{l+1} - (l + 1) \times \\
 & \times (1 + \kappa_1) e^{2(l+1)\xi_1} \tilde{D}_{l+1} = \\
 & = \sqrt{\frac{q_1}{q_2} \frac{a_2}{a_1}} \text{sh } \xi_1, \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (1 + \kappa_2) l e^{2l\xi_2} \tilde{C}_{l-1} + (1 - \kappa_2) l e^{\xi_2} \tilde{D}_{l-1} + \\
 & + [(1 - \kappa_2) \text{sh } \xi_2 + (2l + 1) (1 + \kappa_2) \text{ch } \xi_2] e^{(2l+1)\xi_2} \tilde{C}_l + \\
 & + (1 - \kappa_2) [\text{sh } \xi_2 - (2l + 1) \text{ch } \xi_2] \tilde{D}_l - \\
 & - (l + 1) (1 + \kappa_2) e^{2(l+1)\xi_2} \tilde{C}_{l+1} + (l + 1) (1 - \kappa_2) \times \\
 & \times e^{-\xi_2} \tilde{D}_{l+1} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1} \frac{a_1}{a_2}} \text{sh } \xi_2, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где введены новые коэффициенты и относительные диэлектрические проницаемости:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_l &= \frac{C_l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}}, & \tilde{D}_l &= \frac{D_l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}}, \\ \kappa_1 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, & \kappa_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь, с учетом того, что

$$\xi_1 = \xi_1 \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2} \right), \quad \xi_2 = \xi_2 \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2} \right),$$

из формул (29), (30) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{C}_l &= \tilde{C}_l \left(\frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right), \\ \tilde{D}_l &= \tilde{D}_l \left(\frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно, при подстановке (31), (32) в (28) находим, что

$$F_{1z} = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{a_1 a_2} f \left(\frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right), \quad (33)$$

где f — неизвестная функция указанных аргументов. Из выражения (33) следует, что наличие или отсутствие эффекта притяжения на малых расстояниях зависит только от относительных величин q_1/q_2 , a_1/a_2 , κ_1 и κ_2 , а не от абсолютных их значений (величина самой силы конечно зависит). Так как точная граница определяется уравнением $F_{1z} = 0$ при $L = 0$, то ее положение является функцией только q_1/q_2 и a_1/a_2 , а также κ_1 и κ_2 .

На рис. 6 видно, что с ростом диэлектрической проницаемости частиц область, где отсутствует эффект притяжения, постепенно сужается и для проводящих частиц ($\varepsilon_{1,2} \rightarrow \infty$) эта область превращается в кривую с нулевой площадью. Подробное исследование данного вопроса для проводящих частиц проведено в работе [8] с использованием асимптотических выражений для емкостных коэффициентов при $L \rightarrow 0$ [6, 7]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} - \psi \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) + O(L) \right], \\ C_{22} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} - \psi \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) + O(L) \right], \\ C_{12} &= -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} + \gamma + O(L) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где $\psi(z) = d \ln \Gamma(z)/dz$ — логарифмическая производная гамма функции или дигамма функция, γ — постоянная Эйлера: $\gamma = 0.5772156649 \dots$

В работе [8] показано, что эффект притяжения не проявится, только если сферические проводники имеют заряды в таком отношении, которое наблюдалось бы в случае приведения их в электрический контакт, когда потенциалы их поверхностей станут точно равными друг другу. Используя приведенные выше емкостные коэффициенты, можно найти энергию электрического поля, дифференцируя которую можно увидеть, что сила взаимодействия станет отрицательной только при выполнении условия [8]

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\gamma + \psi \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \right)}{\gamma + \psi \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} \right)}. \quad (35)$$

В работе [21] также был сделан следующий вывод: когда отношение зарядов проводящих сфер отличается от отношения их зарядов после приведения в электрический контакт, то притяжение проявится всегда. В этой работе было найдено условие равенства потенциалов поверхностей в виде

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{12} + C_{22}}, \quad (36)$$

которое после подстановки выражений (34) точно переходит в (35).

