

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ И ВОЛНОВОДНЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

М. В. Давидович^{a}, И. С. Нефедов^{b**}*

^a *Научно-исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

^b *Department of Radio Science and Engineering, School of Electrical Engineering, Aalto University
FI-00076, P. O. Box 13000, 00076, Aalto, Finland*

Поступила в редакцию 2 февраля 2013 г.

На основе метода интегральных уравнений, основанных на функции Грина периодически расположенных источников с заданным фазовым набегом (периодической функции Грина), исследованы периодические метаматериалы в виде простейших металлических и диэлектрических включений в прямоугольную и кубическую решетку в диэлектрической среде (матрице) с проницаемостью ε . Металлические стержни радиуса порядка десятков нанометров описаны комплексной макроскопической диэлектрической проницаемостью с $\text{Re} \tilde{\varepsilon} < 0$. Волны терагерцевого и инфракрасного диапазонов распространяются вдоль стержней практически со скоростью света и с малыми потерями, слабо зависящими от поперечного волнового числа, тогда как в оптической области, особенно в коротковолновой ее части, они переходят в медленные волны диэлектрического волновода.

DOI: 10.7868/S0044451014050012

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время исследованы волноводные свойства и дисперсия в метаматериалах в виде различных идеально проводящих и импедансных двумерно-периодических (two-dimensional periodic, 2DP) штыревых (проволочных) структур [1–17] — металлических фотонных кристаллов (ФК) или проволочных сред (метаматериалов), рис. 1. Рассматривались и исследовались идеальные металлические ФК [1–5, 12, 13, 16], импедансные структуры [6, 14–16], периодические метаматериалы на основе углеродных нанотрубок и металлических нанопроводов [6, 7–9, 15], а также на основе ферромагнитных проволочных ФК [10, 11]. Для указанных метаматериалов разными методами выполнялась гомогенизация [10, 11, 17–20]. Наибольший интерес в данный момент представляют исследования структур с диссипацией при учете реальных свойств металлов в диапазонах от СВЧ

до оптического. Металлические и металлоподобные штыревые ФК при определенных условиях (на низких частотах, при наличии медленных волн с малыми потерями) являются гиперболическими метаматериалами [8, 21, 22]. Такие материалы могут быть использованы в ряде приложений: для получения искусственных импедансных и анизотропных поверхностей [14, 21] (в том числе поддерживающих распространение поверхностных плазмонов Дьяконова), для направленной передачи тепла [8], как хорошие поглотители излучения [22], для создания линз, построения изображений [23] и для ряда других применений. Возможные применения гиперболических метаматериалов даны в обзоре [21].

Описание идеально проводящих или импедансных штырей (рис. 1) приводит к поверхностным интегральным уравнениям, а в случае тонких штырей — к линейным интегральным уравнениям [12, 13]. 2DP-структуры возникают в предположении большой длины проволочек по сравнению с остальными размерами и с длиной волны λ в вакууме. Наиболее универсальным и точным методом описания подобных структур является

*E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

**E-mail: igor.nefedov@aalto.fi

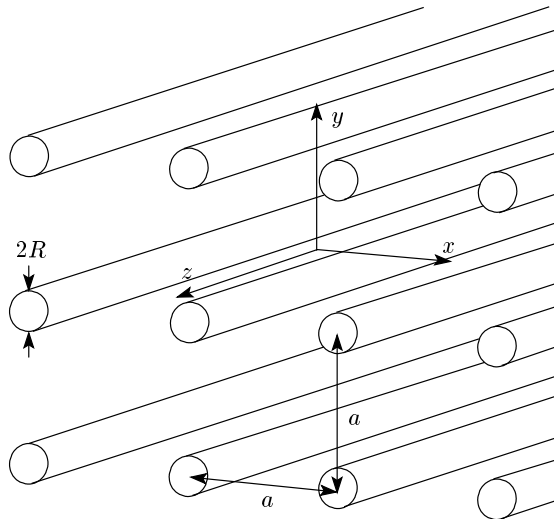


Рис. 1. Стержневая проволочная 2DP-структура (гиперболический метаматериал) с радиусами проволочек $r = R$ и периодами a по поперечным осям

учитывающий внутреннее поле метод объемных интегральных уравнений [4, 24, 25] с использованием периодических функций Грина [4–6, 14], с помощью которого гиперболические метаматериалы еще не анализировались.

Впервые волноводные свойства металлического провода еще в 1899 г. исследовал Зоммерфельд [26, 27] в связи с дифракцией плоской волны на проводе. Ранее он предположил наличие поверхностных волн над проводящими структурами [28]. Соответствующая волна Зоммерфельда–Ценнека при малом радиусе провода для частот от низких до СВЧ является медленной и втекающей в провод [27]. Поверхностная волна Ценнека над диссипативной (проводящей) плоскостью может быть как быстрой, так и медленной [27]. Переход от медленной поверхностной волны Ценнека к быстрой для металлического цилиндра может происходить при некотором соотношении между радиусом и длиной волны; при этом существенно наличие потерь. В районе плазменных частот поверхностная волна Ценнека соответствует поверхностному плазмону. Недавно опубликована ошибочная работа [29], которая опровергает наличие быстрой поверхностной волны Ценнека и ошибка которой состоит в том, что не учтен втекающий характер этой волны. В работе [30] доказана ошибочность выводов работы [29] и, как и в [27], показан втекающий характер поверхностной волны Ценнека. Термин «втекающие волны» наряду с вытекающими волнами для классификации физических несобственных мод использован, например, в рабо-

те [31] (см. также [27]).

Многопроводная структура лучше канализирует энергию, чем один провод. Рассматриваемые периодические гиперболические метаматериалы (см. рис. 1) канализируют энергию вдоль оси нанопроводов без отсечки, а в поперечном направлении возможны зоны непропускания. При идеальной проводимости имеют место Т-волна (со скоростью света) и быстрые волны, идущие под углом. Диссипация приводит к втеканию этих волн в стержни и к некоторому их замедлению [27]. В работах [6–9, 15] исследовались свойства таких метаматериалов при различных импедансах стержней. Однако не учитывающий внутреннее поле метод импедансного интегрального уравнения, как будет показано ниже, может давать существенные погрешности (особенно для тонких штырей).

Представляет интерес строгое исследование волн в ФК и их гомогенизация (получение эффективных электрофизических параметров) в диапазоне частот от СВЧ до оптических, а также установление границ применимости ранее полученных результатов, что является целью работы. Для этого учтено поле внутри металлических цилиндров. Универсальным для этого является метод объемных интегральных уравнений. Здесь он применен для 2DP ФК в виде длинных металлических наноразмерных в поперечной области штырей, включенных в квадратную решетку (см. рис. 1), которые описаны комплексной диэлектрической проницаемостью металлов в соответствующих диапазонах [32].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем волны с зависимостью $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ в проволочном 2DP ФК (см. рис. 1), имеющем диэлектрическую основу с проницаемостью ε . Комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}$ проволочек соответствует плазме металла, в силу чего волновой вектор \mathbf{k} — комплексный. В общем случае точное дисперсионное уравнение задачи имеет вид $k_0 = \omega/c = \Phi(\mathbf{k})$ и описывает гиперповерхность в семимерном пространстве (k_0, \mathbf{k}) . В пренебрежении потерями (что возможно на относительно низких частотах) вектор \mathbf{k} — действительный, размерность пространства (k_0, \mathbf{k}) становится равной четырем.

Одноосный ФК описывается эффективным диагональным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, в котором $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon$. В отсутствие потерь фиксация компоненты k_z позволяет построить попе-

речную зонную структуру (в пространстве k_x, k_y). Для поперечного распространения в пренебрежении диссипацией существуют зависящая от k_z низкочастотная отсечка и высокочастотные запрещенные зоны — зоны непропускания (bandgap). В них компонента ε_{zz} отрицательна, и такой ФК является гиперболическим метаматериалом [8, 21]. В области медленных плазмонных волн он также может проявлять свойства гиперболического метаматериала.

Нас интересуют волны вдоль стержней с зависимостью $\exp[i(\omega t - k_z z)]$, распространяющиеся при произвольных поперечных углах, т. е. при произвольных k_x и k_y . Использование указанной зависимости делает задачу двумерной, решаемой в области поперечного сечения проволоочки (стержня) и определяющей пространственную дисперсию $k_z = \gamma(k_x, k_y)$. При этом частоту будем считать фиксированным параметром, а указанный экспоненциальный множитель далее опускаем.

На низких частотах в пренебрежении потерями волна поддерживается поверхностными токами, которые можно заменить на линейные вдоль осей проволоочек, а дисперсионное уравнение получается на основе поверхностного или линейного интегрального уравнения [4]. Более строгий подход основан на импедансном интегральном уравнении [6]. Мы рассматриваем строгую постановку на основе тока поляризации с плотностью

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\varepsilon_0 [\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (1)$$

Ему соответствует объемное интегральное уравнение, которое для однородной по z волноведущей структуры сводится к двумерному интегральному уравнению в поперечном сечении проволоочки относительно $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp)$ и к соответствующему дисперсионному уравнению.

Задача решается в приближении тонких проволоочек ($r \ll \lambda$) и разреженного ФК ($r \ll a$) с использованием периодической функции Грина \tilde{G} , т. е. функции Грина периодически-расположенных и сфазированных источников, что позволяет рассматривать только одну компоненту J_{pz} , отличную от нуля, согласно (1), только в указанном сечении. Здесь r — радиус проволоочек, a — период, λ — длина волны.

