

КВАЗИЭНЕРГИЯ ОДИНОЧНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ И БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

Н. Н. Розанов^{a,b,c}, Г. Б. Сочилин^a*

*^a Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова
199053, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

*^c Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 25 июля 2013 г.

Для одиночных квантовых частиц и атомарного бозе-эйнштейновского конденсата в ловушке с периодически колеблющимися стенками с малой глубиной модуляции аналитически найдены квазиэнергетические состояния. Показано наличие резонанса при приближении частоты модуляции к разности частот, отвечающих уровням в случае невозмущенной задачи. В резонансном случае найдено расщепление квазиэнергии и, соответственно, биения с периодическим обменом населенностью между двумя находящимися в резонансе уровнями. Для конденсата Бозе–Эйнштейна в резонансных условиях обнаружена бистабильность отклика на модуляцию размера ловушки, когда при одних и тех же условиях возможно поддержание (в зависимости от начальных условий) различных квазиэнергетических состояний.

DOI: 10.7868/S0044451014010143

1. ВВЕДЕНИЕ

Принципиальное различие между частицами и волнами ярко проявляется в их поведении в прямоугольном потенциальном ящике («яме») с колеблющимися стенками. Исходно неподвижная классическая частица, не затрагиваемая движущейся стенкой, сохраняет свое положение. Однако квантовая частица в подобной динамической ловушке будет резонансно возбуждаться, и центр тяжести волнового пакета может испытывать колебания. Аналогичное возбуждение колебаний реализуется в таких классических волновых системах, как электродинамический [1] или акустический [2] резонатор с движущимися зеркалами, что подтверждает правомерность термина «волновая механика» применительно к квантовым объектам.

Достигнутое экспериментально длительное удержание заряженных и нейтральных частиц в ловуш-

ках открывает новые возможности прецизионных экспериментов и создания сверхточных стандартов частоты и времени [3]. Ловушки могут удерживать как одиночные частицы, так и наборы охлажденных атомов [4–6]. Последнее время повысился интерес к удержанию охлажденных атомов в динамических ловушках, когда возможным оказывается их бистабильный отклик на модуляцию положения стенок ловушки [7–9].

Прямоугольная потенциальная яма с бесконечно высокими стенками служит простейшей моделью «идеальной» ловушки для одиночной квантовой частицы [10]. Однако в такой яме частица полностью изолирована и не подвержена внешним воздействиям. В случае же потенциала, в котором одна из стенок периодически движется, область локализации тоже периодически меняется. В данном случае ловушка служит не только для локализации, но и для возбуждения частицы.

В настоящей работе, прежде всего, определяют квазиэнергетические состояния одиночной квантовой частицы в потенциальной яме с колеблющи-

*E-mail: nrosanov@yahoo.com

мися стенками. Эта задача сводится к решению линейного уравнения Шредингера (разд. 2). Отметим, что, в отличие от [7–9], в рассматриваемой нами схеме отсутствует электромагнитное излучение. Далее в разд. 3 в рамках нелинейного уравнения Гросса–Питаевского определяются квазиэнергетические состояния бозе-эйнштейновского атомарного конденсата в динамической ловушке. По сравнению с классическими электродинамической [1] и акустической [2] задачами, принципиальное значение в рассматриваемом здесь квантовом случае имеет сильная дисперсия.

2. ОДИНОЧНАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА

Одномерное уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(x, t)$ частицы с массой m в прямоугольной потенциальной яме и граничные условия к нему имеют следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad L_l(t) < x < L_r(t), \quad (2.1)$$

$$\psi(x = L_l(t), t) = 0, \quad \psi(x = L_r(t), t) = 0.$$

Здесь x — координата, t — время, \hbar — постоянная Планка, $L_{l,r}(t)$ — координаты соответственно левой и правой стенок. Согласно (2.1), норма волновой функции сохраняется (не зависит от времени):

$$\int_{L_l(t)}^{L_r(t)} |\psi(x, t)|^2 dx = N_s = \text{const}. \quad (2.2)$$

Движение стенок будем считать периодическим с периодом T , частотой $\Omega = 2\pi/T$ и малой глубиной модуляции $\mu \ll 1$:

$$L_{l,r}(t) = L_{l,r,0} [1 + \mu_{l,r} \cos(\Omega t)]. \quad (2.3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $L_{l,0} = 0$, и заменить $L_{r,0}$ на L_0 .

При $\mu = 0$ очевидные решения (2.1) представлены дискретным спектром:

$$\psi_n^{(0)}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L_0}} \exp\left(-i\frac{E_n^{(0)}}{\hbar} t\right) \times$$

$$\times \sin\left(k_n^{(0)} x\right), \quad k_n^{(0)} = \frac{\pi n}{L_0}, \quad (2.4)$$

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^{(0)2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L_0^2} n^2,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В данной задаче удобнее находить состояния с определенной квазиэнергией ε [11–13]:

$$\psi_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, t) \exp\left(-i\frac{\varepsilon}{\hbar} t\right), \quad (2.5)$$

$$u_\varepsilon(x, t + T) = u_\varepsilon(x, t).$$

Периодические по времени функции $u_\varepsilon(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$u_\varepsilon(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \chi_{\varepsilon,l}(x) \exp(-il\Omega t). \quad (2.6)$$

Тогда для функций $\chi_{\varepsilon,l}(x)$ получаем

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi_{\varepsilon,l}}{dx^2} = -(\varepsilon + \hbar\Omega l) \chi_{\varepsilon,l}. \quad (2.7)$$

При этом должны быть удовлетворены указанные в формуле (2.1) граничные условия.

