

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ КОНА – ЛАТТИНЖЕРА В МОНОСЛОЙНОМ И БИСЛОЙНОМ ПОЛУМЕТАЛЛЕ С ДИРАКОВСКИМ СПЕКТРОМ

М. Ю. Казан^{a,b}, *В. А. Мицкан*^{c,d}, *М. М. Коровушкин*^{c*}

^a *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

^b *Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
109028, Москва, Россия*

^c *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

^d *Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнёва
660014, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 1 июня 2014 г.

В рамках механизма Кона – Латтинжера изучается влияние кулоновского взаимодействия в ансамбле дираковских фермионов на формирование сверхпроводящего спаривания в однослойном и бислойном легированном графене без учета ван-дер-ваальсовского потенциала подложки и примесей. Электронная структура графена описывается в модели Шубина – Вонсовского при учете внутриатомного, межатомного, а также межслойного (в случае бислоя графена) кулоновских взаимодействий электронов. Куперовская неустойчивость определяется из решения уравнения Бете – Салпетера, в котором в качестве эффективного взаимодействия выступает ренормированная амплитуда рассеяния, полученная при учете поляризационных вкладов Кона – Латтинжера до второго порядка теории возмущений включительно по кулоновскому взаимодействию. Показано, что учет ренормировок Кона – Латтинжера и учет межузельного кулоновского взаимодействия существенно сказываются на конкуренции между сверхпроводящими фазами с f - и $d + id$ -симметриями параметра порядка. Продемонстрировано, что в случае идеализированного бислоя графена с включенным межслойным кулоновским взаимодействием между электронами происходит существенное повышение критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 75-летию А. Ф. Андреева

DOI: 10.7868/S0044451014120165

1. ВВЕДЕНИЕ

Графен представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения вследствие своих необычных транспортных, псевдорелятивистских и квантово-электродинамических свойств [1–3]. Эта совокупность свойств графена обусловлена, в первую очередь, его уникальной бесщелевой энергетической структурой, состоящей из конусообразных валентной зоны и зоны

проводимости, которые соприкасаются в углах первой зоны Бриллюэна (дираковские точки) [4]. На сегодняшний день установлено, что электроны, распространяющиеся в графене, демонстрируют вблизи дираковских точек схожесть с безмассовыми фермионами с линейной дисперсией [5], минимальную проводимость при нулевой концентрации носителей [5, 6], высокую подвижность [7–9], туннелирование Клейна [10, 11], осциллирующее движение (Zitterbewegung) [12, 13], универсальное поглощение света [14] и многие другие свойства, не имеющие аналогов в других физических системах.

В контакте со сверхпроводниками графен де-

*E-mail: kmax@iph.krasn.ru

монстрирует экзотические сверхпроводящие свойства [15]. Несмотря на то что еще не найдено подтверждений того, что в самом графене способна развиваться куперовская неустойчивость, имеются экспериментальные доказательства [16–21] того, что графен, находясь в контакте с обычными сверхпроводниками, становится сверхпроводящим. Тот факт, что короткие образцы графена, помещенные между сверхпроводящими контактами, могут быть использованы для построения джозефсоновских переходов, свидетельствует о том, что куперовские пары способны распространяться в графене когерентно. Это обстоятельство поднимает вопрос о том, возможно ли модифицировать графен структурно или химически так, чтобы он стал магнетиком [22] или даже настоящим сверхпроводником.

С теоретической точки зрения известно, что модель с конической дисперсией требует минимальной интенсивности спаривательного взаимодействия для развития куперовской неустойчивости [23]. В соответствие с этим, уже было предпринято несколько попыток теоретического анализа возможности реализации сверхпроводящего состояния в легированном монослойном, а также бислойном графене. В работе [24] изучалась роль топологических дефектов в реализации куперовского спаривания в монослое графена. В работе [25] в приближении среднего поля была получена фазовая диаграмма для спин-синглетной сверхпроводимости в монослое и исследован плазмонный механизм сверхпроводимости, приводящий к низким критическим температурам в s -канале для реалистичных значений электронных концентраций. Возможность индуцирования сверхпроводимости в монослое графена за счет электронных корреляций исследовалась в работах [26, 27].

В работе [28] была рассмотрена ситуация, в которой уровень Ферми находится вблизи одной из особенностей Ван Хова в плотности состояний монослоя графена. Известно, что эти особенности имеют свойство усиливать магнитные и сверхпроводящие флуктуации [29]. Согласно сценарию, описанному в работе [28], возникновение куперовской неустойчивости обусловлено сильной анизотропией контура Ферми при ван-хововском заполнении, $n_v H$, что, по сути, восходит к механизму Кона–Латтинжера [30], предложенному в 1965 г. и предполагающему возникновение сверхпроводящего спаривания в системах с чисто отталкивательным взаимодействием [31–33]. В работе [28] было отмечено, что реализация данного механизма представляется возможной в графене, поскольку электрон-электронное рас-

сеяние становится сильно анизотропным, и поэтому может возникнуть канал с притяжением, когда осуществляется проекция на гармоники с нетривиальной угловой зависимостью на поверхности Ферми. Согласно результату работы [28], такая куперовская неустойчивость в идеализированном монослое графена развивается преимущественно в d -канале и может обуславливать критические температуры сверхпроводящего перехода вплоть до величин $T_c \sim 10$ К, в зависимости от возможности максимально приблизить уровень химического потенциала к особенности Ван Хова. К похожему выводу пришли авторы работы [34], выполнившие исследование сверхпроводимости Кона–Латтинжера вблизи особенности Ван Хова в монослое графена методом ренормгруппы.