В соответствии с выражением (1) и с указанной зависимостью от z объемное интегральное уравнение относительно электрического поля \mathbf{E} в проволочке сводится к двумерному интегральному уравнению относительно компоненты E_z в одном поперечном сечении. В пренебрежении малыми поперечными компонентами определяющий поле электриче-

ский вектор-потенциал имеет одну продольную компоненту

$$A_z(x, y) = i\omega\varepsilon_0 (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \int_S \tilde{G}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) E_z(\mathbf{r}'_\perp) d^2 r' \quad (2)$$

и определяет искомую компоненту электрического поля в виде

$$E_z(x, y) = \frac{(k^2 - \gamma^2) A_z(x, y)}{i\omega\varepsilon_0 \varepsilon} = (k^2 - \gamma^2) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} - 1 \right) \int_S \tilde{G}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) E_z(\mathbf{r}'_\perp) d^2 r'. \quad (3)$$

Это основное интегральное уравнение, определяющее искомые величины E_z и γ . Здесь интегрирование идет по поперечному сечению штыря S , $k = k_0 \sqrt{\varepsilon} = 2\pi \sqrt{\varepsilon} / \lambda$ — волновое число в диэлектрической основе (матрице), а 2DP функция Грина имеет вид [3, 4]

$$\tilde{G}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = \frac{1}{a_x a_y} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\tilde{k}_{xm}(x-x') - i\tilde{k}_{yn}(y-y')]}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k^2}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{k}_{xm} = k_x + 2m\pi/a_x$, $\tilde{k}_{yn} = k_y + 2n\pi/a_y$. При численном решении уравнения (3) берем одинаковые периоды: $a_x = a_y = a$. Методика сведения трехмерных интегральных уравнений к двумерным уравнениям типа (3) для волноведущих структур изложена в [3, 4, 33]. Далее интегральное уравнение (3) будет уточнено с учетом компоненты E_ρ .

Мы решаем уравнение (3), выбирая систему координат в нулевой ячейке периодичности в центре штыря и переходя к цилиндрическим координатам. Приближенное интегральное уравнение (3) тем точнее, чем меньше отношение r/a , поскольку при этом меньше поперечные компоненты E_ρ и E_φ электрического поля в сравнении с продольной. Для сокращения выкладок полагаем $\varepsilon = 1$, т. е. $k = k_0$ (в окончательных соотношениях можно сделать обратную замену $k_0 \rightarrow k$).

Далее предполагаем, что $E_z(\rho, \varphi)$ не зависит от угла φ . Это весьма сильное предположение. Оно означает, что поле на поверхности штыря одинаковое, а внутри изменяется только вдоль радиуса. Поскольку волна при распространении затухает, такое предположение возможно при малом ее затухании в поперечном направлении на расстояниях порядка r и только в том случае, когда для длины волны выполняются условия $\lambda > a$ и $\lambda \gg r$, что возможно

при радиусе порядка десятков нанометров и разреженности ФК. Именно разреженность приводит к относительно малым потерям.

Для получения дисперсии (зонной структуры) перейдем от интегрального уравнения к дисперсионному, умножив (3) на $E_z(x, y)$ и проинтегрировав по поперечному сечению. Используя в полярных координатах соотношение (см. работы [3, 4])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\pm ir(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)] d\varphi = J_0(r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad (5)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, получим зависящий от параметров k_0, k_x, k_y, γ функционал вида

$$\Phi(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, E_z) = \int_0^r E_z^2(\rho) d\rho - (k_0^2 - \gamma^2) (\tilde{\epsilon} - 1) \times \int_0^r \int_0^r E_z(\rho) K(\rho, \rho') E_z(\rho') \rho' d\rho' d\rho, \quad (6)$$

где введено ядро

$$K(\rho, \rho') = \frac{2\pi}{a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\rho \tilde{k}_{mn}) J_0(\rho' \tilde{k}_{mn})}{\tilde{k}_{mn}^2 + \gamma^2 - k_0^2} \quad (7)$$

и обозначение $\tilde{k}_{mn} = \sqrt{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2}$.

Приравнивание нулю вариации (6) по $E_z(\rho)$ приводит к дисперсионному уравнению:

$$\Phi(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, \overline{E}_z) = 0, \quad (8)$$

в котором \overline{E}_z означает точное значение z -компоненты поля, которое, вообще говоря, не известно. Стандартный подход к решению основан на использовании разложения $E_z(\rho)$ по базисным функциям, подстановка которых в функционал дает квадратичную форму. Нахождение минимума этой квадратичной формы и приводит к дисперсионному уравнению в виде равенства нулю ее определителя. Решение такого уравнения требует поиска комплексных корней определителя, размерность которого может быть велика.

Приближенный способ получения решения состоит в подстановке некоего оптимального распределения $E_z(\rho)$ и в приравнивании выражения (6) нулю. Именно такой подход рассмотрен ниже. Вместо (6) можно взять и функционал

$$\tilde{\Phi}(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, E_z) = \int_0^r E_z^2(\rho) \rho d\rho - (k^2 - \gamma^2) (\tilde{\epsilon} - 1) \times \int_0^r \int_0^r \rho E_z(\rho) K(\rho, \rho') E_z(\rho') \rho' d\rho' d\rho. \quad (9)$$

Заметим, что использование соотношения (5) в интегральном уравнении не приводит к его независимости от φ , и только повторное интегрирование (т. е. усреднение по φ) дает функционалы (6) и (9), не зависящие от φ . Докажем это в предположении, что поле не зависит от азимутального угла. Для этого воспользуемся представлением функции Грина (4) в цилиндрической (полярной) системе координат [34], используя преобразования

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$x' = \rho' \cos \varphi', \quad y' = \rho' \sin \varphi',$$

$$\tilde{k}_{xm} = \tilde{k}_{mn} \cos \alpha_{mn}, \quad \tilde{k}_{yn} = \tilde{k}_{mn} \sin \alpha_{mn},$$

а также известные разложения по функциям Бесселя

$$\exp(\pm i\chi \cos \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm i)^n \exp(\mp i\psi) J_n(\chi).$$

В результате дополнительно возникают двойные суммы. Чтобы функция Грина не зависела от углов, в этих суммах необходимо оставить только члены с $n = 0$, т. е. функция Грина имеет вид (7). Эта функция Грина сразу приводит к функционалам (6), (9). Интегрирование по φ также оставляет в сумме только член с $n = 0$.

Введение полярной системы координат привело к тому, что функция Грина (7) перестала быть периодической. Однако для нашего случая это не существенно, поскольку интегральное уравнение решается только внутри поперечного сечения одного стержня. После решения и получения дисперсионных зависимостей в случае построения полей в других ячейках поле необходимо периодически продолжить [3, 4]. В диссипативном ФК (для комплексных k_x, k_y) такое продолжение не дает периодических решений. В конечном ФК уменьшение числа фотонов возможно за счет не только поглощения, но и их излучения. В этом проявляется коренное отличие ФК от обычных кристаллов, в которых вероятность и число частиц сохраняются (например, сохраняется число электронов в кристалле металла).

Мы не рассматриваем рождение и рекомбинацию квазичастиц с низкими энергиями. Соответственно

энергетические уровни даже для кристалла конечных размеров — действительные, а соответствующая задача квантовой механики — самосопряженная. Для гиперболических метаматериалов с ростом частоты сказываются потери (поглощение фотонов), поэтому важно оценивать возникающую при этом из-за несамосопряженной задачи «степень негиперболичности». Такая оценка возможна по затуханию волны в виде отношения мнимых компонент к действительным для k_z и ε_{zz} (например, в виде k''_z/k'_z или $\varepsilon''_{zz}/|\varepsilon'_{zz}|$) при мнимых k_x, k_y . В ФК ограниченных размеров излучение фотонов тем больше, чем меньше число периодов, поэтому собственные частоты являются комплексными даже в пренебрежении диссипацией. Здесь имеется полная аналогия с открытыми диэлектрическими резонаторами [24, 25] и диэлектрическими волноводами [35].

3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Простейшее численное решение дисперсионного уравнения получается, если соответствующим образом подобрать поле E_z . Внутри стержня это симметричное по азимуту поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\rho \partial \rho} \frac{\rho \partial E_z(\rho)}{\partial \rho} + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) E_z(\rho) = 0. \quad (10)$$

Обозначим $\kappa = \sqrt{k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2}$. Решение уравнения (10) имеет вид

$$E_z(\rho) = C_1 J_0(\rho \kappa).$$

В этом приближении имеем два почти эквивалентных дисперсионных уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, E_z) &= \int_0^r J_0^2(\rho \kappa) d\rho - (k_0^2 - \gamma^2) (\tilde{\varepsilon} - 1) \times \\ &\times \int_0^r \int_0^r J_0(\rho \kappa) K(\rho, \rho') J_0(\rho' \kappa) \rho' d\rho' d\rho = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, E_z) &= \int_0^r J_0^2(\rho \kappa) \rho d\rho - (k_0^2 - \gamma^2) (\tilde{\varepsilon} - 1) \times \\ &\times \int_0^r \int_0^r \rho J_0(\rho \kappa) K(\rho, \rho') J_0(\rho' \kappa) \rho' d\rho' d\rho = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

В уравнении (11) аналитически через функции Бесселя вычисляется только второй одинарный инте-

грал в двойном интеграле, а в (12) все интегралы аналитически выражаются через функции Бесселя. В общем случае интегралы выражаются через гипергеометрическую функцию и гамма-функцию, что неудобно для вычисления.