Далее рассмотрим два предельных случая движения стенок ловушки.

2.1. Неподвижная левая и колеблющаяся правая стенки

В этом случае $\mu_l = 0$, $\mu_r = \mu$, $L_l(t) = 0$. Решение (2.7) имеет вид

$$\chi_{\varepsilon,l}(x) = \begin{cases} \sin(k_{\varepsilon,l} x), & \varepsilon + \hbar\Omega l > 0, \\ \text{sh}(k_{\varepsilon,l} x), & \varepsilon + \hbar\Omega l < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где

$$k_{\varepsilon,l} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{|\varepsilon + \hbar\Omega l|}.$$

При этом уравнение Шредингера (2.1) и граничное условие при $x = 0$ удовлетворяются автоматически. Граничное условие на движущейся границе приводит к уравнению

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \chi_{\varepsilon,l} \{L_0 [1 + \mu \cos(\Omega t)]\} \exp(-il\Omega t) = 0. \quad (2.9)$$

Разлагаем входящие в (2.9) периодические функции времени $\chi_{\varepsilon,l}$ в ряд Фурье:

$$\chi_{\varepsilon,l} \{L_0 [1 + \mu \cos(\Omega t)]\} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_{l,p}(\varepsilon) \exp(ip\Omega t), \quad (2.10)$$

$$F_{l,p}(\varepsilon) = F_{l,-p}(\varepsilon).$$

Коэффициенты Фурье $F_{l,p}(\varepsilon)$ выражаются через функции Бесселя с целыми индексами. Теперь из (2.9) следует соотношение

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{l,q+l}(\varepsilon) a_l = 0, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.11)$$

Это бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_l . Равенство нулю определителя системы даст точное уравнение для определения квазиэнергий ε . При $\mu \ll 1$, в пренебрежении членами порядка μ^n , $n > 1$, имеем

$$\begin{aligned} F_{l,0} &= \chi_{\varepsilon,l}(L_0), \\ F_{l,1} &= F_{l,-1} = \frac{\mu L_0}{2} \frac{\partial \chi_{\varepsilon,l}}{\partial x}(L_0), \\ F_{l,p} &= 0, \quad |p| > 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.1. Теория возмущений, нерезонансный случай

Используем теорию возмущений по μ , полагая, что в нулевом порядке (верхний индекс «(0)») реше-

ние переходит в чистое состояние (2.4) с определенным значением n ,

$$\chi_{\varepsilon,l}^{(0)}(x) = \chi_{E_n^{(0)},l}(x), \quad k_{\varepsilon,l}^{(0)} = \frac{\sqrt{2m|E_n^{(0)} + \hbar\Omega l|}}{\hbar}$$

и что частота модуляции не близка к частоте переходов между уровнями невозмущенной системы. Заметим, что в данном случае использование традиционной теории возмущений с разложением по собственным функциям невозмущенной задачи (2.4) не позволяет обеспечить выполнение граничного условия на движущейся границе. Полагая $\varepsilon = E_n^{(0)} + \mu\varepsilon_1 + \dots$ и ограничиваясь первым порядком теории возмущений, из (2.10) получим

$$F_{l,0} = \chi_{E_n^{(0)},l}(L_0) + \mu\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \chi_{\varepsilon,l}}{\partial \varepsilon}(L_0) \right|_{\varepsilon=E_n^{(0)}}. \quad (2.13)$$

В частности,

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= (-1)^n \frac{\mu}{2} n\pi \frac{\varepsilon_1}{E_n^{(0)}}, \quad F_{0,1} = F_{0,-1} = (-1)^n \frac{\mu}{2} n\pi, \\ F_{-1,0} &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E_n^{(0)} - \hbar\Omega} L_0\right), & E_n^{(0)} - \hbar\Omega > 0, \\ \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\hbar\Omega - E_n^{(0)}} L_0\right), & \hbar\Omega - E_n^{(0)} > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

С учетом (2.14), полагая $a_l \sim \mu^{|l|}$, получаем из (2.11) при $q = 0$

$$F_{-1,-1}a_{-1} + F_{0,0}a_0 + F_{1,1}a_1 = 0. \quad (2.15)$$

Первый и третий члены в левой части (2.15) порядка μ^2 , а во втором $a_0 \sim \mu^0$ и $F_{0,0} \sim \mu\varepsilon_1$, поэтому $\varepsilon_1 = 0$. Далее из (2.11) при $q = \pm 1$ находим

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -a_0 \frac{F_{0,1}}{F_{-1,0}} = \mu(-1)^{n+1} a_0 \frac{n\pi}{2F_{-1,0}}, \\ a_1 &= -a_0 \frac{F_{0,-1}}{F_{1,0}} = \\ &= \mu(-1)^{n+1} a_0 \frac{n\pi}{2 \sin\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E_n^{(0)} + \hbar\Omega} L_0\right)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Коэффициент a_0 определяется из условия нормировки. Из (2.15) следует, что знаменатель в выражении для a_{-1} обращается в нуль при условии

$$\hbar\Omega = E_n^{(0)} - E_N^{(0)}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