В работе [35] обсуждалась возможность конкуренции и сосуществования неустойчивости Померанчука и сверхпроводящей неустойчивости Кона–Латтинжера в монослое графена. Авторами работы [36] при исследовании сильно легированного монослоя при помощи метода фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением (ARPES) было обнаружено, что многочастичные взаимодействия существенно деформируют поверхность Ферми, приводя к расширенной особенности Ван Хова в точке M гексагональной зоны Бриллюэна. Теоретически были исследованы особенности основного состояния, а также проанализирована конкуренция между ферромагнитной и сверхпроводящей неустойчивостями. Анализ показал, что в этой конкуренции побеждает тенденция к сверхпроводимости за счет сильной модуляции эффективного взаимодействия вдоль контура Ферми, т.е. за счет только лишь электрон-электронных взаимодействий. При этом сверхпроводящая неустойчивость развивается преимущественно в f -канале [36]. Авторы работы [37] методом функциональной ренормгруппы провели анализ конкуренции сверхпроводящей фазы и фазы волны спиновой плотности при ван-хововском заполнении и вблизи него в монослое. Было обнаружено, что для параметров зонной структуры и кулоновских взаимодействий, полученных из расчетов *ab initio* для монослоя графена и графита [38], в широкой области вблизи особенности Ван Хова преобладает сверхпроводимость с $d + id$ -типом симметрии параметра порядка, а при изменении расчетных параметров может произойти переход в фазу волны спиновой плотности. Согласно [37], вдали от особенности Ван Хова дальние кулоновские взаимодействия изменяют вид $d + id$ -волновой функции куперовской пары и могут способствовать сверхпроводимости с f -симметрией параметра порядка.

В случае бислойного графена, согласно результатам работы [39], вблизи особенностей Ван Хова ферромагнитная неустойчивость доминирует над сверхпроводимостью Кона – Латтинжера. Однако ранее авторами работы [40] в приближении случайных фаз (RPA) была вычислена функция экранировки кулоновского взаимодействия в бислое как в легированном, так и в нелегированном режимах. Было обнаружено, что статический поляризационный оператор легированного бислоя содержит коновскую аномалию, намного бóльшую по величине, чем в случае монослоя или двумерного электронного газа. Как известно, сингулярная часть поляризационного оператора или коновская аномалия [41–43] работает в пользу эффективного притяжения двух частиц, обеспечивая вклад, всегда превышающий для орбитальных моментов пары $l \neq 0$ отталкивательный вклад, обусловленный регулярной частью поляризационного оператора [30]. Таким образом, в идеализированном бислое можно ожидать повышения критических температур перехода в сверхпроводящую фазу T_c по сравнению с идеализированным монослоем графена.

Кроме того, ранее в работах [44, 45] было показано, что имеется возможность повышения T_c в рамках механизма Кона – Латтинжера уже при малой концентрации носителей, связанная с рассмотрением спин-поляризованной или двухзонной ситуации, а также многослойной системы. В этом случае роль спаривающихся спинов «вверх» играют электроны первой зоны (слоя), а роль экранирующих спинов «вниз» играют электроны второй зоны (слоя). Связь между электронами двух зон осуществляется посредством межзонного (межслойного) кулоновского взаимодействия. В результате становится возможным следующий механизм сверхпроводимости: электроны одного сорта образуют куперовскую пару через поляризацию электронов другого сорта [44, 45]. Данный механизм сверхпроводимости также эффективен в квазидвумерных системах.

В данной работе в борновском приближении слабой связи будет исследована куперовская неустойчивость Кона – Латтинжера в идеализированных монослое и бислое легированного графена при учете кулоновского отталкивания электронов, находящихся на одном и на ближайших соседних атомах углерода в одном слое, а также межслойного кулоновского отталкивания в случае бислоя.

Необходимость учета дальнего кулоновского взаимодействия при расчетах физических характеристик графена продиктована результатами работы [38], в которой при получении эффективной

многочастичной модели графена и графита были вычислены *ab initio* величины частично экранированного, зависящего от частоты кулоновского взаимодействия. Было обнаружено, что величина одноатомного отталкивания в графене составляет $U = 9.3$ эВ (похожая оценка приводится в монографии [46]), в противоречии с интуитивными ожиданиями малой величины U и слабой связи $U < W$. Вычисления [38] продемонстрировали принципиальную важность учета нелокального кулоновского взаимодействия в графене: в этой работе величина кулоновского отталкивания электронов, находящихся на соседних узлах составляет $V = 5.5$ эВ. Отметим, что другие исследователи (см., например, [47]) считают значения U и V гораздо меньшими.

2. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ МОНОСЛОЙ ГРАФЕНА

В гексагональной решетке графена на каждую элементарную ячейку приходится по два атома углерода, поэтому всю решетку можно разбить на две подрешетки A и B . Гамильтониан модели Шубина – Вонсовского (расширенной модели Хаббарда) [48] для монослоя графена, учитывающий перескоки электронов между ближайшими и следующими за ближайшими атомами, а также кулоновское отталкивание электронов, находящихся на одном и на соседних атомах, в представлении Ванье имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & -\mu \left(\sum_{f\sigma} \hat{n}_{f\sigma}^A + \sum_{g\sigma} \hat{n}_{g\sigma}^B \right) - \\ & - t_1 \sum_{f\delta\sigma} (a_{f\sigma}^\dagger b_{f+\delta,\sigma} + \text{H.c.}) - \\ & - t_2 \left(\sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle\sigma} a_{f\sigma}^\dagger a_{m\sigma} + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle\sigma} b_{g\sigma}^\dagger b_{n\sigma} + \text{H.c.} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & U \left(\sum_f \hat{n}_{f\uparrow}^A \hat{n}_{f\downarrow}^A + \sum_g \hat{n}_{g\uparrow}^B \hat{n}_{g\downarrow}^B \right) + \\ & + V \sum_{f\delta\sigma} \hat{n}_{f\sigma}^A \hat{n}_{f+\delta,\sigma}^B. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь операторы $a_{f\sigma}^\dagger$ ($a_{f\sigma}$) рождают (уничтожают) электрон с проекцией спина $\sigma = \pm 1/2$ на узле f

подрешетки A , посредством $\hat{n}_{f\sigma}^A = a_{f\sigma}^\dagger a_{f\sigma}$ обозначены операторы чисел фермионов на узле f подрешетки A (аналогичные обозначения используются для подрешетки B). Вектор δ связывает ближайшие соседние атомы гексагональной решетки. В гамильтониане $\langle\langle \rangle\rangle$ обозначает, что суммирование проводится только по следующим за ближайшими соседям.

После перехода в импульсное пространство и выполнения преобразования Боголюбова

$$\alpha_{i\mathbf{k}\sigma} = w_{i1}(\mathbf{k})a_{\mathbf{k}\sigma} + w_{i2}(\mathbf{k})b_{\mathbf{k}\sigma}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

гамильтониан \hat{H}_0 диагонализуется и принимает форму

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^2 \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{i\mathbf{k}} \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}^\dagger \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}. \quad (5)$$

Двухзонный энергетический спектр описывается выражениями [4]

$$E_{1\mathbf{k}} = t_1|u_{\mathbf{k}}| - t_2f_{\mathbf{k}}, \quad E_{2\mathbf{k}} = -t_1|u_{\mathbf{k}}| - t_2f_{\mathbf{k}}, \quad (6)$$

где введены обозначения

$$f_{\mathbf{k}} = 2 \cos(\sqrt{3}k_y) + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_y\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_x\right), \quad (7)$$

$$u_{\mathbf{k}} = \sum_{\delta} e^{i\mathbf{k}\delta} = e^{-ik_x} + 2e^{\frac{i}{2}k_x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_y\right), \quad (8)$$

$$|u_{\mathbf{k}}| = \sqrt{3 + f_{\mathbf{k}}}. \quad (9)$$

Коэффициенты преобразования Боголюбова имеют вид

$$w_{1,1}(\mathbf{k}) = w_{2,2}^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}r_{\mathbf{k}}^*, \quad r_{\mathbf{k}} = \frac{u_{\mathbf{k}}}{|u_{\mathbf{k}}|}, \quad (10)$$

$$w_{1,2}(\mathbf{k}) = -w_{2,1}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В боголюбовском представлении оператор взаимодействия (3) определяется выражением, включающим операторы $\alpha_{1\mathbf{k}\sigma}$ и $\alpha_{2\mathbf{k}\sigma}$:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{ijlm \\ \mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{s}}} \Gamma_{ij;lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}^\dagger \alpha_{j\mathbf{p}\sigma}^\dagger \alpha_{l\mathbf{q}\sigma} \alpha_{m\mathbf{s}\sigma} \times \\ \times \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s}) + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\substack{ijlm \\ \mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{s}}} \Gamma_{ij;lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) \alpha_{i\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \alpha_{j\mathbf{p}\downarrow}^\dagger \alpha_{l\mathbf{q}\downarrow} \alpha_{m\mathbf{s}\uparrow} \times \\ \times \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s}), \quad (11)$$

где посредством Δ обозначен символ Кронекера, а $\Gamma_{ij;lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s})$ и $\Gamma_{ij;lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s})$ — затравочные амплитуды. Величина

$$\Gamma_{ij;lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left(V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ji;ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) \right), \quad (12)$$

$$V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = V u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) \quad (13)$$

описывает интенсивность взаимодействия фермионов с параллельными проекциями спина, а величина

$$\Gamma_{ij;lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = U_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ji;ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}), \quad (14)$$

$$U_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = U \left(w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j1}(\mathbf{p}) w_{l1}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + w_{i2}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m2}^*(\mathbf{s}) \right) \quad (15)$$

соответствует взаимодействию фермиевских квазичастиц с антипараллельными проекциями спина. Индексы i, j, l, m могут принимать значения 1 или 2.

Использование борновского приближения слабой связи (иерархия параметров модели $W > U > V$, где W — ширина зоны для верхней и нижней ветвей энергетического спектра графена (6) и (7) при $t_2 = 0$) при вычислении амплитуды рассеяния в куперовском канале позволяет ограничиться рассмотрением диаграмм второго порядка в эффективном взаимодействии двух электронов с противоположными значениями импульса и спина и использовать для него величину $\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$. Графически эта величина определяется суммой диаграмм, представленных на рис. 1. Сплошные линии со светлыми (темными) стрелками соответствуют гриновским функциям электронов с проекциями спина $+\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$). Хорошо известно, что возможность куперовского спаривания определяется характеристикой энергетического спектра вблизи уровня Ферми и эффективным взаимодействием электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми [49]. Допуская, что при легировании графена химический потенциал попадает в верхнюю энергетическую зону $E_{1\mathbf{k}}$ и анализируя условия возникновения сверхпроводимости Кона–Латтинжера, можно рассматривать ситуацию, в которой начальный и конечный импульсы также принадлежат верхней зоне. Этот факт отражается на рис. 1 посредством индексов α_1 (верхняя зона) и α_2 (нижняя зона).