Мы поступим следующим образом. Будем использовать уравнение (12). Поскольку оно приближенное, вычислять комплексные функции Бесселя комплексного аргумента весьма точно с использованием стандартных программ не имеет особого смысла. Более быстрый алгоритм получается с использованием функций Бесселя через ряды, поскольку в силу малости r модуль аргумента ограничен, а все вычисления можно сделать в одном цикле, не вызывая подпрограмм. Интегралы вычисляем аналитически, заменив функции Бесселя J_0 и J_1 их приближенными выражениями в виде рядов. Для этого достаточно потребовать, чтобы $r|\kappa| < 1$. Это означает, что величина $|\tilde{\varepsilon}|$ не слишком велика (брались значения $|\tilde{\varepsilon}| \leq 10^3$, что соответствует величинам для некоторых металлов в инфракрасном и оптическом диапазонах). На самом деле это условие может быть сильно ослаблено. Поэтому указанное соотношение заведомо выполняется, если радиус стержней в десятки раз меньше длины волны, а частота не слишком низкая.

Запишем уравнение (12) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k_0, \mathbf{k}_\perp, \gamma, E_z) &= \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \int_0^{r\kappa} J_0^2(x) x dx - \frac{(k_0^2 - \gamma^2)(\tilde{\varepsilon} - 1)}{\kappa^4} \times \\ &\times \int_0^{r\kappa} \int_0^{r\kappa} x J_0(x) K\left(\frac{x}{\kappa}, \frac{x'}{\kappa}\right) J_0(x') x' dx' dx = 0. \end{aligned}$$

Обозначая первый интеграл $f(r\kappa)$, а второй $g(r\kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0)$, перепишем дисперсионное уравнение в виде

$$\kappa^2 = (k_0^2 - \gamma^2)(\tilde{\varepsilon} - 1) \frac{g(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0)}{f(r\kappa)}. \quad (13)$$

Такой вид удобно использовать для итерационного решения. Примененная ниже итерационная процедура имеет следующую схему. На заданной частоте (при заданном k_0) по дисперсии находим комплексную проницаемость $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, а также задаем комплексные значения k_x, k_y , определяя тем самым дисперсионную гиперповерхность. Затем начинаем итерации, задавая начальное значение $\gamma^{(0)}$ и определяя $\kappa^{(0)}$. Значение $\kappa^{(1)}$ находим по формуле (13), а далее получаем $\gamma^{(1)}$ по формуле $\gamma = \sqrt{k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \kappa^2}$ и т. д. Другая

использованная итерационная процедура построена на основе эквивалентной формулы

$$\gamma = \sqrt{k_0^2 - \frac{\kappa^2 f(r\kappa)}{(\tilde{\varepsilon} - 1)g(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0)}}. \quad (14)$$

Приведем выражения для введенных функций:

$$f(r\kappa) = \frac{(r\kappa)^2}{2} [J_0^2(r\kappa) + J_1^2(r\kappa)], \quad (15)$$

$$g(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0) = \frac{2\pi}{a^2} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\tilde{\kappa}_{mn}r, r\kappa)}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{ym}^2 + \gamma^2 - k_0^2}, \quad (16)$$

$$h(\tilde{\kappa}_{mn}r, r\kappa) = r\kappa \times \frac{J_1(r\kappa)J_0(r\tilde{\kappa}_{mn}) - (\tilde{\kappa}_{mn}/\kappa)J_0(r\kappa)J_1(r\tilde{\kappa}_{mn})}{1 - (\tilde{\kappa}_{mn}/\kappa)^2}. \quad (17)$$

Видим, что в первом порядке по $x = (r\kappa)^2$ функция (15) пропорциональна x . Поэтому соотношение (13) пригодно для метода прямой итерации. Действительно, отвлекаясь от других параметров, его можно записать как $x = x\theta(x)$, где функция $\theta(x)$ означает правую часть выражения (13), умноженную на r^2 , и $\theta(0) < 1$. Для выполнения принципа сжимающих отображений (сходимости) необходимо условие $|\theta(x) + x\theta'(x)| < 1$, что может выполняться при малых x .

В общем случае итерации удобно проводить на основе методов спуска в виде

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \tau_n \Delta_{n-1},$$

где невязка на шаге $n - 1$ есть $\Delta_{n-1} = \tilde{x}_n - \tilde{\theta}(\tilde{x}_{n-1})$, выбирая параметр итерации τ_n так, чтобы либо величина $|\Delta_n|$ была минимальной (метод минимальных невязок), либо из условия $|\Delta_n| < |\Delta_{n-1}|$ (спуск). Формулу (14) также можно использовать в итерационных методах с минимизацией невязки. Вблизи корня (при малой невязке) сходимость таких методов замедляется, и лучше переходить к методу прямой итерации. Именно таким образом ниже получены численные результаты.

Приведем вид уточненного интегрального уравнения в случае, когда учтены две компоненты поля, E_ρ и E_z . Чисто формально распространение плоской волны в ФК можно рассматривать как ее движение под углом $\theta = \arctg(\gamma/\sqrt{k_x^2 + k_y^2})$ к оси проволочек. При таком движении должна возникнуть малая

компонента $E_\rho(\rho) = C_2 J_1(\rho\kappa)$, которая также удовлетворяет некоторому волновому уравнению. Вид этой компоненты определен условием $E_\rho(0) = 0$, а вид соответствующего волнового уравнения получим из следующих рассуждений. В отсутствие E_φ имеем $E_x = E_\rho \cos \varphi$, при этом $(\nabla_\perp^2 + \kappa^2)E_x = 0$. Разобьем поперечный оператор ∇_\perp^2 на радиальную и азимутальную части $(\nabla_\perp^2 = \nabla_\rho^2 + \rho^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2)$ и подействуем им на E_x . Мы видим, что E_z удовлетворяет волновому уравнению (10) с азимутальным индексом $n = 0$, тогда как E_x удовлетворяет волновому уравнению с азимутальным индексом $n = 1$, т. е. в волновое уравнение типа (10) входит дополнительный член $-\rho^{-2}$. Поскольку поле внутри стержня является соленоидальным, должно быть

$$\frac{\partial \rho E_\rho(\rho)}{\rho \partial \rho} - i\gamma E_z(\rho) = J_0(\rho\kappa) [\kappa C_2 - i\gamma C_1] = 0.$$

Это соотношение выполняется, если $C_2 = i\gamma C_1/\kappa$. Выразим из него $E_z(\rho)$ через $E_\rho(\rho)$.

Если теперь записать систему двух связанных интегральных уравнений для этих компонент, получим уточненное дисперсионное уравнение. Именно, z -компонента вектор-потенциала имеет вид (3), а ρ -компоненту следует записать в виде [27]

$$A_\rho(x, y) = i\omega\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \times \int_S \tilde{G}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) E_\rho(\mathbf{r}'_\perp) \cos(\varphi - \varphi') d^2r'. \quad (18)$$

Переходя в полярную систему координат по приведенным выше соотношениям и учитывая, что

$$E_\rho(\mathbf{r}'_\perp) = E_\rho(\rho'),$$

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2} [\exp(i(\varphi - \varphi')) + \exp(i(\varphi' - \varphi))],$$

выполним интегрирование по φ' . Тогда в одном из рядов останутся только члены с $J_1(\rho'\tilde{\kappa}_{mn})$ и $-J_{-1}(\rho'\tilde{\kappa}_{mn})$, т. е. с индексами ± 1 . Для того чтобы выражение (18) не зависело от φ , во втором ряду также должны остаться члены с индексами $n = \pm 1$, поскольку для каждого такого члена $\exp(-in\varphi)$ имеет экспонента в разложении $\cos(\varphi - \varphi')$ с противоположным знаком аргумента. В результате имеем

$$A_\rho(\rho) = i\omega\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \int_S \tilde{K}(\rho, \rho') E_\rho(\rho') \rho' d\rho', \quad (19)$$

$$\tilde{K}(\rho, \rho') = \frac{2\pi}{a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_1(\rho\tilde{\kappa}_{mn})J_1(\rho'\tilde{\kappa}_{mn})}{\tilde{\kappa}_{mn}^2 + \gamma^2 - k_0^2}. \quad (20)$$

Полученные выражения (18), (20) по форме соответствуют соотношениям в декартовой системе, что имеет место только при азимутальной симметрии. Поскольку в этом случае компоненты вектор-потенциала удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\rho \partial \rho} \frac{\rho \partial}{\partial \rho} + k^2 - \gamma^2 - n^2 \rho^{-2}\right) A_{(\rho,z)} = -i\omega \varepsilon_0 (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) E_{(\rho,z)}$$

(причем $n = 1$ для первой компоненты и $n = 0$ для второй), ядра (18) и (20) должны удовлетворять аналогичному уравнению с правой частью $-\delta(\rho - \rho') \exp(-i\psi_{mn})/\rho'$, где $\psi_{mn} = 2(mk_x/a + nk_y/a)$. Это в некотором роде обобщение известного соотношения

$$\int_0^\infty J_n(\chi \rho) J_n(\chi \rho') \chi d\chi = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'}$$

которое может быть получено из рядов при $a \rightarrow \infty$ с применением формулы суммирования Пуассона.