На рис. 6 видно, что области, где на малых расстояниях появляется притяжение, и область, где на всех расстояниях наблюдается только отталкивание одноименно-заряженных частиц, разделены двумя кривыми. Введем величину $y = a_1/a_2$ и обозначим эти кривые как $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $x = q_1/q_2$. Вследствие равенства сил, действующих на первую и вторую частицы, при $\kappa_1 = \kappa_2$ положение точки нуля не должно меняться при перестановке частиц. Поэтому между этими функциями должны существовать соотношения:

$$y_1(x) = y_2^{-1}(x^{-1}), \quad y_2(x) = y_1^{-1}(x^{-1}).$$

Действительно, если при некотором $q_1/q_2 = x$ граница между областями лежит соответственно в точках $a_1/a_2 = y_1(x)$ и $a_1/a_2 = y_2(x)$, то при перестановке частиц для $q_2/q_1 = x^{-1}$ в точках $a_2/a_1 = y_1^{-1}(x)$ и $a_2/a_1 = y_2^{-1}(x)$. На рис. 7 приведены графики $y_1(x)$ и $y_2^{-1}(x^{-1})$, которые действительно совпадают (в случае проводников это совпадение хорошо видно из формулы (35)). Также видно, что поведение кривых при изменении отношения зарядов частиц для

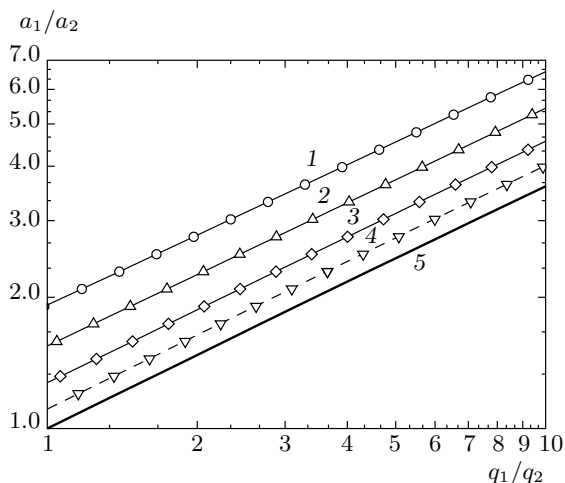


Рис. 7. Границы области притяжения и отталкивания одноименно- и однородно-заряженных макрочастиц в логарифмическом масштабе. Кривые (1–4) графики $y_1(x)$, символы — $y_2^{-1}(x^{-1})$. Кривая 1 и \circ для $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5$; 2, Δ — 10; 3, \diamond — 25; 4, ∇ — 81; 5 — кривая согласно (35) для проводящих макрочастиц

различных значений диэлектрической проницаемости похожи другу на друга, а сами кривые близки к прямым линиям (это имеет место только для исследованного здесь диапазона отношений радиусов), поэтому они могут быть представлены в виде:

$$y_1(x) = kx^\alpha, \quad y_2(x) = k^{-1}x^\alpha,$$

причем степень $\alpha \approx 0.56$ и практически не меняется при изменении диэлектрической проницаемости частиц, а коэффициент k растет с уменьшением ϵ_1 и ϵ_2 .

На рис. 8 приведены графики произведения функций $x_1(y)$ и $x_2(y^{-1})$, которые являются обратными функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Видно, что это произведение близко к единице, но с уменьшением и увеличением отношения радиусов отличие от единицы растет и становится чуть больше 0.1% при $a_1/a_2 = 0.1$ и 10 для $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 81$. Отметим, что данные на рис. 6–8 рассчитаны с максимальным числом учитываемых членов при вычислении силы $l_{max} = 2^{16}$ и при наименьшем расстоянии между поверхностями $L = 10^{-9}$ см. Значения отношения q_1/q_2 , при которых для заданного отношения радиусов сила становится равной нулю, определялись при фиксированных $a_2 = 10$ мкм и $q_2 = 10^3 e$ (e — элементарный заряд). Указанное отличие от единицы произведения функций $x_1(y)$ и $x_2(y^{-1})$ связано с тем, что корни уравнения $F_{1z} = 0$ находились