Первый график на рис. 1 соответствует затравочному взаимодействию двух электронов в куперовском канале. Следующие диаграммы (диаграммы Кона – Латтинжера) на рис. 1 описывают процессы рассеяния второго порядка, $\delta\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$, и учитывают поляризационные эффекты заполненной сферы Ферми. Наличие в этих диаграммах двух сплошных линий без стрелок означает суммирование по обеим проекциям спина. Волнистые линии соответствуют затравочному взаимодействию. Рассеяние электронов с одинаковыми проекциями спина соответствует только междузельному вкладу. Если имеется взаимодействие электронов с разными проекциями спина, то амплитуда рассеяния определяется суммой хаббардовского и междузельного отталкивания. Таким образом, в присутствии только короткодействующего кулоновского взаимодействия поправка к эффективному взаимодействию $\delta\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ определяется лишь последней обменной диаграммой. Если учитывается кулоновское взаимодействие электронов на соседних узлах решетки графена, то вклад в ренормированную амплитуду дают все диаграммы на рис. 1.

После сопоставления аналитических выражений диаграммам, получается следующее аналитическое выражение для эффективного взаимодействия:

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{U}{2} + \frac{V}{2} \operatorname{Re}(u_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} r_{\mathbf{p}}^* r_{\mathbf{k}}) + \delta\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{N} \sum_{i,j,\mathbf{p}_1} \Gamma_{1i;1j}^\perp(\mathbf{p}, \mathbf{q}_2 | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \times \\ & \times \Gamma_{j1;i1}^\perp(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p} | \mathbf{q}_2, \mathbf{k}) \chi_{i,j}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1) + \\ & + \frac{2}{N} \sum_{i,j,\mathbf{p}_1} \left\{ \Gamma_{1j;i1}^\perp(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{k}) \times \right. \\ & \times \left[\Gamma_{i1;j1}^\parallel(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | \mathbf{p}_1, -\mathbf{k}) - \Gamma_{i1;1j}^\parallel(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \right] + \\ & + \Gamma_{i1;1j}^\perp(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \left[\Gamma_{1j;1i}^\parallel(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{k}, \mathbf{q}_1) - \right. \\ & \left. \left. - \Gamma_{1j;i1}^\parallel(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{k}) \right] \right\} \chi_{i,j}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1). \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения для обобщенных восприимчивостей

$$\chi_{i,j}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{f(E_{i\mathbf{k}}) - f(E_{j\mathbf{p}})}{E_{j\mathbf{p}} - E_{i\mathbf{k}}}, \quad (18)$$

где

$$f(x) = \left(\exp\left(\frac{x - \mu}{T}\right) + 1 \right)^{-1}$$

— функции распределения Ферми – Дирака и энергии $E_{i\mathbf{k}}$ определяются выражениями (6). Для ком-

пактности введены обозначения для комбинаций импульсов

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}. \quad (19)$$

Знание ренормированного выражения для эффективного взаимодействия позволяет перейти к анализу условий возникновения сверхпроводимости в рассматриваемой системе. Известно [49], что возникновение куперовской неустойчивости может быть найдено из анализа однородной части уравнения Бете – Салпетера. В этом случае зависимость амплитуды рассеяния $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ от импульса \mathbf{k} факторизуется и получается интегральное уравнение для сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\mathbf{p})$. После выполнения интегрирования по изоэнергетическим контурам задачу об исследовании куперовской неустойчивости можно свести к задаче на собственные значения [33, 50–54]

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\varepsilon_{\mathbf{q}}=\mu} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{v_F(\hat{\mathbf{q}})} \tilde{\Gamma}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \Delta(\hat{\mathbf{q}}) = \lambda \Delta(\hat{\mathbf{p}}), \quad (20)$$

где сверхпроводящий параметр порядка $\Delta(\hat{\mathbf{q}})$ играет роль собственного вектора, а собственные значения λ удовлетворяют соотношению $\lambda^{-1} \approx \ln(T_c/W)$. В этом случае импульсы $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$ лежат на поверхности Ферми, $v_F(\hat{\mathbf{q}})$ — скорость Ферми.

Для решения уравнения (20) представим его ядро как суперпозицию собственных функций, каждая из которых принадлежит одному из неприводимых представлений группы симметрии C_{6v} гексагональной решетки. Как известно, эта группа симметрии имеет шесть неприводимых представлений [55]: четыре одномерных и два двумерных. Для каждого представления уравнение (20) имеет решение со своей эффективной константой связи λ . Далее будем использовать следующие обозначения для классификации симметрий параметра порядка: представление A_1 соответствует s -типу симметрии; B_1 и B_2 — f -типу симметрии; E_1 — $p + ip$ -типу симметрии, и E_2 — $d + id$ -типу симметрии.