а знаменатель в выражении для a_1 — при

$$\hbar\Omega = E_N^{(0)} - E_n^{(0)}. \quad (2.18)$$

Это отвечает резонансам возбуждения при приближении частоты модуляции к частоте перехода между невозмущенными уровнями. Кроме того, при $\hbar\Omega \rightarrow E_n^{(0)}$

$$a_{-1} \sim \mu \left| E_n^{(0)} - \hbar\Omega \right|^{-1/2} \rightarrow \infty,$$

но при этом

$$\chi_{\varepsilon,-1}(x) \sim \left| E_n^{(0)} - \hbar\Omega \right|^{1/2} \rightarrow 0,$$

так что при перемножении этих величин в (2.6) такая особенность исчезает (она и не возникнет, если в (2.8) использовать нормированные функции). Вариант с выполнением условий (2.16) и (2.18) выходит за рамки нерезонансного приближения и требует специального рассмотрения, которое приводится ниже.

2.1.2. Движение центра пакета

Положение центра волнового пакета определяется формулой

$$X(t) = \frac{1}{N_s} \int_0^{L(t)} x |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (2.19)$$

Из (2.6), (2.7) и (2.15) с точностью до членов порядка μ имеем

$$N_s = |a_0|^2 \frac{L_0}{2}, \quad X(t) = \frac{L_0}{2} [1 + \mu \kappa \cos(\Omega t)], \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa = & -\frac{4}{n\pi} \left(\frac{\omega_n^{(0)}}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}}}{\sin \left(n\pi \sqrt{1 + \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right)} \times \right. \\ & \times \left[\cos \left(n\pi \sqrt{1 + \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right) + (-1)^{n+1} \right] + \\ & \left. + \frac{\sqrt{1 - \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}}}{\sin \left(n\pi \sqrt{1 - \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right)} \times \right. \\ & \left. \times \left[\cos \left(n\pi \sqrt{1 - \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right) + (-1)^{n+1} \right] \right). \quad (2.21) \end{aligned}$$

Здесь введена частота (см. (2.4))

$$\omega_n^{(0)} = \frac{E_n^{(0)}}{\hbar}. \quad (2.22)$$

В квазистатическом случае $\Omega \ll \omega_n^0$ выражение из формулы (2.20) примет вид

$$X(t) = \frac{L_0}{2} [1 + \mu \cos(\Omega t)]. \quad (2.23)$$

Другими словами, в пределе низких частот Ω можно пользоваться выражениями (2.5) с заменой $L_0 \rightarrow L(t)$; при этом центр пакета расположен в середине ловушки переменной длины.

При приближении частоты модуляции к частоте перехода между невозмущенными уровнями (см. (2.17), (2.18)) синус в знаменателях дробей в (2.21)

стремится к нулю и правая часть (2.21) пропорциональна величине

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \left(n\pi \sqrt{1 + \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right) + (-1)^{n+1}}{\sin \left(n\pi \sqrt{1 + \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}} \right)} = \\ & = \frac{(-1)^N - (-1)^n}{\sin(N\pi)}. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Если n и N являются величинами одной четности, то отношение в (2.24) стремится к нулю при $\delta\Omega \rightarrow 0$ как

$$-\frac{1}{4} \frac{\delta\Omega}{\omega_n^{(0)} + \Omega},$$

где $\delta\Omega$ — отстройка частоты от резонансной. Если же четности n и N разные, то числитель в (2.24) отличен от нуля и происходит резонансное увеличение амплитуды смещения центра пакета. Напомним, что эти выводы ограничены первым порядком теории возмущений.

2.2. Движение потенциальной ямы как целого

Пусть теперь левая и правая стенки потенциальной ямы колеблются синфазно с одинаковыми амплитудами, так что протяженность ямы не зависит от времени:

$$\begin{aligned} L_r(t) &= L_0 [1 + \mu \cos(\Omega t)], \\ L_l(t) &= L_0 \mu \cos(\Omega t), \\ L_r(t) - L_l(t) &= L_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Заменим переменные в уравнении Шредингера (2.1) $\{x, t\} \rightarrow \{\xi, \tau\}$, полагая, что

$$x = \xi + \mu f(\tau), \quad t = \tau, \quad f(\tau) = L_0 \cos(\Omega \tau). \quad (2.26)$$

В новых переменных уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &= i\hbar \mu f'(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \\ \psi(\xi = 0, \tau) &= 0, \quad \psi(\xi = L_0, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Применительно к (2.27) можно построить, как и в (2.5), квазиэнергетические состояния, причем отличия от предыдущего построения заключаются, главным образом, в замене переменных:

$$\begin{aligned} \psi_n(\xi, \tau) &= u_n(\xi, \tau) \exp \left(-i \frac{\varepsilon_n}{\hbar} \tau \right), \\ u_n(\xi, \tau + T) &= u_n(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Пока эти уравнения являются точными. В теории возмущений по μ левая часть (2.27) содержит невозмущенное уравнение, а правая часть служит возмущением. В нулевом порядке, как и раньше,

$$\begin{aligned} \psi_n^{(0)}(\xi, \tau) &= \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)}}{\hbar}\tau\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L_0}\xi\right), \\ \varepsilon_n^{(0)} &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL_0^2} n^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Сдвиг уровней квазиэнергии возникает только во втором порядке теории возмущений, который нас интересовать не будет. В первом порядке