Теперь пишем дивергенцию вектор-потенциала,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial \rho A_\rho}{\rho \partial \rho} - i\gamma A_z,$$

и компоненты поля

$$E_\rho = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} \right] + k_0^2 \varepsilon A_\rho - i\gamma \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right\},$$

$$E_z = -\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{\partial \rho A_\rho}{\rho \partial \rho} \right) + (k_0^2 \varepsilon - \gamma^2) A_z.$$

Очевидно, имеем систему связанных интегральных уравнений:

$$E_\rho(\rho) = (\tilde{\varepsilon} - 1) \int_0^r \left\{ \left[k_0^2 + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \times \right. \\ \left. \times \rho \tilde{K}(\rho, \rho') E_\rho(\rho') - i\gamma \frac{\partial}{\partial \rho} K(\rho, \rho') E_z(\rho') \right\} \rho' d\rho', \quad (21)$$

$$E_\rho(\rho) = (\tilde{\varepsilon} - 1) \int_0^r \left\{ -i\gamma \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left[\rho \tilde{K}(\rho, \rho') \right] \times \right. \\ \left. \times E_\rho(\rho') + (k_0^2 - \gamma^2) K(\rho, \rho') E_z(\rho') \right\} \rho' d\rho'. \quad (22)$$

Умножая уравнение (21) на $E_\rho(\rho)\rho$, а (22) на $E_z(\rho)\rho$ и интегрируя, получаем систему двух уравнений, которая с учетом соотношения $C_2 = i\gamma C_1/\kappa$ есть система уравнений, связывающая k_x , k_y

и γ при заданном k_0 . Используя соотношение $i\gamma E_z(\rho) = \partial \rho E_\rho(\rho)/\rho \partial \rho$, умножая уравнение (21) на ρ и дифференцируя по ρ , сводим эту систему интегральных уравнений к одному интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^r \rho \left\{ \left[k_0^2 + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \rho \tilde{K}(\rho, \rho') E_\rho(\rho') - \right. \\ \left. - i\gamma \frac{\partial}{\partial \rho} K(\rho, \rho') \frac{\partial}{\rho' \partial \rho'} [\rho' E_\rho(\rho')] \right\} \rho' d\rho' = \\ = i\gamma \int_0^r \rho \left\{ -i\gamma \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left[\rho \tilde{K}(\rho, \rho') \right] E_\rho(\rho') + \right. \\ \left. + (k_0^2 - \gamma^2) K(\rho, \rho') \frac{\partial}{\rho' \partial \rho'} [\rho' E_\rho(\rho')] \right\} \rho' d\rho'.$$

Достаточно громоздкие выкладки показывают, что в принятом приближении функционал, построенный на основе этого уравнения, мало отличается от использованного функционала (12).

4. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ

Для получения численных решений задач дифракции на сложных неоднородных структурах, содержащих гиперболические метаматериалы, удобно вводить тензор эффективной диэлектрической проницаемости [21]. Для этого по данной модели нужно провести гомогенизацию. В диссипативном ФК зоны очень больших и малых потерь чередуются. Проблема решения дисперсионного уравнения в том, что оно определяет величину γ как комплексную функцию двух комплексных аргументов: $\gamma = F(k_0, k_x, k_y)$. В ФК без диссипации при фиксированном k_0 эта многолистная поверхность в $3D$ -пространстве \mathbf{k} определяет пространственную дисперсию. В случае диссипации получается гиперповерхность в $6D$ -пространстве. При этом поперечный волновой вектор \mathbf{k}_\perp нельзя задавать произвольно [12–14]. В случае малых потерь мы можем считать, что действительные и мнимые части величин k_x , k_y и $\tilde{\kappa} = |\mathbf{k}_\perp| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ связаны между собой так, как они связаны для волнового числа $k_0 \sqrt{\varepsilon_{eff}}$ в эквивалентной гомогенной среде, где $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$ и ε_{eff} — эффективные показатель преломления и диэлектрическая проницаемость такой среды. Величина ε_{eff} должна получаться на основе некоей процедуры гомогенизации [20, 21, 36–38], что требует решения точного дисперсионного уравнения [20]. Наиболее просто поперечную часть эффективной диэлектрической проницаемости можно взять (при $\varepsilon = 1$) в приближенном виде

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \delta(\tilde{\varepsilon} - 1) \quad (23)$$

с коэффициентом заполнения $\delta = \pi r^2/a^2 < 0.1$. Диэлектрическая проницаемость исследуемого одноосного ФК есть диагональный тензор. Если рассматривать ФК с идеально проводящими стержнями, то в отсутствие диэлектрической основы ($\varepsilon = 1$) имеем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1$, а ε_{zz} определяется током вдоль проволок, причем для волны следует пользоваться зависимостью $\exp[i(k_0ct - k_x x - k_y y - \gamma z)]$, где все входящие в нее величины удовлетворяют дисперсионному уравнению. Таким образом, имеем функцию $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(k_0, k_x, k_y, \gamma)$, которая определяет пространственно-временную дисперсию ФК и при определенных параметрах может стать отрицательной [12, 13].

Сведя поверхностное интегральное уравнение к линейному для осевого тока, выражая линейную плотность заряда через дивергенцию тока, получим для вектора поляризации ячейки периодичности $|x| < a/2$, $|y| < a/2$, $|z| \leq l/2 = \pi/\gamma$ выражение [12]

$$P_z^e = \frac{I\gamma^2}{2\omega a^2 \pi} \int_{-\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} z e^{-i\gamma z} dz = -\frac{iI}{\omega a^2}, \quad (24)$$

где I — линейный ток, которому пропорционально электрическое поле. Усреднение в (24) выполнено симметрично по длине $l = 2\pi/\gamma$, равной длине волны. Можно увеличить l на $2m\pi/\gamma$, что не изменит (24) при целом m . Используя связь $D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z^e = \varepsilon_0 \varepsilon_{zz} E_z$, имеем выражение для искомой компоненты:

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{P_z^e}{\varepsilon_0 \langle E_z \rangle}.$$

Поскольку P_z^e есть усредненный вектор поляризации по ячейке, $\langle E_z \rangle$ есть усредненная по ячейке компонента поля. Она отсутствует внутри идеального металлического стержня. В этом случае усреднять надо по внешней области. Однако на поверхности тонкого металлического стержня $E_z = 0$. Поскольку это условие наложено приближенно (E_z удовлетворяет дисперсионному уравнению), усреднение можно проводить по всей ячейке, так как величина E_z мала внутри стержня в силу малости r .

При плотности линейного тока $J_z(x, y, z) = I\delta(x)\delta(y)e^{-i\gamma z}$ имеем

$$E_z(\mathbf{r}) = \frac{k_0^2 - \gamma^2}{i\omega\varepsilon_0 a^2} I \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(\tilde{k}_{xm}x - \tilde{k}_{yn}y - \gamma z)]}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k_0^2}. \quad (25)$$

Для усреднения этой компоненты по координате x рассмотрим функцию

$$F_m(k_x, a) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-i\tilde{k}_{xm}x) dx = \frac{2 \sin(\tilde{k}_{xm}a/2)}{a\tilde{k}_{xm}} = \frac{2(-1)^m \sin(k_x a/2)}{a(k_x + 2m\pi/a)}. \quad (26)$$

Аналогично выполняется усреднение по другой координате y . Усреднение по z сделаем симметрично по области $-l/2 < z < l/2$, что дает

$$F(\gamma, l) = \frac{2 \sin(\gamma l/2)}{\gamma l}.$$

Если $l = 2\pi/\gamma$, то усреднение дает нуль. Берем $l = \pi/\gamma$ и $F(\gamma, l) = 2/\pi$, что соответствует усреднению по половине длины волны. В работе [12] усреднение выполнено путем интегрирования функции $F(\gamma, l)$ по l :

$$\langle F(\gamma, l) \rangle = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-2\pi/\gamma}^{2\pi/\gamma} \frac{\sin(\gamma l/2)}{\gamma l} dl = \frac{\text{si } \pi}{\pi} \approx 0.589, \quad (27)$$

где $\text{si } x$ — интегральный синус.

Если усреднить таким способом поляризацию, получим

$$P_z^e = -\frac{iI \text{si } \pi}{\pi \omega a^2},$$

т. е. отличие от (24) не очень существенное. Очевидно

$$\langle E_z(\mathbf{r}) \rangle \approx \frac{I(k_0^2 - \gamma^2) \text{si } \pi}{i\omega\varepsilon_0 \pi a^2} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_m(k_x) F_n(k_y)}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k_0^2}. \quad (28)$$

На поверхности штыва поле имеет вид

$$E_z(r, \varphi, z) = \frac{k_0^2 - \gamma^2}{i\omega\varepsilon_0 a^2} e^{-i\gamma z} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-ir(\tilde{k}_{xm} \cos \varphi - \tilde{k}_{yn} \sin \varphi)]}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k_0^2} \quad (29)$$

и должно обращаться в нуль. Интегрируя его по φ и приравнявая нулю, имеем дисперсионное уравнение [12]

$$\begin{aligned} \Phi(k_0, k_x, k_y, \gamma) &= \\ &= \Phi_0(k_0, \gamma)\Phi_1(k_0, k_x, k_y, \gamma) = (k_0^2 - \gamma^2) \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_0\left(r\sqrt{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2}\right)}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k_0^2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Очевидно, что $\gamma = \pm k_0$ есть его решение. Оно соответствует распространению прямой и обратной Т-волн вдоль идеально проводящих штырей. Такая волна не наводит токи в штырях и распространяется без взаимодействия с ними и без потерь, т. е. без формирования поля за счет переотраженных волн. Это тривиальный случай. Указанная волна не созда-

ет поле (25), и ее следует исключить при проведении гомогенизации. Таким образом, имеем дисперсионное уравнение

$$\Phi_1(k_0, k_x, k_y, \gamma) = 0.$$

На первой дисперсионной ветви оно определяет медленные и быстрые волны, отделенные зоной непропускания. Волны с $\gamma = \pm k_0$ существуют везде и проходят через эту зону. При вычислении среднего поля (28) мы интегрировали по всей ячейке.