Для каждого неприводимого представления ν будем искать решение уравнения (20) в виде

$$\Delta^{(\nu)}(\phi) = \sum_m \Delta_m^{(\nu)} g_m^{(\nu)}(\phi), \quad (21)$$

где m — номер собственной функции, принадлежащей представлению ν , а ϕ — угол, определяющий направление импульса $\hat{\mathbf{p}}$ по отношению к оси p_x . Явный вид ортонормированных функций $g_m^{(\nu)}(\phi)$ определяется выражениями

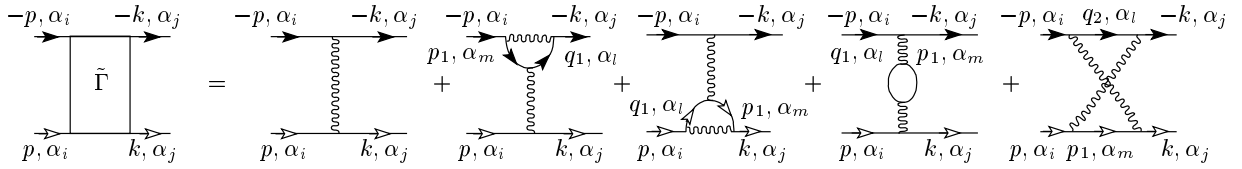


Рис. 1. Диаграммы первого и второго порядка для эффективного взаимодействия электронов в монослое и бислое графена. Сплошные линии со светлыми (темными) стрелками соответствуют функциям Грина электронов с проекциями спина $+\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$) и энергиями, соответствующими энергетическим зонам графена $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$ и α_m . На диаграммах в случае монослоя (разд. 2) индексы $i = j = 1$, а индексы l и m могут принимать значения 1 или 2. В случае бислоя (разд. 3) индексы i и j принимают значения 1 или 2, индексы l и $m = 1, 2, 3$ или 4. Импульсы q_l определены в (19)

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow g_m^{(s)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{m0})\pi}} \cos 6m\phi, \\
 m &\in [0, \infty), \\
 A_2 &\rightarrow g_m^{(A_2)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(6m + 6)\phi, \\
 B_1 &\rightarrow g_m^{(f_1)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(6m + 3)\phi, \\
 B_2 &\rightarrow g_m^{(f_2)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(6m + 3)\phi, \\
 E_1 &\rightarrow g_m^{(p+ip)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (A \sin(2m + 1)\phi + \\
 &\quad + B \cos(2m + 1)\phi), \\
 E_2 &\rightarrow g_m^{(d+id)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (A \sin(2m + 2)\phi + \\
 &\quad + B \cos(2m + 2)\phi).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь для двумерных представлений E_1 и E_2 индексы m пробегает такие значения, при которых соответственно коэффициенты $(2m + 1)$ и $(2m + 2)$ не кратны трем.

Базисные функции удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int_0^{2\pi} d\phi g_m^{(\nu)}(\phi) g_n^{(\beta)}(\phi) = \delta_{\nu\beta} \delta_{mn}. \tag{23}$$

Подставляя выражение (21) в уравнение (20), выполняя интегрирование по углам и используя условие (23), получаем

$$\sum_n \Lambda_{mn}^{(\nu)} \Delta_n^{(\nu)} = \lambda_\nu \Delta_m^{(\nu)}, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{mn}^{(\alpha)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{p}} \oint_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{q}} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{d\phi_{\mathbf{q}} v_F(\hat{\mathbf{q}})} \tilde{\Gamma}(\hat{\mathbf{p}} | \hat{\mathbf{q}}) \times \\
 &\quad \times g_m^{(\nu)}(\phi_{\mathbf{p}}) g_n^{(\nu)}(\phi_{\mathbf{q}}). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Поскольку $T_c \sim W \exp(1/\lambda)$, каждое отрицательное собственное значение λ_ν соответствует сверхпроводящей фазе с симметрией параметра порядка ν . Вообще говоря, разложение параметра порядка $\Delta^{(\nu)}(\phi)$ по собственным функциям включает множество гармоник, однако главный вклад определяется лишь несколькими из них. Большому значению критической температуры соответствует наибольшее по абсолютной величине значение λ_ν .

На рис. 2а представлены вычисленные зависимости величины эффективной константы связи λ от концентрации носителей n для различных типов симметрии сверхпроводящего параметра порядка для набора параметров $t_2 = 0$, $U = 2|t_1|$ и $V = 0$. Видно, что при малых электронных плотностях $1 < n < 1.12$ и при приближении к особенности Ван Хова возникает конкуренция между сверхпроводящими фазами с f -типом симметрии, вклад в который определяется гармониками

$$g_m^{(f_1)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(6m + 3)\phi,$$

и $d + id$ -типом симметрии, соответствующим двумерному представлению E_2 . В области электронных концентраций $1 < n < 1.12$ преобладает $d + id$ -спаривание, при электронных плотностях $1.12 < n < n_v H$ развивается сверхпроводимость с f -типом симметрии параметра порядка.

Отметим, что в данной работе, во избежание суммирования паркетных диаграмм [56, 57], анализируются только те области электронных концентраций, которые не находятся в непосредственной близости к особенности Ван Хова (рис. 3).