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n^{(1)}}{\partial \xi^2} &= i\hbar f'(\tau) \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial \xi} = \\ &= -i\pi n \hbar \Omega \sin(\Omega \tau) \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)}}{\hbar}\tau\right) \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi n}{L_0}\xi\right), \\ \psi_n^{(1)}(\xi = 0, \tau) &= 0, \quad \psi_n^{(1)}(\xi = L_0, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Это неоднородное уравнение имеет решение вида

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= X_n^{(1)}(\xi) \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)} + \hbar\Omega}{\hbar}\tau\right) + \\ &+ Y_n^{(1)}(\xi) \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega}{\hbar}\tau\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для функций $X_n^{(1)}(\xi)$ и $Y_n^{(1)}(\xi)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} (\varepsilon_n^{(0)} + \hbar\Omega) X_n^{(1)}(\xi) + \frac{\hbar^2}{2m} X_n^{(1)''}(\xi) &= \\ &= -\frac{\pi}{2} n \hbar \Omega \cos\left(\frac{\pi n}{L_0}\xi\right), \\ (\varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega) Y_n^{(1)}(\xi) + \frac{\hbar^2}{2m} Y_n^{(1)''}(\xi) &= \\ &= \frac{\pi}{2} n \hbar \Omega \cos\left(\frac{\pi n}{L_0}\xi\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Запишем эти два уравнения единообразно и в безразмерной форме. Введем, учитывая (2.22), переменные

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\pi n}{L_0} \xi, \quad a_l = (\varepsilon_n^{(0)} + \hbar l \Omega) \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{L_0}{\pi n}\right)^2 &= \\ &= 1 + l \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_n} = 1 + l \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$b_l = -\frac{ml\Omega}{\hbar} \frac{L_0^2}{\pi n} = -n\pi l \frac{\Omega}{\omega_n^{(0)}}, \quad l = 1, -1,$$

$$Z_+ = X_n^{(1)}, \quad Z_- = Y_n^{(1)}.$$

Тогда уравнения (2.32) принимают вид

$$\frac{d^2 Z_l}{d\varphi^2} + a_l Z_l = b_l \cos \varphi. \quad (2.34)$$

Опуская индексы « \pm », ищем решение уравнения (2.34) в виде (удобном при $a > 0$)

$$Z(\varphi) = C_1(\varphi) \sin(\sqrt{a}\varphi) + C_2(\varphi) \cos(\sqrt{a}\varphi). \quad (2.35)$$

Из (2.32) следует, что

$$\begin{aligned} C_1(\varphi) &= \frac{b}{2\sqrt{a}} \left[\frac{\sin[(\sqrt{a}-1)\varphi]}{\sqrt{a}-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin[(\sqrt{a}+1)\varphi]}{\sqrt{a}+1} \right] + C_{10}, \\ C_2(\varphi) &= \frac{b}{2\sqrt{a}} \left[\frac{\cos[(\sqrt{a}-1)\varphi]}{\sqrt{a}-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos[(\sqrt{a}+1)\varphi]}{\sqrt{a}+1} \right] + C_{20}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Постоянные интегрирования выбираются из граничных условий. На левом конце, $\varphi = 0$, должно выполняться равенство $C_2(0) = 0$, откуда имеем

$$C_{20} = \frac{b}{1-a}. \quad (2.37)$$

На правом конце, $\varphi = \pi n$, из условия $Z(\pi n) = 0$, или

$$C_1(\pi n) \sin(\sqrt{a}\pi n) + C_2(\pi n) \cos(\sqrt{a}\pi n) = 0, \quad (2.38)$$

находим постоянную C_{10} :

$$C_{10} = \frac{b}{1-a} \frac{(-1)^n - \cos(\sqrt{a}n\pi)}{\sin(\sqrt{a}n\pi)}. \quad (2.39)$$

Переходя к исходным обозначениям (см. (2.8)), перепишем (2.39) в виде

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{b}{1-a} \frac{(-1)^n - \cos(k_{\varepsilon,l}L_0)}{\sin(k_{\varepsilon,l}L_0)}, \\ a &= \left(\frac{k_{\varepsilon,l}L_0}{n\pi}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} Z(\varphi) &= \frac{b}{1-a} \left\{ -\cos \varphi + \cos(\sqrt{a}\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + [(-1)^n - \cos(\sqrt{a}\pi n)] \frac{\sin(\sqrt{a}\varphi)}{\sin(\sqrt{a}n\pi)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Таким образом, выражение для волновой функции в первом порядке теории возмущений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi(\tau, \xi) &= \psi_n^{(0)}(\tau, \xi) + \mu\psi_n^{(1)}(\tau, \xi), \\ \psi_n^{(0)}(\tau, \xi) &= \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)}}{\hbar}\tau\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_0}\xi\right), \\ \psi_n^{(1)}(\tau, \xi) &= \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)} + \hbar\Omega}{\hbar}\tau\right) Z_+(\xi) + \\ &+ \exp\left(-i\frac{\varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega}{\hbar}\tau\right) Z_-(\xi). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Функции $Z_+(\xi)$ и $Z_-(\xi)$ определяются формулами (2.35) и (2.41). При $a = 1 - \delta$, $\delta \ll 1$, раскрывая в (2.41) неопределенность, получим

$$Z(\varphi)_{a \rightarrow 1} \rightarrow \frac{b}{2} \left(\varphi + \frac{n\pi}{2}\right) \sin \varphi. \quad (2.43)$$

Как и при движении только одной стенки потенциальной ямы, в рассматриваемом случае амплитуда колебаний волнового пакета резонансно возрастает при условиях (2.17) или (2.12). Подробно случай резонанса будет рассмотрен в следующем разделе.