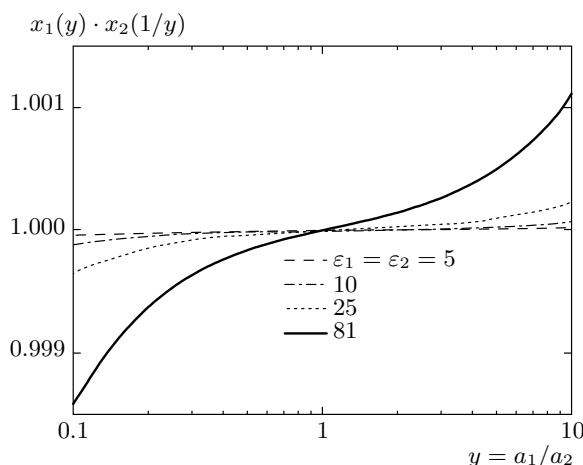


Рис. 8. Произведение функций $x_1(y)$ и $x_2(y^{-1})$, определяющих границы области притяжения и отталкивания одноименно- и однородно-заряженных макрочастиц на плоскости ($y = a_1/a_2$, $x = q_1/q_2$) для различных значений их диэлектрической проницаемости

при конечном расстоянии $L = 10^{-9}$ см, а не при контакте частиц. Для «точного» значения отношения зарядов на границе областей на этом расстоянии сила еще положительна. При этом для постоянного межчастичного расстояния оказывается, что приведенное значение расстояния $\tilde{L} = L/\sqrt{a_1 a_2}$ для $a_1/a_2 = 0.1$ и $a_1/a_2 = 10$ различаются в 10 раз. Если пересчитать границы при постоянном $\tilde{L} = 10^{-6}$, то максимальное (по абсолютной величине) отличие произведения $x_1(y)x_2(y^{-1})$ от единицы в диапазоне $0.1 \leq y \leq 10$ будет равно $3.8 \cdot 10^{-8}$ (см. также табл. 1).

Такая высокая точность определения произведения $x_1(y)x_2(y^{-1})$ еще не позволяет судить о точности определения положения самих границ, а говорит только о том, что положение точки, где сила обращается в нуль, действительно определяется только отношениями радиусов и зарядов. Например, в работе [18] было показано, что при $a_1 = a_2$ и $q_1/q_2 = 1.0035$ притяжение между проводящими шарами появляется на расстоянии $L \lesssim 10^{-10}$ см (см. рис. 12 в работе [18]), хотя притяжение на всех расстояниях отсутствует только при точном равенстве $q_1 = q_2$.

О точности определения положения границ можно судить по данным, представленным в табл. 1. Видно, что по мере уменьшения приведенного расстояния, относительная точность определения отношения зарядов на границе растет и при $\tilde{L} = 10^{-6}$ оказывается лучше 0.05%. (Отметим, что в табл. 1 приведены отношения зарядов на границах только с

Таблица 1. Отношения зарядов на верхней и нижней границах между областями, где есть притяжение на малых расстояниях и нет на всех расстояниях, для разных значений приведенного расстояния между поверхностями диэлектрических частиц с $\kappa_1 = \kappa_2 = 81$ при числе учитываемых членов до $l_{max} = 2^{17}$ и $a_2 = 10^{-3}$ см