Включение межузельного кулоновского взаимодействия существенно влияет на конкуренцию сверхпроводящих фаз. Это видно на рис. 2б, на котором представлены зависимости $\lambda(n)$ для параметров $t_2 = 0$, $U = 2|t_1|$ и $V = 0.5|t_1|$. Из сравнения с рис. 2а

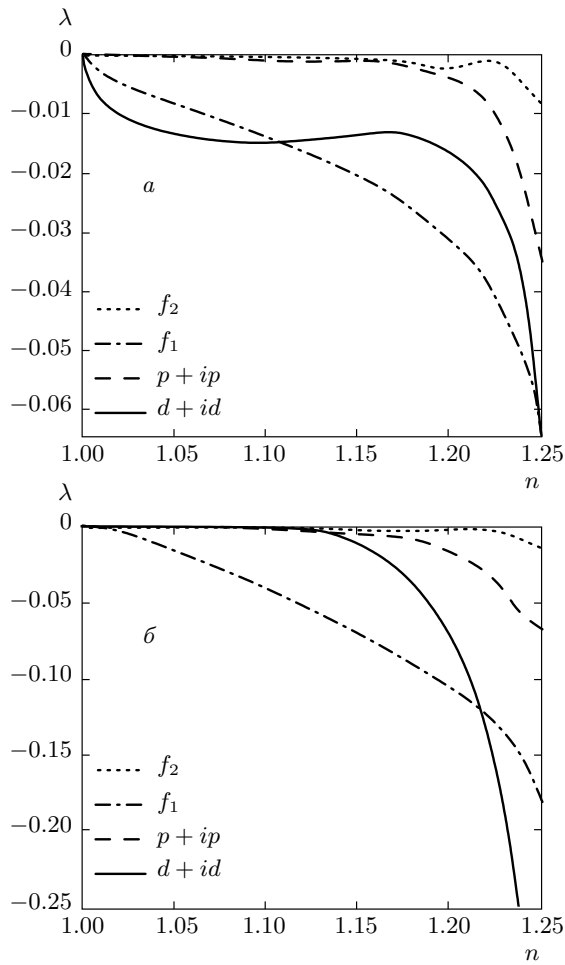


Рис. 2. Зависимости λ от концентрации носителей n в монослое графена: $a - t_2 = 0, U = 2|t_1|, V = 0$; $b - t_2 = 0, U = 2|t_1|, V = 0.5|t_1|$

следует, что включение межузельного кулоновского взаимодействия подавляет куперовское спаривание в $d + id$ -канале при малых электронных плотностях, однако приводит к реализации сверхпроводимости этого типа симметрии при приближении к особенности Ван Хофа. В результате f -спаривание реализуется в области электронных концентраций $1 < n < 1.22$. Отметим, что данный результат качественно согласуется с результатами, полученными в работе [37].

Включение электронных перескоков t_2 на следующие за ближайшими атомы углерода в монослое графена качественно не влияют на конкуренцию сверхпроводящих фаз различных типов симметрии, показанную на рис. 2б [58]. Такое поведение системы объясняется тем, что включение перескоков $t_2 > 0$, либо $t_2 < 0$, не вызывает существенной мо-

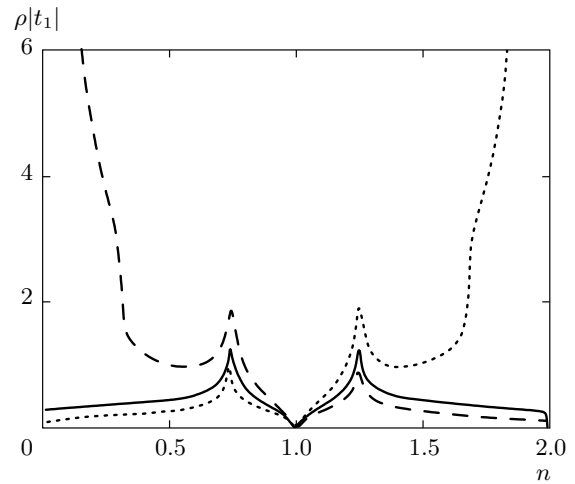


Рис. 3. Модификация плотности электронных состояний монослой графена при включении перескоков на следующие за ближайшими соседние атомы при $t_2 = 0$ (сплошная кривая), $t_2 = -0.2|t_1|$ (штриховая кривая), $t_2 = 0.2|t_1|$ (пунктирная кривая)

дификации плотности электронных состояний монослой в областях концентраций носителей между дираковской точкой и обеими особенностями Ван Хофа (рис. 3). Однако учет перескоков t_2 приводит к увеличению абсолютных значений эффективного взаимодействия, а следовательно, и к реализации более высоких критических температур перехода в сверхпроводящую фазу в идеализированном монослое графена [58].

3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ БИСЛОЙ ГРАФЕНА

Рассмотрим идеализированный бислой графена, предполагая, что два монослоя расположены по типу AB , т. е. один слой повернут на 60° относительно другого [59, 60]. При этом расположение подрешеток в слоях выберем таким образом, чтобы узлы из разных слоев, расположенные друг над другом, относились к подрешетке A , а остальные — к подрешетке B (рис. 4). В этом случае гамильтониан бислоя графена в представлении Ванье будет иметь вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \tag{26}$$