2.3. Резонансное (двухуровневое) приближение

Ввиду аналогичности результатов далее ограничимся рассмотрением случая движения только одной стенки потенциальной ямы. При приближении к резонансам использованный выше вариант теории возмущений неприменим, поскольку заметно возбуждены уже два уровня [10]:

$$\psi_\varepsilon(x, t) \approx \sum_{l=0}^1 a_l \sin(k_{\varepsilon,l}x) \exp\left(-i\frac{\varepsilon + \hbar\Omega l}{\hbar}t\right). \quad (2.44)$$

Здесь мы рассмотрим резонансный случай, когда частота модуляции мало отклоняется от резонансной, удовлетворяющей для определенности соотношению (2.17):

$$\hbar\Omega = E_N^{(0)} - E_n^{(0)} + \hbar\delta\Omega, \quad \frac{|\delta\Omega|}{\Omega} \ll 1. \quad (2.45)$$

Тогда

$$\begin{aligned} k_{\varepsilon,l} &= \frac{2m}{\hbar} \sqrt{E_n^{(0)} + \delta\varepsilon + \hbar\Omega l} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \times \\ &\times \sqrt{E_l + \delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega l} \approx k_l \left(1 + \frac{\delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega l}{2E_l}\right), \\ E_0 &= E_n^{(0)}, \quad E_1 = E_N^{(0)}, \\ k_l &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E_l}, \quad l = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Сохраняя в (2.11) при $q = -1$ и $q = 0$ только члены с a_0 (коэффициент при состоянии n) и a_1 (гармоника с частотой, близкой к $E_N^{(0)}/\hbar$), получим систему двух уравнений

$$F_{00}a_0 + F_{11}a_1 = 0, \quad F_{0,-1}a_0 + F_{10}a_1 = 0. \quad (2.47)$$

Определитель этой системы должен обращаться в нуль:

$$F_{00}F_{10} - F_{11}F_{01} = 0. \quad (2.48)$$

Положим $\varepsilon = E_n^{(0)} + \delta\varepsilon$, $|\delta\varepsilon| \ll E_n^{(0)}$. В резонансном случае

$$\begin{aligned} F_{00} &= (-1)^n \frac{n\pi}{2} \frac{\delta\varepsilon}{E_n^{(0)}}, \quad F_{01} = (-1)^n \frac{\mu}{2} n\pi, \\ F_{10} &= (-1)^N \frac{N\pi}{2E_N^{(0)}} (\delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega), \\ F_{11} &= (-1)^N \frac{\mu}{2} N\pi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Поэтому сдвиг квазиэнергии определяется квадратным уравнением

$$\delta\varepsilon^2 + \delta\varepsilon \hbar\delta\Omega - \mu^2 E_n^{(0)} E_N^{(0)} = 0 \quad (2.50)$$

с корнями

$$\delta\varepsilon_{(\pm)} = -\frac{\hbar\delta\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar\delta\Omega}{2}\right)^2 + \mu^2 E_n^{(0)} E_N^{(0)}}. \quad (2.51)$$

В соответствии с предыдущим разделом, при заметных частотных расстройках зависимость сдвига квазиэнергии от μ является квадратичной функцией, вклад первого порядка отсутствует. Выражение (2.51) описывает расщепление квазиэнергий и соответствующие суперпозиционному состоянию (2.45) биения с периодическими переходами возбуждения между состояниями n и N . В частности, при точном резонансе ($\delta\Omega = 0$) расщепление линейно по глубине модуляции μ и составляет $R = 2\mu\sqrt{E_n^{(0)} E_N^{(0)}}$ — аналог частоты Раби в задаче о резонансном возбуждении двухуровневой системы [10].

2.3.1. Движение пакета

Из (2.44) следует (опускаем громоздкие индексы и учитываем вещественность $a_{0,1}$)

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &\approx a_0^2 \sin^2(k_0x) + a_1^2 \sin^2(k_1x) + \\ &+ 2a_0a_1 \sin(k_0x) \sin(k_1x) \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

От времени зависит только последний, интерференционный член, причем эта зависимость чисто гармоническая. Даже при малых μ глубина модуляции вероятности не мала (при точном резонансе она вообще не зависит от μ).