Для того чтобы исключить область штыря, примем для простоты, что штырь имеет квадратную форму размером $\tilde{a} = \pi r/2$. Тогда

$$\langle E_z(\mathbf{r}) \rangle = \frac{I(k_0^2 - \gamma^2)si\pi}{i\omega\varepsilon_0\pi a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_m(k_x, a)F_n(k_y, a) - F_m(k_x, \pi r/2)F_n(k_y, \pi r/2)}{\tilde{k}_{xm}^2 + \tilde{k}_{yn}^2 + \gamma^2 - k_0^2}. \quad (31)$$

Окончательно для второго усреднения получаем

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \left[(k_0^2 - \gamma^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_m(k_x, a)F_n(k_y, a) - F_m(k_x, \pi r/2)F_n(k_y, \pi r/2)}{k_0^2 - \gamma^2 - \tilde{k}_{xm}^2 - \tilde{k}_{yn}^2} \right]^{-1}. \quad (32)$$

При первом усреднении в правой части уравнения (31) появляется множитель $si\pi/\pi$. Поскольку $F_m(k_x, \pi r/2) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, вклад дополнительных слагаемых в сумму должен быть малым, и можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 - \left[(k_0^2 - \gamma^2) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_m(k_x, a)F_n(k_y, a)}{k_0^2 - \gamma^2 - \tilde{k}_{xm}^2 - \tilde{k}_{yn}^2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для функции (26) выполняется соотношение $F_m(0, a) = \delta_{m0}$. Поэтому при $k_x = k_y = 0$ в двойной сумме остается один член с $m = n = 0$, и мы получаем $\varepsilon_{zz} = 0$, что соответствует низкочастотной отсечке для гиперболических метаматериалов. Для выражения (32) в этом случае получается неопределенность, поскольку оно (как и (33)) получено с использованием ряда приближений. В частности, здесь следует более точно в цилиндрических координатах вычислить вычитаемые члены. Пусть $k_y = 0$ и $k_x a = \pi$. Поскольку $F_m(k_x, a) = 2(-1)^m/(2m + 1)\pi$, получаем

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \pi \left\{ 2\alpha^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{[(2m+1)^2 - \alpha^2](2m+1)} \right\}^{-1},$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 + \frac{\pi}{2\alpha^2} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{[(2m+1)^2 - \alpha^2](2m+1)} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{[(2m-1)^2 - \alpha^2](2m-1)} \right] \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

где $\alpha^2 = (k_0^2 - \gamma^2)(a^2/\pi^2)$. Будем рассматривать быстрые вдоль оси волны, т. е. $\alpha^2 > 0$ (ниже первой зоны непропускания всегда $\alpha^2 < 1$). Полученный ряд суммируется, но скорость его сходимости столь высока, что достаточно учесть один член:

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{\pi}{2\alpha^2} \left\{ \frac{2}{1 - \alpha^2} - \frac{1}{27 - 3\alpha^2} \right\}^{-1}. \quad (34)$$

Если $\gamma = 0$, то

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{\pi}{2k_0^2 a^2} \left\{ \frac{2}{\pi^2 - k_0^2 a^2} - \frac{1}{27\pi^2 - 3k_0^2 a^2} \right\}^{-1}. \quad (35)$$

Как следует из решения дисперсионного уравнения [12], вблизи зоны непропускания произведение $k_0 a < \pi$ и уменьшается с ростом r , поэтому для более точного анализа здесь желательно взять выражение (32) и получить зависимость проницаемости от r , что элементарно, и мы это опускаем. Если $r \rightarrow 0$, то $k_0 a \rightarrow \pi$ и, согласно (35), $\varepsilon_{zz} \rightarrow 1$ сверху. Таким образом, мы показали, что при изменении $0 \leq k_x a \leq \pi$ при $k_y = \gamma = 0$ компонента ε_{zz} изменяется от нуля до некоторого значения $\varepsilon_{zz} = \tilde{\varepsilon}_{zz} > 1$.

Теперь из выражения (35) легко найти соответствующую частоту. Можно пренебречь вторым членом в фигурных скобках. Тогда

$$k_0 a = \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4(\tilde{\varepsilon}_{zz} - 1)/\pi}}.$$

Ниже этой частоты в зоне непропускания величина k_x становится мнимой: $k_x = -i|k_x|$ (волна экспоненциально затухает). В выражении (26) следует заменить синус на $-i \operatorname{sh}(|k_x|a/2)$. Соответственно

$$F_m(k_x, a) = -\frac{2i(-1)^m \operatorname{sh}(\pi/2)}{\pi(2m - i)},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 - \pi \left[2(k_0^2 - \gamma^2) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{k_0^2 - \gamma^2 + (\pi/a)^2} - \frac{2 \operatorname{Im} \left((2+i) [k_0^2 - \gamma^2 - (\pi/a)^2 (2+i)^2] \right)}{|(2-i) [k_0^2 - \gamma^2 - (\pi/a)^2 (2-i)^2]|^2} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Нетрудно проверить, что теперь $\varepsilon_{zz} < 0$. Для случая $\gamma = 0$ поперечной компоненты нет, а продольная компонента в гомогенной среде с эффективной проницаемостью должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 \varepsilon_{zz} E_z = (k_0^2 \varepsilon_{zz} - k_x^2) E_z = 0.$$

Поэтому $\varepsilon_{zz} = n_{xx}^2 = k_x^2/k_0^2$, где n_{xx} — эффективный коэффициент замедления в направлении x . Вычисляя его путем решения дисперсионного уравнения, находим ε_{zz} другим путем. Выше частоты отсечки величина $\varepsilon_{zz} > 1$ и резко принимает отрицательные значения при переходе через отсечку в зоне непропускания, где $k_x = -i|k_x|$. В случае наличия потерь (импедансные штыри и т. п.) все соотношения становятся комплексными. Оба метода гомогенизации применимы в общем случае при распространении волны под произвольным углом к штырям, но соотношения усложняются. В случае хороших металлических свойств (малых потерь) в тензоре эффективной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon}_{eff} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{eff} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{eff} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (37)$$

можно использовать значения (23), (32). Гомогенизация может быть выполнена и для стержней, описанных выше с помощью диэлектрической проницаемости и объемного интегрального уравнения, что мы не приводим. Отметим только, что для определения поля и поляризации следует использовать линейный осевой ток

$$I_z(\omega) = i\omega\varepsilon_0\pi r^2 [\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon] E_z(0, \omega).$$

В работе [12] аналогично выполнена гомогенизация для металлических штырей конечной длины $l < a$. В этом случае низкочастотной отсечки нет.

Итак, гомогенизация — процедура неоднозначная, зависящая от метода ее проведения и методов усреднения поля и поляризации. В нашем случае второй метод усреднения дает результаты, более соответствующие решению дисперсионного уравнения [12].

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представленные ниже численные результаты для ФК (рис. 2–5) получены путем итераций на основе формулы (13). Сходимость достигалась несколькими итерациями. Итерации по формуле (14) также соответствуют этим решениям, но эта формула быстрее сходится, когда диэлектрическая проницаемость стержней близка к диэлектрической проницаемости диэлектрика. При наших допущениях функцию (17) удобно вычислять с помощью рядов:

$$\begin{aligned} h(\tilde{\kappa}_{mn}r, \kappa r) = \frac{(\kappa r)^2}{1 - (\tilde{\kappa}_{mn}/\kappa)^2} \times \\ \times \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N \frac{(-1)^{m_1+n_1} (\tilde{\kappa}_{mn}r)^{2m_1} (\kappa r)^{2n_1}}{2^{2m_1+2n_1+1} m_1! n_1!} \times \\ \times \left[\frac{1}{m_1!(n_1+1)!} - \left(\frac{\tilde{\kappa}_{mn}}{\kappa}\right)^2 \frac{1}{(m_1+1)!n_1!} \right]. \end{aligned}$$

Скорость сходимости всех приведенных рядов при $|\tilde{\kappa}_{mn}r| \leq 1$, $|\kappa r| \leq 1$ весьма высокая.

Исследуем аналитически решения уравнения (13) при малых $r\kappa$. В предельном случае, используя (13) и удерживая в сумме только нулевой член, имеем

$$\kappa^2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2 \approx (k_0^2 - \gamma^2)(\tilde{\varepsilon} - 1) \times \frac{4\pi(r\kappa)^2}{a^2 [k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2 - k_0^2]}, \quad (38)$$

откуда при $4\pi r^2 |\tilde{\varepsilon} - 1| \ll a^2$ следует

$$\gamma^2 \approx \frac{4\pi r^2 k_0^2 (\tilde{\varepsilon} - 1) - a^2 [k_x^2 + k_y^2 - k_0^2]}{a^2 + 4\pi r^2 (\tilde{\varepsilon} - 1)} \approx k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 + 4\pi \left(\frac{r}{a}\right)^2 k_0^2 (\tilde{\varepsilon} - 1).$$

В частности, при малых $|k_x|, |k_y|$ имеем $\gamma \sim k_0$. В этом случае учет одного члена в сумме оправдан. Вблизи границы зоны Бриллюэна следует учитывать и другие члены. Однако из выражения (38) следует, что при указанном приближении возможно также решение $\gamma = k_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, что и наблюдается при итерациях на основе (13). Формулу (14) преобразуем, введя соотношения

$$g(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0) = (r\kappa)^4 \tilde{g}(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0), \\ h(\tilde{\kappa}_{mn} r, \kappa r) = (\kappa r)^2 \tilde{h}(\tilde{\kappa}_{mn} r, \kappa r), \\ f(r\kappa) = (r\kappa)^2 \tilde{f}(r\kappa).$$

Тогда из формулы (14) получаем следующий ее вид, удобный для итераций:

$$\gamma = \sqrt{k_0^2 - \frac{\tilde{f}(r\kappa)}{r^2 (\tilde{\varepsilon} - 1) \tilde{g}(r, \kappa, k_x, k_y, \gamma, k_0)}}, \quad (39)$$

для которого итерации при малых потерях также сходятся в центре зоны Бриллюэна к решению $\gamma \sim k_0$.