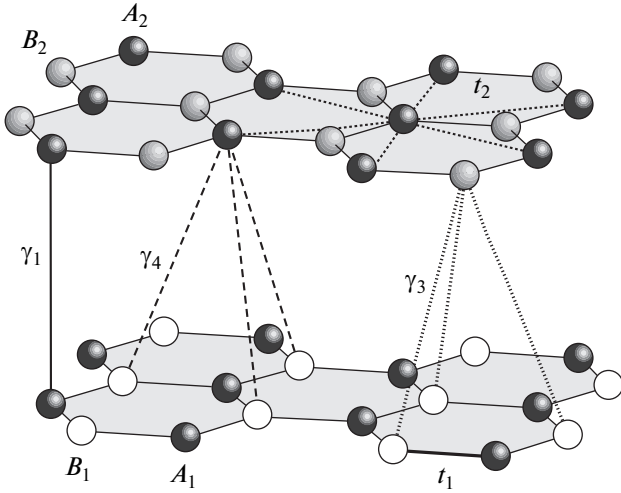


Рис. 4. Кристаллическая структура бислоя графена. Атомы углерода A_1 и B_1 в нижнем слое показаны белыми и черными кружками, A_2 и B_2 в верхнем слое изображены черными и серыми кружками. Посредством t_1 и t_2 обозначены внутрислойные электронные перескоки, $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ — межслойные перескоки

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & (\varepsilon - \mu) \left(\sum_{if\sigma} \hat{n}_{if\sigma}^A + \sum_{ig\sigma} \hat{n}_{ig\sigma}^B \right) - \\ & - t_1 \sum_{f\delta\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger b_{1,f+\delta,\sigma} + a_{2f\sigma}^\dagger b_{2,f-\delta,\sigma} + \text{H.c.}) - \\ & - t_2 \sum_{i\sigma} \left(\sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle} a_{if\sigma}^\dagger a_{im\sigma} + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle} b_{ig\sigma}^\dagger b_{in\sigma} + \text{H.c.} \right) - \\ & - \gamma_1 \sum_{f\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger a_{2f\sigma} + \text{H.c.}) - \\ & - \gamma_3 \sum_{g\delta\sigma} (b_{1g\sigma}^\dagger b_{2,g+\delta,\sigma} + \text{H.c.}) - \\ & - \gamma_4 \sum_{f\delta\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger b_{2,f-\delta,\sigma} + a_{2f\sigma}^\dagger b_{1,f+\delta,\sigma} + \text{H.c.}), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & U \left(\sum_{if} \hat{n}_{if\uparrow}^A \hat{n}_{if\downarrow}^A + \sum_{ig} \hat{n}_{ig\uparrow}^B \hat{n}_{ig\downarrow}^B \right) + \\ & + V \sum_{f\delta\sigma} \hat{n}_{if\sigma}^A \hat{n}_{i,f+\delta,\sigma}^B + G_1 \sum_{f\sigma} \hat{n}_{1f\sigma}^A \hat{n}_{2f\sigma}^A + \\ & + G_3 \sum_{g\delta\sigma} \hat{n}_{1g\sigma}^B \hat{n}_{2,g+\delta,\sigma}^B + G_4 \sum_{f\delta\sigma} \left(\hat{n}_{1f\sigma}^A \hat{n}_{2,f-\delta,\sigma}^B + \right. \\ & \left. + \hat{n}_{2f\sigma}^A \hat{n}_{1,f+\delta,\sigma}^B \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Здесь использованы аналогичные обозначения, что и для гамильтониана монослоя (1) в разд. 2. В гамильтониане (26) индекс $i = 1, 2$ обозначает номер слоя. Предполагается, что одноузловые энергии $\varepsilon_{A1} = \varepsilon_{A2} = \varepsilon_{B1} = \varepsilon_{B2} = \varepsilon$. Посредством $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ обозначены параметры межслойных электронных перескоков (рис. 4). Три последних слагаемых гамильтониана (26) учитывают межслойное кулоновское взаимодействие электронов, находящихся на атомах A_1 и A_2, B_1 и B_2, A_1 и B_2 , интенсивность которых определяется соответственно величинами G_1, G_3 и G_4 .

После перехода в импульсное пространство гамильтониан \hat{H}_0 удобно переписать в матричном виде

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} & \gamma_1 & t_1 u_{\mathbf{k}}^* & \gamma_4 u_{\mathbf{k}} \\ \gamma_1 & \varepsilon_{\mathbf{k}} & \gamma_4 u_{\mathbf{k}}^* & t_1 u_{\mathbf{k}} \\ t_1 u_{\mathbf{k}} & \gamma_4 u_{\mathbf{k}} & \varepsilon_{\mathbf{k}} & \gamma_3 u_{\mathbf{k}}^* \\ \gamma_4 u_{\mathbf{k}}^* & t_1 u_{\mathbf{k}}^* & \gamma_3 u_{\mathbf{k}} & \varepsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1\mathbf{k}\sigma} \\ a_{2\mathbf{k}\sigma} \\ b_{1\mathbf{k}\sigma} \\ b_{2\mathbf{k}\sigma} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}} = t_2 f_{\mathbf{k}} - \varepsilon$, а величина $f_{\mathbf{k}}$ определяется выражением (7).