Произведение $\sin(k_0 x) \sin(k_1 x)$ — четная функция $x - L_0/2$, если состояния 0 и 1 одинаковой четности, и нечетная при различающейся четности. Поэтому при одинаковой четности центр пакета не будет смещаться, но будет осциллировать его ширина. А при различающейся четности будет осциллировать координата центра пакета, но не его ширина (в рассматриваемом порядке теории возмущений). Явные формулы для движения и ширины пакета имеют следующий вид:

$$X(t) - \frac{L_0}{2} = \frac{1}{N_s} \int_0^{L(t)} \left(x - \frac{L_0}{2}\right) |\psi(x, t)|^2 dx =$$

$$= - (1 - (-1)^{n+N}) \frac{2L_0}{\pi^2} \left(\frac{1}{(n-N)^2} - \frac{1}{(n+N)^2} \right) \times$$

$$\times \frac{\frac{n}{N} \frac{\delta\varepsilon}{\mu E_n^{(0)}}}{1 + \left(\frac{n}{N} \frac{\delta\varepsilon}{\mu E_n^{(0)}} \right)^2} \cos(\Omega t), \quad (2.53)$$

$$W^2(t) = \frac{1}{N_s} \int_0^{L(t)} \left(x - \frac{L_0}{2}\right)^2 |\psi(x, t)|^2 dx =$$

$$= \frac{L_0^3}{\pi^2} (1 + (-1)^{n+N}) \left(\frac{1}{(n-N)^2} - \frac{1}{(n+N)^2} \right) \times$$

$$\times \frac{\frac{n}{N} \frac{\delta\varepsilon}{\mu E_n^{(0)}}}{1 + \left(\frac{n}{N} \frac{\delta\varepsilon}{\mu E_n^{(0)}} \right)^2} \cos(\Omega t). \quad (2.54)$$

3. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ КОНДЕНСАТ

Атомный конденсат Бозе–Эйнштейна (БЭК) с низкой концентрацией при нулевой температуре в рассматриваемой динамической ловушке описывается уравнением Гросса–Питаевского для макроскопической волновой функции $\psi(x, t)$ [14]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U_0 |\psi|^2 \psi, \quad (3.1)$$

$$\psi(x=0, t) = 0, \quad \psi(x=L(t), t) = 0.$$

Параметр U_0 зависит от внешнего магнитного поля и может быть как положительным (отталкивание атомов), так и отрицательным (их притяжение). При резонансном возбуждении оптическим излучением БЭК проявляет аномально высокую нелинейность и обладает низкороговой бистабильностью [15].

В отличие от уравнения Шредингера (2.1) уравнение Гросса–Питаевского (3.1) нелинейно, принцип суперпозиции для него не выполняется. Тем не менее, имеет смысл по-прежнему искать решения (3.1), отвечающие квазиэнергетическим состояниям. Такие состояния обычно являются аттракторами в моделях с учетом диссипативных процессов, например, при наличии распада и накачки БЭК экситонов и поляритонов в полупроводниковых системах [16].

В рамках резонансного приближения и приближения среднего поля, подставляя (2.44) в (3.1) и отбрасывая нерезонансные члены, получим

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_{\varepsilon, l}^2 = \varepsilon + \hbar\Omega l - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_l|^2 + |a_{1-l}|^2 \right), \quad (3.2)$$

$$l = 0, 1.$$

Как и выше, полагаем $\varepsilon = E_n^{(0)} + \delta\varepsilon$. Теперь выражения (2.46) и (2.49) заменяются следующими:

$$k_{\varepsilon, l} = \frac{2m}{\hbar} \times$$

$$\times \sqrt{E_l + \delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega l - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_l|^2 + |a_{1-l}|^2 \right)} \approx$$

$$\approx k_l \left[1 + \frac{1}{2E_l} \left(\delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega l - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_l|^2 + |a_{1-l}|^2 \right) \right) \right], \quad (3.3)$$

$$F_{00} = (-1)^n \frac{n\pi}{2E_n^{(0)}} \left[\delta\varepsilon - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_0|^2 + |a_1|^2 \right) \right],$$

$$F_{01} = (-1)^n \frac{\mu}{2} n\pi,$$

$$F_{10} = (-1)^N \frac{N\pi}{2E_N^{(0)}} \left[\delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_1|^2 + |a_0|^2 \right) \right], \quad F_{11} = (-1)^N \frac{\mu}{2} N\pi. \quad (3.4)$$

Из (2.49) и (3.4) следует уравнение

$$\left[\delta\varepsilon - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_0|^2 + |a_1|^2 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\delta\varepsilon + \hbar\delta\Omega - U_0 \left(\frac{3}{4} |a_1|^2 + |a_0|^2 \right) \right] - \mu^2 E_n^{(0)} E_N^{(0)} = 0. \quad (3.5)$$

При $U_0 \rightarrow 0$ уравнение (3.5) переходит в (2.50). Для замыкания (3.5) следует привлечь соотношения между амплитудами гармоник (2.45), откуда получаем

$$\frac{|a_1|^2}{|a_0|^2} = \left(\frac{F_{00}}{F_{11}}\right)^2 = \left(\frac{n}{N}\right)^2 \left[\frac{\delta\varepsilon - U_0 \left(\frac{3}{4}|a_0|^2 + |a_1|^2\right)}{\mu E_n^{(0)}} \right]^2, \quad (3.6)$$

и условие нормировки (2.2), в котором сохраняющаяся величина N_s определяет теперь число частиц в ловушке:

$$\int_0^{L(t)} |\psi(x, t)|^2 dx \approx \frac{1}{2} (|a_0|^2 + |a_1|^2) L_0 = N_s. \quad (3.7)$$