Соотношение (13) можно использовать и для получения закона дисперсии волн, распространяющихся перпендикулярно структуре. В этом случае $\gamma = 0$ и, задавая k_x, k_y , находим

$$k_0 = \frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}} f(rk_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}})}{(\tilde{\varepsilon} - 1) g(r, k_0, \sqrt{\tilde{\varepsilon}}, k_x, k_y, 0, k_0)}. \quad (40)$$

Поскольку величина (40) должна быть действительной, целесообразно организовать итерационную процедуру следующим образом. Задаем начальное значение k_0 и комплексные начальные значения k_x и k_y , а затем осуществляем связанные итерации: следующее значение k_0 определяем по формуле

$$k_0 = \text{Re} \frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}} f(rk_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}})}{(\tilde{\varepsilon} - 1) g(rk_0, \sqrt{\tilde{\varepsilon}}, k_x, k_y, 0, k_0)}, \quad (41)$$

а затем, используя его, уточняем k_y по формуле

$$k_y = k_y - \tau \text{Im} \frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}} f(rk_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}})}{(\tilde{\varepsilon} - 1) g(rk_0, \sqrt{\tilde{\varepsilon}}, k_x, k_y, 0, k_0)}, \quad (42)$$

где τ — параметр итерации.

Все полученные соотношения носят приближенный характер, поскольку в ФК с диссипацией строго азимутально-независимое в штыре поле невозможно. В случае диэлектрических стержней малого радиуса это приближение дает достаточно хорошие результаты, а его точность определяется малыми параметрами $r/a, a/\lambda$. Для идеального диэлектрика ($\tilde{\varepsilon}$ — положительная константа) величины (13) и (20) действительные в полосе пропускания.

Расчеты проведены с комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}' - i\tilde{\varepsilon}''$ диэлектриков и металлов при $\delta < 0.1$. Для металлов вблизи ультрафиолетового диапазона $\tilde{\varepsilon}' > 0$, а переход этой величины через нуль осуществляется в инфракрасном или в оптическом диапазоне при существенных потерях [32]. Для диэлектриков в этих случаях $\tilde{\varepsilon}' > 1$. В рентгеновском диапазоне уже $\tilde{\varepsilon} \approx \tilde{\varepsilon}' < 1$. Волны в рассмотренной структуре являются втекающими и подобны поверхностной волне Ценнека, которая втекает в диссипативную полуплоскость под малым углом и может быть как быстрой, так и медленной. Вдоль поверхности плазмы металла возможны как медленные, так и быстрые поверхностные плазмоны [39]. Для границы вакуум — гиперболический метаматериал (индефинитная среда) поверхностные плазмоны исследованы в работе [40].

В нашем случае также интересно рассмотреть переходы от быстрых волн к медленным. На низких частотах волна почти не втекает в хорошо проводящие стержни, а при малом поперечном волновом числе распространяется практически параллельно стержням со скоростью немного меньшей скорости света. На сверхнизких частотах замедление усиливается, так как радиус стержня становится существенно меньше скин-слоя. В коротковолновом оптическом и ультрафиолетовом диапазонах стержни можно считать диэлектрическими, и вдоль них может идти медленная слабовтекающая волна — аналог волны в диэлектрическом волноводе. Промежуточному случаю соответствуют медленные и быстрые плазменные волны.

В случае одиночного провода (стержня) получаем задачу Зоммерфельда с волной Зоммерфельда — Ценнека вдоль одиночного провода. Зоммерфельд в 1899 г. получил дисперсионное уравнение для этой волны в виде

$$\frac{r\kappa_0 K_0(r\kappa_0)}{K_1(r\kappa_0)} \approx - (r\kappa_0)^2 \left(C + \ln \frac{r\kappa_0}{2} \right) = -i\xi k_0 r, \quad (43)$$

решая задачу дифракции плоской волны на проводе [26, 27]. В этом случае основная волна азимутально-симметричная. Известно, что она медленная на относительно низких частотах ($\lambda \gg a$), когда обе части уравнения (43) малы. В [27] это уравнение было получено наложением импедансного граничного условия Леонтовича, т. е. путем пренебрежения полем внутри стержня, и решалось итерациями. В нем $\kappa_0 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2}$, а комплексный нормированный импеданс равен $\xi = 1/\sqrt{\tilde{\epsilon}}$. Для такого пренебрежения необходимо, чтобы поле внутри провода было очень мало, для чего должно быть $\tilde{\epsilon}'' \gg 1$. Заметим, что неравенства $|\tilde{\epsilon}| \gg 1$ недостаточно: в диэлектрическом стержне с большой диэлектрической проницаемостью и малыми потерями поле внутри рассматривать нужно. Можно показать, что в пределе $r \rightarrow \infty$ уравнение (43) переходит в дисперсионное уравнение для волны Ценнека над полуплоскостью (формула (60.01) в [27]). Решение уравнения (43) всегда искалось в приближении $\xi k_0 r \ll 1$ и $\kappa_0 r \ll 1$. Но у этого уравнения должны быть и решения в виде быстрых волн. Для их рассмотрения лучше шить поля при $\rho = r$, в результате чего получается дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_0 r K_0(\kappa_0 r)}{K_1(\kappa_0 r)} &= - \frac{\kappa r J_0(\kappa r)}{\tilde{\epsilon} J_1(\kappa r)} \approx \\ &\approx \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \frac{1 - (\kappa r)^2/2 + (\kappa r/2)^4/4 - \dots}{1/2 - (\kappa r/2)^2/2 + (\kappa r/2)^4/2 - \dots}. \end{aligned} \quad (44)$$

Обозначив диэлектрическую проницаемость кристаллической решетки как ϵ_L , диэлектрическую проницаемость металла возьмем в виде

$$\tilde{\epsilon} \approx \epsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\omega_c}, \quad (45)$$

где ω_p и ω_c — плазменная частота и частота столкновений в металле. В формуле не учитываются межзонные переходы [39]. При малых $|\kappa_0|$ и $|\kappa_0 r| \ll 1$ левая часть уравнения (44) мала, при этом $\gamma \approx k_0$, $\tilde{\epsilon} \approx -i\omega_p^2/\omega\omega_c$ и поэтому $|\kappa r| \ll 1$. Отличие уравнения (44) от (43) в том, что в последнем импедансное условие наложено без учета кривизны поверхности. Обозначая правую часть уравнения (44) как $\Phi(\kappa a)$, получаем формулу для итераций:

$$(r\kappa_0)^2 = \Phi(\kappa r) \left\{ [C + \ln(r\kappa_0/2)]^{-1} - r\kappa_0 \right\}.$$

Представляет интерес сравнить азимутально-симметричное решение на основе (43) или (44)

с приближенным решением для разреженного ФК, когда стержни можно считать несвязанными (одиночными). Очевидно, чтобы исследовать почти одиночный стержень на основе приведенных выше интегральных уравнений, следует взять весьма большое значение периода a . Однако получить волну, втекающую в стержень (т. е. сходящуюся к нему), нельзя. Это обусловлено тем обстоятельством, что в бесконечной структуре из периодических стержней волна плоская и втекает во всю структуру, и одну такую волну нельзя преобразовать в цилиндрическую. Предельный случай $k_x = k_y = 0$ означает азимутальную симметрию в отсутствие втекания, что соответствует движению вдоль оси со скоростью света [27] (рис. 2а, точка Г). Таким образом, в предельном случае уравнения (43) и (13), (14) дают совпадающие решения.

Вывести соотношения для одиночного стержня, аналогичные приведенным выше, весьма просто. Для этого в выражении (2) следует использовать функцию Грина для свободного пространства, что приводит в соотношениях (4)–(8) и последующих для цилиндрического азимутально-симметричного случая к функции Грина

$$G(\rho, \rho') = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\chi\rho)J_0(\chi\rho')}{\chi^2 + \gamma^2 - k^2} \chi d\chi.$$

Для диэлектрического стержня без потерь существуют собственные поверхностные медленные волны круглого диэлектрического волновода, а ниже частот их отсечек — несобственные вытекающие. Для диэлектрического волновода с малыми потерями собственная волна превращается в медленную поверхностную квазисобственную слабовтекающую моду, подобную волне Зоммерфельда–Ценнека. С понижением частоты эта медленная мода может стать быстрой вытекающей, а затем опять медленной [41]. Дифракция плоской волны на диэлектрическом стержне, поверхностные плазмоны и аномалии Вуда рассмотрены в работе [42].

Численное исследование методом прямой итерации показало, что итерации на основе соотношения (13) лучше сходятся к решениям типа $\gamma \approx k_0\sqrt{\tilde{\epsilon}}$ (медленные волны диэлектрического волновода), а на основе (14) и (39) — к решениям $\gamma \sim k_0\sqrt{\epsilon_{eff}} \sim k_0$ («быстрые волны» вдоль проволок) из любых начальных приближений, которые использовались. Начальные значения γ брались в интервале $0 \leq \gamma \leq k_0|\sqrt{\tilde{\epsilon}}|$. Использовались также эти значения, умноженные на $\sqrt{\epsilon_{eff}}$. Здесь термин «быстрые волны» понимается также и в смысле волн, име-