$L/\sqrt{a_1 a_2}$		10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
$a_1 = 0.1a_2$ ($y = 0.1$)	x_1	0.011231	0.011226	0.011177	0.010824	0.009398
	x_2	54.51514	54.49613	54.31719	53.04312	48.03530
$a_1 = a_2$ ($y = 1$)	x_1	0.830659	0.830513	0.829102	0.817913	0.765078
	x_2	1.203864	1.204076	1.206124	1.222623	1.307056
$a_1 = 10a_2$ ($y = 10$)	x_1	0.018344	0.018350	0.018410	0.018853	0.020818
	x_2	89.04120	89.08239	89.47332	92.38390	106.40605
f_1^a		1.899	6.429	-2.572	3.284	-0.661
f_2^b		4.881	-5.095	-2.521	2.701	-1.702
f_3^c		0.250	1.847	-3.416	-2.692	-0.946

Примечание. $^a f_1 = [x_1(y=1)x_2(y=1) - 1] \cdot 10^{11}$, $^b f_2 = [x_1(0.1)x_2(10) - 1] \cdot 10^9$, $^c f_3 = [x_1(10)x_2(0.1) - 1] \cdot 10^9$

7 знаками, а величины f_1, f_2 и f_3 вычислялись по исходным значениям отношения зарядов, полученным с точностью 15 знаков.)

В работе [37] также были определены границы областей притяжения и отталкивания. Однако эти результаты заметно отличаются от наших данных, приведенных на рис. 6, и не симметричны по отношению к операции перестановки частиц²⁾. Видно, что кривые F_1, F_2 весьма сильно отличаются от C_1, C_2 , а F_2 пересекает даже кривую для проводящих частиц. Также необходимо отметить, что при $a_2 = 0$ на рис. 6 в работе [37] существует область значений отношения q_2/q_1 (до 2 при $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$), в которой нет притяжения между частицами. Между тем хорошо известно [45, 48], что между точечной и диэлектрической частицами сферической формы нет притяжения только при выполнении неравенства $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, т.е. при $\kappa_1 \leq 1$, а при $\kappa_1 > 1$ притяжение на малых расстояниях обязательно проявится. Далее, при $\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$ сила взаимодействия диэлектрических частиц незначительно отличается от случая проводящих частиц и кривые, отделяющие области притяжения и отталкивания, должны быть близки к кривой E , что имеет место на нашем рис. 6, а в работе [37] область отталкивания для данного значения диэлектрической проницаемости намного шире.

²⁾В работе [37] границы областей притяжения и отталкивания построены на плоскости $(a_2/a_1, q_2/q_1)$, но в свете сказанного выше по поводу симметрии границ по отношению к операции перестановки частиц это не имеет никакого значения.

Таблица 2. Приведенная сила взаимодействия ($F_{12}a_1a_2/q_1q_2$) двух одинаковых сферических частиц при $L = 10^{-10}$ см и числе учитываемых членов при вычислении силы $l_{max} = 2^{16}$ в настоящей работе и $L = 0$ и числе учитываемых членов мультипольного разложения потенциала $n = 30$ в [37]

	Настоящая работа	Работа [37]
$\kappa_1 = \kappa_2 = 2$	0.210013282363	0.2100132974
$\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$	0.153866817435	0.153866795

В работе [37] задача решалась в сферической системе координат, которая приводила к обычной системе уравнений для определения коэффициентов мультипольного разложения потенциала. В табл. 2 представлены значения приведенной силы (определенной как $\tilde{F}_{1z} = F_{1z}a_1a_2/q_1q_2$) для двух одинаковых диэлектрических частиц с $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ и $\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$. В настоящей работе расчеты проведены при $l_{max} = 2^{16}$ (при увеличении числа членов до $l_{max} = 2^{17}$ приведенная сила менялась только на единицу в последнем знаке приведенных в таблице чисел). Сравнение представленных в таблице данных показывает, что точность определения приведенной силы в работе [37] была достаточно высокой, по крайней мере, для частиц равного размера, и причины неточного определения границы областей притяжения и отталкивания в работе [37] остаются неясными. Отметим, что для проводящих шаров одинаковых размеров и зарядов [3, 8]

$$\tilde{F}_{1z} = F_{1z} \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2} = \frac{4 \ln 2 - 1}{24 \ln^2 2} = 0.153725465,$$