Положим

$$\begin{aligned} U_0 &= s_0 |U_0|, \quad s_0 = \text{sign } U_0, \\ N_{0,1} &= \frac{|a_{0,1}|^2 L_0}{2N_s}, \quad \delta\varepsilon' = \frac{\delta\varepsilon}{2|U_0|N_s}, \\ \delta\Omega' &= \frac{\delta\Omega}{2|U_0|N_s}, \quad \delta\varepsilon' = \frac{\delta\varepsilon}{\sqrt{E_n^{(0)} E_N^{(0)}}}, \\ \delta\Omega' &= \frac{\hbar\delta\Omega}{\sqrt{E_n^{(0)} E_N^{(0)}}}, \quad V_0 = \frac{2N_s |U_0|}{\sqrt{E_n^{(0)} E_N^{(0)}}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.6) и (3.7) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - N_0, \\ \frac{1 - N_0}{N_0} &= \frac{1}{\mu^2} \left(\delta\varepsilon' - s_0 V_0 \left(1 - \frac{1}{4} N_0\right) \right)^2, \\ &\left(\delta\varepsilon' - s_0 V_0 \left(1 - \frac{1}{4} N_0\right) \right) \times \\ &\times \left(\delta\varepsilon' + \delta\Omega' - s_0 V_0 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} N_0\right) \right) = \mu^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нелинейная система уравнений (3.9) допускает точное решение в параметрической форме. Действительно, перемножив два последние уравнения в (3.9), получим соотношение между $\delta\varepsilon$ и N_0 , в которое не входит глубина модуляции μ , откуда следует

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon' &= \frac{1}{2N_0 - 1} \times \\ &\times \left[(1 - N_0)\delta\Omega' - \frac{1}{4} s_0 V_0 (3 - 3N_0 + N_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

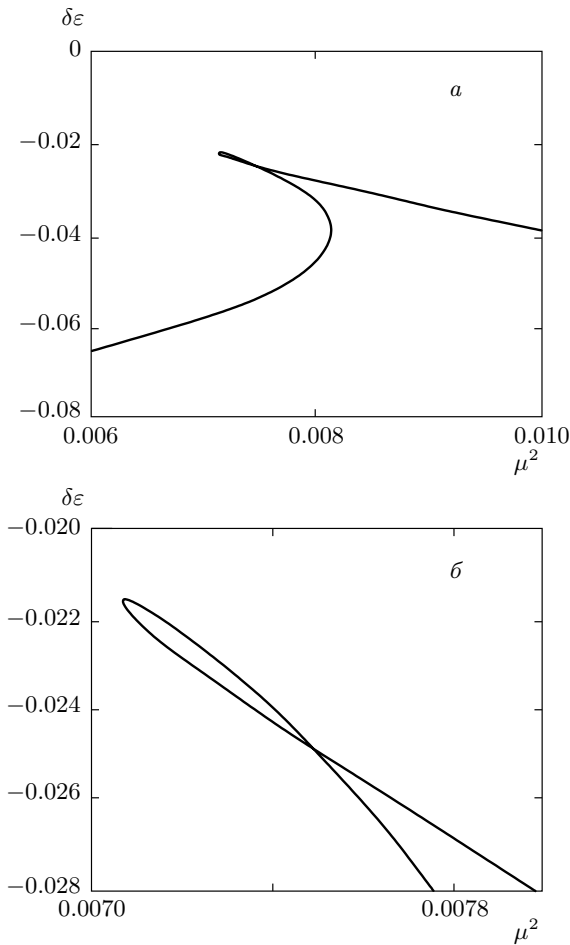
Наконец, подставив (3.10), например, в последнее уравнение (3.9), найдем соответствующее значение глубины модуляции.

Таким образом, варьируя населенность нижнего уровня N_0 в пределах от 0 до 1, находим по (3.10) сдвиг квазиэнергии $\delta\varepsilon'$ и по (3.9) соответствующее значение глубины модуляции μ . Как и при бистабильности классического нелинейного осциллятора, результат существенно зависит от соотношения знаков нелинейности U_0 и частотной отстройки $\delta\Omega$. Поскольку система (3.9) инвариантна к одновременному изменению знаков U_0 , $\delta\Omega$ и $\delta\varepsilon$, без ограничения общности можно считать $s_0 = 1$ ($U_0 > 0$). Тогда при положительных частотных расстройках отклик бозе-эйнштейновского конденсата применительно к его квазиэнергетическим состояниям оказывается бистабильным (см. рисунок). Интересной особенностью отклика служит наличие самопересечения описывающих отклик кривых (рис. б). Устойчивость этих состояний требует дополнительного анализа.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотренная ситуация приближенно реализуется в ловушке, созданной встречными световыми волнами в двухзеркальном резонаторе при модуляции положения одного из зеркал. Если в ловушке протяженностью $L_0 = 10$ мкм захвачен электрон, то частота $\omega_n^{(0)} = E_n^{(0)}/\hbar = 5.7 \cdot 10^6 n^2 \text{ с}^{-1}$, а расстояние между двумя ближайшими уровнями $\omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} \approx 1.7 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Для атома в ловушке частоты меньше на три порядка. Поэтому частоты модуляции лежат в удобном для экспериментов радиочастотном диапазоне.