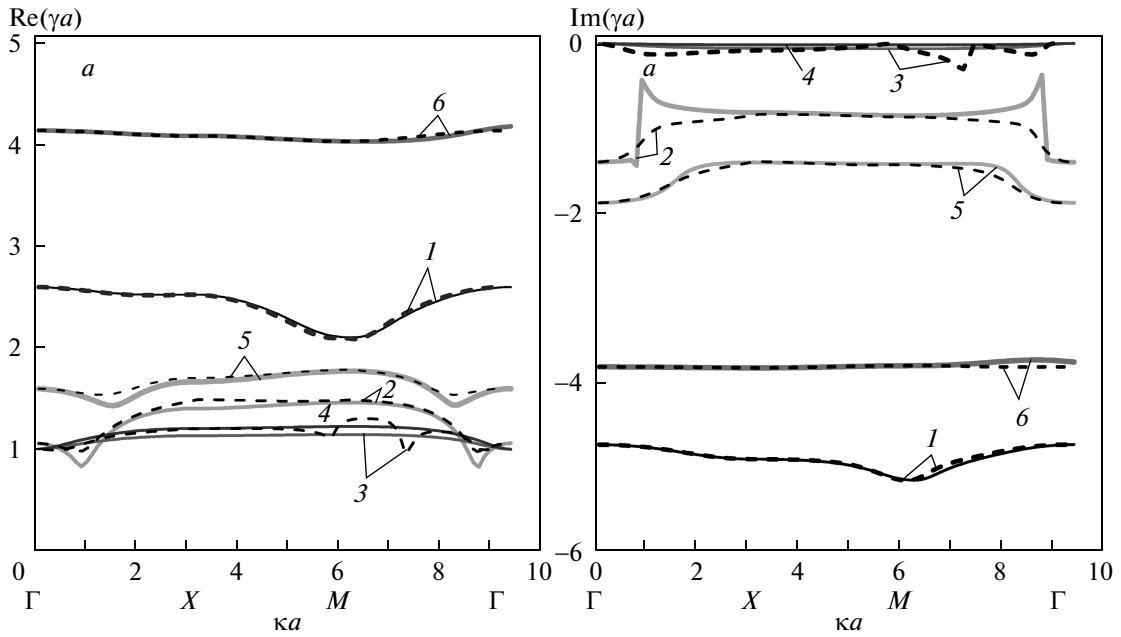


Рис. 2. Пространственная дисперсия (а) и потери (б) волны вдоль стержней при $k_0 a = 1$, $r/a = 0.05$ и использовании действительных (сплошные кривые) и комплексных (штриховые кривые) значений k_x и k_y : $\tilde{\epsilon} = 3 - 10i$ (кривые 1); $-10 - 100i$ (2); $-100 - 1000i$ (3); $-900 - 1000i$ (4); $-3 - 50i$ (5); $-3 - 10i$ (6)

ющих скорость, немного большую скорости света. Для контроля сходимости модуль производной правой части уравнения (39) вычислялся численно и был меньше единицы. Итерации прерывались, когда относительная погрешность становилась меньше 10^{-6} . При задании начального приближения $\gamma = k_0$ сходимость достаточно медленная: требуется от 10 до 30 итераций. Однако затем при изменении k_x и k_y в качестве начальных использовались близкие к корню предыдущие значения γ , что уменьшало число итераций до 3.

На рис. 2 представлены результаты вычисления нормированной пространственной дисперсии $\text{Re}(\gamma a)$ и нормированного затухания $\text{Im}(\gamma a)$ для волны вдоль стержня. Сплошные кривые соответствуют случаю, когда значения k_x и k_y задавались вещественными значениями, которые изменялись в пределах первой зоны Бриллюэна, штриховые кривые — когда задаваемые комплексные значения k_x и k_y при подстановке в (39) умножались на $\sqrt{\epsilon_{eff}}$. При этом $k_y = 0$ и $\kappa = \text{Re} k_x$ в интервале (Γ, X) , $\kappa = \text{Re} k_x + \text{Re} k_y$ в интервале (X, M) при изменении только k_y и $\kappa = k_y$ в интервале (M, Γ) , при этом величина $\kappa = \text{Re} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ откладывалась в обратном порядке. Различные значения $\tilde{\epsilon}$ могут соответствовать разным металлам, полуметаллам и полупро-

водникам при некоторых температурах и частотах. По-видимому, результаты для комплексных значений k_x и k_y (штриховые кривые) более соответствуют реальности, так как трудно предположить существование волн без поперечных потерь, хотя различие и невелико.

Для исследования частотной дисперсии конкретного металла следует построить соответствующую функцию $\tilde{\epsilon}(\omega)$ [32, 39]. Будем пользоваться упрощенной формулой (25). На рис. 3 представлены зависимости пространственной дисперсии комплексного показателя замедления $n = n' - in'' = \gamma/k_0$ штырей из золота для разных длин волн оптического и ближнего инфракрасного диапазонов, полученные на основе формулы (39). При этом использованы значения $\epsilon_L = 10$, $\omega_p = 1.37 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 2.56 \cdot 10^{14}$ Гц. С ростом длины волны замедление и потери убывают. В диапазоне $0.7 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 1.8 \text{ мкм}$ диэлектрическая проницаемость изменяется от $-15.8 - 0.6i$ до $-190.5 - 24.3i$.

Потери растут при приближении свойств материала стержня к свойствам диэлектрика. Максимальные потери соответствуют случаю диэлектрика с большими потерями $\text{Re} \tilde{\epsilon} \sim \text{Im} \tilde{\epsilon} > 0$, что для металлов с большой проводимостью реализуется в оптическом диапазоне или в ближнем ультрафио-

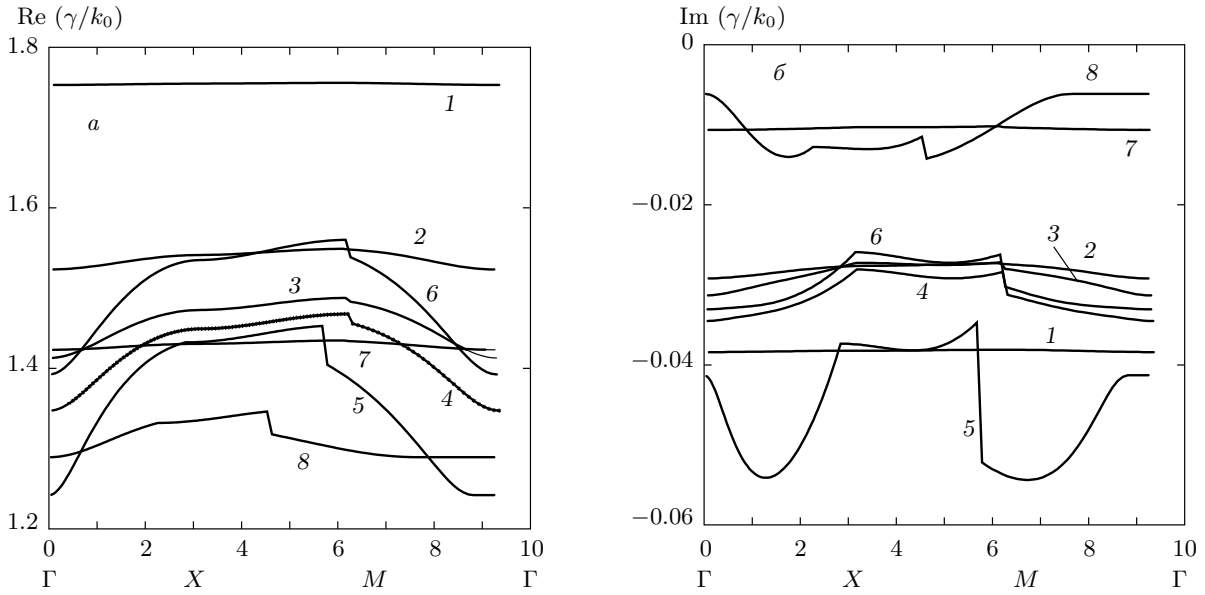


Рис. 3. Замедление $n' = \text{Re}(\gamma/k_0)$ (а) и нормированные потери (б) для структуры из золотых проволок. Кривым 1–5 соответствуют размеры $r = 20$ нм, $a = 500$ нм; кривым 7, 8 — $r = 40$ нм, $a = 300$ нм; кривой 6 — $r = 20$ нм, $a = 300$ нм. Используются следующие длины волн $\lambda = 0.7$ мкм (кривые 1, 7); $\lambda = 1.0$ мкм (2, 6, 8); $\lambda = 1.3$ мкм (3); $\lambda = 1.5$ мкм (4); $\lambda = 1.8$ мкм (5)

летовом диапазоне. Дальнейшее увеличение частоты приводит к уменьшению $\text{Im} \tilde{\epsilon}$ и, соответственно, потерь. При этом для $\text{Re} \tilde{\epsilon} > 0$ итерации на основе (39) не сходятся, и следует использовать уравнение (13). В центре зоны Бриллюэна реализуется решение $\gamma \approx k_0 \sqrt{\tilde{\epsilon}}$, характеризующее слаботекающую волну, распространяющуюся внутри стержня, как в диэлектрическом волноводе. Заметим, что случай $\text{Re} \tilde{\epsilon} < 0$ означает вытеснение поля из металла; при этом, чем больше диэлектрические потери $\text{Im} \tilde{\epsilon}$, тем меньше поле проникает в стержень и тем меньше потери на распространение волны. Таким образом, в инфракрасном диапазоне периодические металлические стержни являются почти идеально-направляющими структурами. С уменьшением частоты описание все точнее соответствует идеально проводящим стержням [12, 13].