а расчеты для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$ дали $\tilde{F}_{1z} = 0.153728821$ при $L = 10^{-10}$ см, что позволяет судить о точности проведенных в настоящей работе расчетов. Расчеты по полученным в работах [18, 19] выражениям для проводящих частиц с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$ при том же числе членов разложения и на том же межчастичном расстоянии привели к $\tilde{F}_{1z} = 0.153725458$, что позволяет сделать вывод о том, насколько различаются силы при $L = 0$ и $L = 10^{-10}$ см.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача о взаимодействии двух диэлектрических частиц сферической формы в однородном диэлектрике с использованием бисферических координат. Представлено аналитическое выражение для потенциала и силы взаимодействия двух сферических частиц в наиболее общем случае неоднородного распределения свободного заряда по их поверхностям и в присутствии однородного внешнего электрического поля. Подробно исследовано взаимодействие частиц разных размеров и разных зарядов для ряда значений диэлектрической проницаемости материала частиц при однородном распределении свободного заряда, в результате чего установлена область параметров, в которой отталкивание одноименно-заряженных частиц сменяется притяжением на малых межчастичных расстояниях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-01177а) и гранта Президента РФ (№ НШ-2447.2012.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод разложения поверхностного заряда в бисферической системе координат

Для получения выражения (9) воспользуемся подходом, предложенным в работе [50]. Произведение $R_i^n P_n^m(\cos \theta_i)$ является гармонической функцией, поэтому она в бисферических координатах может быть представлена в виде

$$\left(\frac{R_i}{a_i}\right)^n P_n^m(\cos \theta_i) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \times \times \sum_{l \geq 0} b_{i,l}^{nm} e^{-(l+1/2)|\xi|} P_l^m(\cos \eta), \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Здесь R_i — длина радиус-вектора из центра i -й частицы к точке наблюдения, θ_i — угол между этим радиус-вектором и положительным направлением оси z .

Чтобы отыскать искомые коэффициенты разложения $b_{i,l}^{nm}$, рассмотрим предел $\eta \rightarrow 0$. В этом пределе для $0 < |\xi| < \xi_i$ имеем

$$\frac{R_i}{a_i} = (-e^{-\xi_i}) \frac{1 - e^{2\xi_i} e^{-|\xi|}}{1 - e^{-|\xi|}}, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \eta} = \frac{a_i}{R_i} \frac{\operatorname{sh} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi - 1}$$

и с учетом предела

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P_n^m(\cos \eta) = \sin^m \eta P_n^{(m)}(1)$$

выражение (37) принимает вид

$$\left(\frac{R_i}{a_i}\right)^n \left(\frac{a_i}{R_i} \frac{\operatorname{sh} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi - 1}\right)^m P_n^{(m)}(1) = = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - 1} e^{-1/2|\xi|} \sum_{l \geq 0} b_{i,l}^{nm} e^{-l|\xi|} P_l^{(m)}(1). \quad (38)$$

Здесь $P_n^{(m)}(1)$ — m -я производная полиномов Лежандра при аргументе, равном единице:

$$P_n^{(m)}(1) = \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!}. \quad (39)$$

Окончательно, разлагая выражение в левой части равенства (38) по степеням $e^{-|\xi|}$ для коэффициентов $b_{i,l}^{nm}$, получим выражение (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Hoffman, *Andre'-Marie Ampe're, Poisson's 1812 Electricity Memoir*, Cambridge (1995), p. 113.
2. R. W. Home, *British J. Hist. Sci.* **16**, 239 (1983).
3. W. Thomson, *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, Macmillan, London, UK (1884), p. 86.
4. Дж. К. Максвелл, *Трактат об электричестве и магнетизме*, т. 1, Наука, Москва (1989), с. 201. [J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd edn. Oxford, UK, Clarendon Press (1891)].
5. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, ИИЛ, Москва (1952). [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Univ. Press, Cambridge (1931)].
6. A. Russell, *Proc. R. Soc. Lond. A* **82**, 524 (1909).
7. J. Lekner, *J. Electrostatics* **69**, 11 (2011).