Таким образом, квазиэнергетический подход [11–13] оказывается эффективным и применительно к возбуждению одиночных и макроскопических квантовых объектов за счет модуляции размеров ловушки. Этот вариант возбуждения укладывается в общие рамки периодического воздействия на квантовые системы [14]. С учетом прогресса в технике изготовления ловушек и микромеханических систем, а также получения макроскопических квантовых состояний охлажденных газов, включая бозе-эйнштейновский конденсат, представляется возможным экспериментальное наблюдение в них указанных эффектов. В том числе интерес представляет найденный вариант бистабильности квантовых объектов, не сводящийся к стандартной бистабильности нелинейного интерферометра [17].



а) Зависимость сдвига квазиэнергии бозе-эйнштейновского конденсата от квадрата глубины модуляции размеров ловушки; $U_0 = 0.01$, $\delta\Omega' = 0.05$.
 б) Область самопересечения кривой отклика в увеличенном масштабе

Напомним основные приближения анализа, ограничивающие область применимости и точность результатов. Рассмотрение одиночной частицы в разд. 2 вплоть до уравнения (2.11) является точным. При этом мы ограничиваемся нахождением квазиэнергетических состояний, тогда как общее решение уравнения Шредингера может быть построено как суперпозиция таких состояний. Начиная же с уравнения (2.12), считается малой глубина модуляции положения потенциальной стенки (малый параметр $\mu \ll 1$). В разд. 2.2 теория возмущений строится для нерезонансного случая, когда частота модуляции положения стенок не близка к разности частот переходов между уров-

нями невозмущенной задачи. Противоположный случай резонансного возбуждения рассматривается в разд. 2.3. Принципиальным обстоятельством здесь является выраженная неэквидистантность уровней энергии невозмущенной задачи в рассматриваемом случае прямоугольной потенциальной ямы (в отличие, например, от параболической формы ямы с эквидистантными уровнями энергии). Малым параметром служит отношение отклонения частоты модуляции от резонансного значения к самой частоте модуляции (неравенство в формуле (2.45)). При выполнении неравенства в (2.45) с точностью, определяемой этим малым параметром, систему можно рассматривать как двухуровневую [10].

Для бозе-эйнштейновского конденсата (разд. 3) к этим условиям добавляются требования, необходимые для справедливости уравнения Гросса–Питаевского, — нулевая температура конденсата (точнее, температура, много меньшая критического значения конденсации) и низкая плотность газа (слабо-неидеальный газ). При таких условиях нелинейный член уравнения Гросса–Питаевского играет роль малой поправки, так что анализ может быть выполнен так же, как в разд. 2 для одиночной частицы. Кроме того, ввиду неприменимости принципа суперпозиции к нелинейному уравнению Гросса–Питаевского здесь мы ограничиваемся рассмотрением только таких состояний, которые близки к квазиэнергетическим.

Следует также отметить, что понятие бистабильности для квантовых объектов требует оговорок, связанных с возможностью пренебрежения рядом факторов. Для потенциала ловушки конечной глубины имеется вероятность туннелирования частиц через стенки, что ограничивает допустимое время эксперимента. Принципиальным является пренебрежение квантовыми (и, вообще говоря, тепловыми) шумами, поскольку под действием соответствующих ланжевеновских сил происходят случайные переходы между квазиэнергетическими состояниями. В результате бистабильность существовала бы только в пренебрежении этими шумами, а при их учете в квантовой системе со временем устанавливается одно и то же состояние [18]. Однако в условиях, при которых в пренебрежении шумами реализуется бистабильность, имеется еще и метастабильное состояние со временем жизни, которое неограниченно увеличивается при уменьшении интенсивности шума [18]. Тем самым, в квантовой системе, строго говоря, возможна не бистабильность, а лишь биметастабильность [18, 19].

Работа выполнена при финансовой поддержке НИУ ИТМО (грант № 411510) и в рамках Программы РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках».

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Красильников, *Параметрические волновые явления в классической электродинамике*, Изд. Санкт-Петерб. унив., Санкт-Петербург (1996).
2. С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии*, Физматлит, Москва (2008).
3. П. Э. Тошек, УФН **158**, 451 (1989).
4. K. Hammerer, M. Wallquist, C. Genes et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 063005 (2009).
5. S. Camerer, M. Korppi, A. Jockel et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 223001 (2011).
6. J. D. Teufel, T. Donner, M. A. Castellanos-Beltran et al., Nat. Nanotech. **4**, 820 (2009).
7. D. Meiser and P. Meystre, Phys. Rev. A **73**, 033417 (2006).
8. Y. Chang, T. Shi, Y. X. Liu et al., Phys. Rev. A **83**, 063826 (2011).
9. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
11. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **51**, 1492 (1966).
12. В. И. Ритус, ЖЭТФ **51**, 1544 (1966).
13. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Попов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
14. Л. П. Питаевский, УФН **176**, 345 (2006).
15. Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, С. В. Федоров, ЖЭТФ **129**, 803 (2006).
16. J. Kasprzyk, M. Richard, S. Kundermann et al., Nature **443**, 409 (2006).
17. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988).
18. П. Н. Пигурнов, Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, Опт. и спектр. **68**, 208 (1990).
19. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах*, Наука, Москва (1997).