На рис. 4 приведены результаты решений дисперсионных уравнений (43), (44) для одиночного провода методом прямой итерации. Сходимость достигалась за 3–4 итерации. Решение уравнения (44) ограничено условием $|\kappa_0 r| < 0.2$. Отличие от решения на основе импедансного подхода на низких частотах обусловлено условием $r \ll \lambda$. Используются приведенные выше параметры, характерные для диэлектрической проницаемости золота. На низких частотах поле проникает в стержень, чем и обусловлено

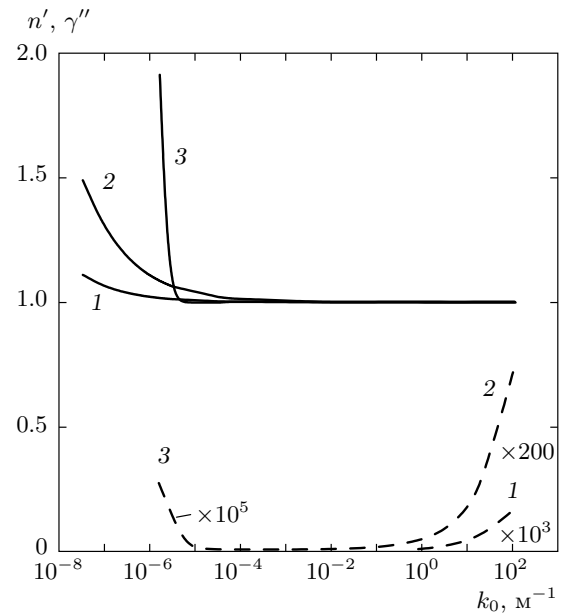


Рис. 4. Замедление $n' = \gamma'/k_0$ (сплошные кривые) и потери γ'' (штриховые) волны Зоммерфельда – Ценнека вдоль провода радиуса $r = 1$ мм (кривые 1) и $r = 5$ мм (кривые 2, 3). Кривые 1, 2 — расчет на основе уравнения (43) при удельной проводимости $\sigma_0 = 5.7 \cdot 10^7$ См/м, кривая 3 — на основе уравнения (44) для золота

возрастание замедления и потерь. Импедансная модель приводит к стремлению импеданса и потерь к нулю. На высоких частотах ($\omega \sim \omega_p$) волна Зоммерфельда – Ценнека может быть сильнозамедленной и представлять поверхностный плазмон. Возможен и переход от медленных волн к быстрым. В области оптических частот решение соответствует медленным слабовтекающим поверхностным волнам в диэлектрическом волноводе.

6. ВЫВОДЫ

Методом объемных интегральных уравнений, построенных на основе периодических функций Грина, получены электрофизические параметры простейших металлических и диэлектрических ФК с включениями в виде тонких круглых цилиндрических стержней в 2DP-решетку. Стержни описываются комплексной макроскопической диэлектрической проницаемостью металлов и диэлектриков, что возможно до диаметров порядка десятка нанометров. Метод легко обобщается для неоднородных вдоль радиуса стержней, а также для тонких стержней конечной длины в 3DP-решетке.

Уточнение решения в рамках принятых предположений возможно на основе уравнений (21), (22). Задавая одну из компонент \mathbf{k}_\perp (например, полагая $k_y = 0$), следует осуществлять совместную итерацию двух дисперсионных уравнений, что позволяет найти γ и k_x . Такое уточнение необходимо при существенно больших отношениях r/a , чем использованное. Строгий анализ требует решения трехмерного интегрального уравнения в двумерной области поперечного сечения стержня, что дает три связанных дисперсионных уравнений для определения γ , k_x , k_y .

Получены дисперсионные (волноводные) свойства структур, состоящих из длинных металлических проволок с наноразмерным сечением. Показано, что эти структуры способны эффективно и практически без потерь передавать энергию в диапазоне частот от СВЧ-диапазона вплоть до инфракрасного диапазона почти со скоростью света, при этом заметные потери и замедление возникают только в оптическом диапазоне. Чем ближе свойства проволок к свойствам идеальным металлам (чем меньше частота), тем меньше поле проникает в стержни, тем меньше и потери. Проведена гомогенизация рассмотренной структуры, аналитически определен тензор эффективной диэлектрической проницаемости в случае идеальной проводимости

и найдена частота низкочастотной отсечки. Проведено сравнение с известными импедансными алгоритмами, показывающее их качественное соответствие.

При мнимом векторе \mathbf{k}_\perp в низкочастотной области (ниже плазменной частоты) и в следующих зонах непропускания проволочный одноосный ФК является гиперболическим метаматериалом. Метод позволяет исследовать волноводные свойства такого метаматериала и в этом случае; при этом следует ожидать наличия быстрых волн. В работе [12] по результатам расчета дисперсии и зонной структуры для гиперболических метаматериалов в виде идеально-проводящих проволок конечной длины путем гомогенизации на основе дисперсионного уравнения $\varepsilon_{zz} = \mathbf{k}_\perp^2 / (k_0^2 - k_z^2)$ получена частотная зависимость компоненты ε_{zz} тензора эффективной диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1$). Результаты зависят от того, по какой дисперсионной ветви идет движение при изменении ω , т. е. от \mathbf{k} . В зоне непропускания поперечные волновые векторы мнимые, а $\varepsilon_{zz} < 0$. Потери приводят к появлению у ε_{zz} мнимой добавки и к ухудшению степени гиперболичности, что эффективно можно анализировать предложенным методом, вводя параметр «негиперболичности» $h = -\varepsilon''_{zz} / \varepsilon'_{zz}$. При $\kappa \gg k_0$ на рис. 2а и 3а видны области медленных волн с $\gamma > k_0$, для которых $\varepsilon'_{zz} < 0$ и $0 < h \ll 1$. В частности, максимальное значение $h \approx 0.058$ на рис. 3б соответствует кривой 5.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 13-08-00986).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Belov, R. Marques, S. I. Maslovski et al., Phys. Rev. B **63**, 113103 (2003).
2. I. S. Nefedov, A. J. Viitanen, and S. A. Tretyakov, Phys. Rev. E **71**, 046612 (2005).
3. М. В. Давидович, Изв. вузов, радиофизика **9**, 235 (2006).
4. М. В. Давидович, *Фотонные кристаллы: функции Грина, интегральные уравнения, результаты*, Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов (2005).
5. I. S. Nefedov and A. J. Viitanen, in *Metamaterials Handbook: Theory and Phenomena of Metamaterials*, ed. by F. Gopolino, Taylor & Francis group, Boca Raton–London–New York (2009), p. 15-1.
6. I. S. Nefedov, Phys. Rev. B **82**, 155423 (2010).

7. I. Nefedov and S. Tretyakov, *Phys. Rev. B* **84**, 113410 (2011).
8. I. S. Nefedov and C. R. Simovski, *Phys. Rev. B* **84**, 195459 (2011).
9. I. S. Nefedov and S. A. Tretyakov, *Photonics and Nanostructures — Fundamentals and Applications* **9**, 374 (2011).
10. I. Liberal, I. S. Nefedov, I. Ederra et al., *J. Appl. Phys.* **110**, 104902 (2011).
11. I. Liberal, I. S. Nefedov, I. Ederra et al., *J. Appl. Phys.* **110**, 064909 (2011).
12. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, П. А. Шиловский, *ЖТФ* **82**, 7 (2012).
13. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, *ЖТФ* **82**, 79 (2012).
14. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, *ЖТФ* **83**, 90 (2013).
15. I. Liberal, I. S. Nefedov, I. Ederra et al., *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **60**, 1921 (2012).
16. I. S. Nefedov, *Mater. Phys. and Mech.* **13**, 1 (2012).
17. C. R. Simovski, P. A. Belov, A. V. Atrashchenko, and Yu. S. Kivshar, *Adv. Mater.* **23**(31), 4229 (2012).
18. C. R. Simovski, I. Kolmakov, and S. A. Tretyakov, in *Proc. of 11-th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Kharkiv (2006), p. 41.
19. M. V. Davidovich and J. V. Stephuk, in *Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics*, ed. by M. V. Davidovich, Saratov Univ. Press (2007), Issue 8, p. 67.
20. M. V. Davidovich and J. V. Stephuk, in *Proc. of 12-th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Odessa (2008), p. 527.
21. Y. Guo, W. Newman, C. L. Cortes, and Z. Jacob, *Adv. Optoelectron.* **2012**, 1 (2012) (<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1211/1211.0980.pdf>).
22. E. E. Narimanov, H. Li, Yu. A. Barnakov et al., *arXiv:1109.5469v1* (2011).
23. A. Rahman, S. Yu. Kosulnikov, Y. Hao et al., *J. Nanophoton.* **5**, 051601 (2011).
24. M. V. Davidovich and J. V. Stephuk, in *Proc. of 13-th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Kyiv (2010), 978-1-4244-8860-5/10.
25. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, *Изв. вузов, радиофизика* **53**, 296 (2010).
26. A. Sommerfeld, *Wied. Ann.* **67**, 233 (1899).
27. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и связь, Москва* (1988).
28. A. Sommerfeld, *Math. Ann.* **47**, 317 (1896).
29. А. В. Кукушкин, А. А. Рухадзе, К. З. Рухадзе, *УФН* **182**, 1205 (2012).
30. В. В. Шевченко, *Ж. Радиоэлектрон.* **7**, 1 (2013) (<http://jre.cplire.ru/alt/jul13/index.html>).
31. Г. В. Белокопытов, *Волны в направляющих структурах*, Изд-во МГУ, Москва (2010).
32. M. A. Ordal, L. L. Long, R. J. Bell et al., *Appl. Opt.* **22**, 1099 (1983).
33. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, *Опт. и спектр.* **109**, 643 (2010).
34. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, *Возбуждение электромагнитных волн*, Радио и связь, Москва (1983).
35. Е. Ю. Альтшулер, М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, *Радиотехн. и электрон.* **55**, 25 (2010).
36. M. E. Feddi, Z. Ren, and A. Razeq, *IEEE Trans. MTT* **33**, 1382 (1997).
37. O. Ouchetto, C. W. Qiu, S. Zouhdi et al., *IEEE Trans. MTT* **33**, 1382 (1997).
38. D. R. Smith and J. B. Pendry, *J. Opt. Soc. Amer. B* **23**, 391 (2006).
39. С. А. Майер, *Плазмоника: Теория и приложения, Регулярная и стохастическая динамика*, Москва–Ижевск (2011).
40. Д. Г. Баранов, А. П. Виноградов, К. Р. Симовский и др., *ЖЭТФ* **141**, 650 (2012).
41. Е. Ю. Альтшулер, М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, *Радиотехн. и электрон.* **55**, 25 (2010).
42. А. Д. Пряников, А. С. Бирюков, *УФН* **183**, 863 (2013).