8. J. Lekner, Proc. R. Soc. A **468**, 2829 (2012).
9. G. B. Jeffery, Proc. R. Soc. Lond. A **87**, 109 (1912).
10. A. Moussiaux and A. Ronveaux, J. Phys. A **12**, 423 (1979).
11. A. V. Khachatourian and A. O. Wistrom, J. Phys. A: Math. Theor. **33**, 307 (2000).
12. A. V. Khachatourian and A. O. Wistrom, J. Colloid. Interf. Sci. **242**, 52 (2001).
13. A. O. Wistrom and A. V. Khachatourian, Aerosol Sci. Techn. **35**, 865 (2001).
14. В. А. Саранин, УФН **169**, 453 (1999).
15. В. А. Саранин, УФН **172**, 1449 (2002).
16. Е. А. Щерба, А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, ЖТФ **72**, 15 (2002).
17. Y. H. Su, Phys. Fluids **18**, 042108 (2006).
18. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).
19. A. V. Filippov, Contrib. Plasma Phys. **49**, 433 (2009).
20. В. А. Саранин, В. В. Майер, УФН **180**, 1109 (2010).
21. С. И. Гращенко, ЖТФ **81**, 13 (2011).
22. J. Lekner, J. Electrostatics **68**, 299 (2010).
23. J. Lekner, J. Electrostatics **69**, 559 (2011).
24. J. Lekner, J. Electrostatics **69**, 435 (2011).
25. J. Lekner, J. Appl. Phys. **111**, 076102 (2012).
26. K. Kolikov, D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, and S. Bozhkov, J. Electrostatics **70**, 91 (2012).
27. M. H. Davis, Q. J. Mech. Appl. Math. **17**, 499 (1964).
28. D. J. O'Meara and D. A. Saville, Q. J. Mech. Appl. Math. **34**, 9 (1981).
29. J. D. Love, Q. J. Mech. Appl. Math. **28**, 449 (1975).
30. A. Goyette, A Navon, Phys. Rev. B **13**, 4320 (1976).
31. R. D. Stoy, J. Appl. Phys. **65**, 2611 (1989).
32. R. D. Stoy, J. Appl. Phys. **66**, 5093 (1989).
33. H. M. Ymeri, Electr. Engin. **80**, 227 (1997).
34. P. Chaumet and J. Dufour, J. Electrostatics **43**, 145 (1998).
35. J. Q. Feng, Phys. Rev. E **62**, 2891 (2000).
36. Y. Nakajima and T. Sato, J. Electrostatics **45**, 213 (1999).
37. E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and A. J. Stace, J. Chem. Phys. **133**, 024105 (2010).
38. A. J. Stace, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and E. Bichoutskaia, J. Colloid Interface Sci. **354**, 417 (2011).
39. A. J. Stace and E. Bichoutskaia, Phys. Chem. Chem. Phys. **13**, 18339 (2011).
40. A. J. Stace and E. Bichoutskaia, Soft Matter **8**, 6210 (2012).
41. M. Washizu, J. Electrostatics **29**, 177 (1993).
42. M. Washizu and T. B. Jones, J. Electrostatics **33**, 187 (1994).
43. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **142**, 594 (2012).
44. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, New York (1953).
45. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
46. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8. *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (2005).
47. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва (1978).
48. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, ИИЛ, Москва (1954). [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York, Toronto, London, 2-nd ed. (1950)].
49. Т. М. MacRobert, *Spherical Harmonics*, Metiuen & Co. Ltd., London, 2-nd edition, revised (1947).
50. M. S. Ingber and A. Zinchenko, Int. J. Multiphase Flow **42**, 152 (2012).