Гамильтониан \hat{H}_0 диагонализуется при помощи преобразования Боголюбова

$$a_{i\mathbf{k}\sigma} = w_{i1}(\mathbf{k}) a_{1\mathbf{k}\sigma} + w_{i2}(\mathbf{k}) a_{2\mathbf{k}\sigma} + w_{i3}(\mathbf{k}) b_{1\mathbf{k}\sigma} + w_{i4}(\mathbf{k}) b_{2\mathbf{k}\sigma}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (29)$$

и принимает форму

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^4 \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{i\mathbf{k}} \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}^\dagger \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}. \quad (30)$$

Согласно результатам работ по графену [61, 62], межслойные перескоки γ_4 являются сравнительно слабыми, поэтому для удобства диагонализации гамильтониана положим $\gamma_4 = 0$. При этом четырехзонный энергетический спектр бислоя графена определяется выражениями

$$\begin{aligned} E_{i\mathbf{k}} = & \varepsilon \pm \sqrt{A_{\mathbf{k}} \pm \sqrt{B_{\mathbf{k}}}} - t_2 f_{\mathbf{k}}, \\ A_{\mathbf{k}} = & \frac{1}{4} (2a^2 + 4|b_{\mathbf{k}}|^2 + 2|d_{\mathbf{k}}|^2), \\ B_{\mathbf{k}} = & \frac{1}{4} (|d_{\mathbf{k}}|^2 (|d_{\mathbf{k}}|^2 - 2a^2 + 4|b_{\mathbf{k}}|^2) + a^4 + \\ & + 4a^2 |b_{\mathbf{k}}|^2 + 4ab_{\mathbf{k}}^2 d_{\mathbf{k}}^* + 4ab_{\mathbf{k}}^{*2} d_{\mathbf{k}}), \\ a = & \gamma_1, \quad b_{\mathbf{k}} = t_1 u_{\mathbf{k}}^*, \quad d_{\mathbf{k}} = \gamma_3 u_{\mathbf{k}}^*, \end{aligned} \quad (31)$$

где величина $u_{\mathbf{k}}$ определена в выражении (8).

Анализ условий возникновения сверхпроводимости Кона–Латтинжера в бислое графена проводится по общей схеме, изложенной в разд. 2. При этом

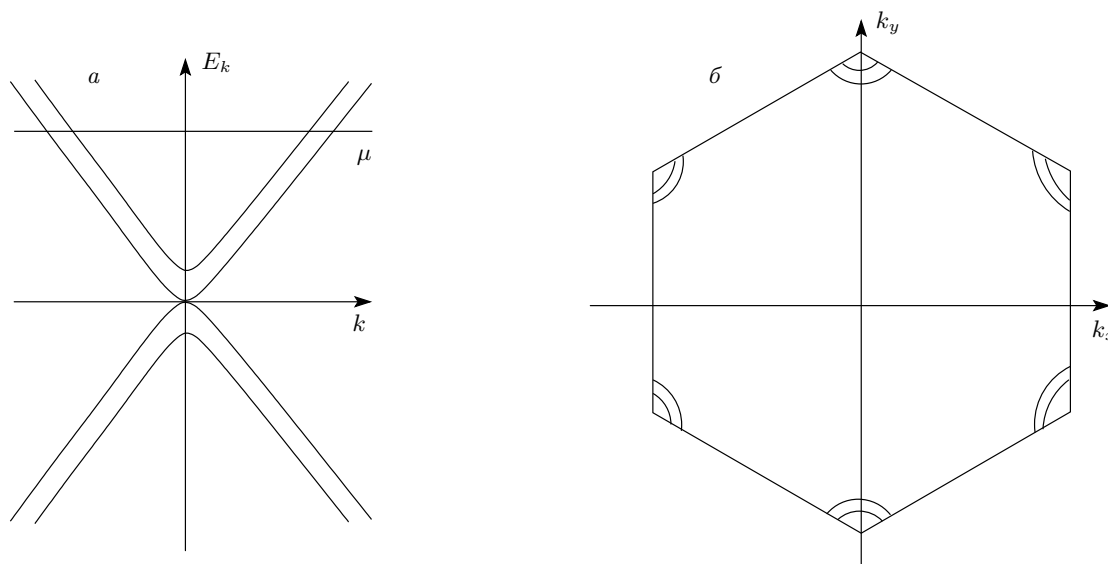


Рис. 5. Энергетическая структура бислоя графена вблизи дираковских точек (а) и формирование многолистного ферми-контура (б) при слабом легировании

рассматривается ситуация, в которой при легировании бислоя химический потенциал находится в двух верхних энергетических зонах $E_{1\mathbf{k}}$ и $E_{2\mathbf{k}}$, как показано на рис. 5а. В этом случае начальный и конечный импульсы электронов в куперовском канале также принадлежат двум верхним зонам, поэтому индексы i и j в диаграммах Кона – Латтинжера в случае бислоя (рис. 1) принимают значения один или два. После сопоставления аналитических выражений всем диаграммам получается аналитическое выражение для эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале в бислое графена, которое затем используется при анализе однородной части уравнения Бете – Салпетера. При решении задачи на собственные значения (20) интегрирование выполняется при учете многолистности изоэнергетических контуров (рис. 5б).

Перейдем к обсуждению зависимостей величины эффективной константы связи λ от концентрации носителей n для различных типов симметрии сверхпроводящего параметра порядка в бислое графена. Отметим, что при $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ и $G_1 = G_3 = G_4 = 0$ в численных расчетах для бислоя выполняется предельный переход к результатам, полученным для монослоя в разд. 2. На рис. 7 представлены зависимости $\lambda(n)$, найденные в бислое для набора параметров $t_2 = 0, U = 2|t_1|, \gamma_1 = 0.12|t_1|, \gamma_3 = 0.1|t_1|, \gamma_4 = 0, V = G_1 = G_3 = G_4 = 0.5|t_1|$. Используемые величины внутриплоскостных и межплоскостных интегралов перескока близки к значе-

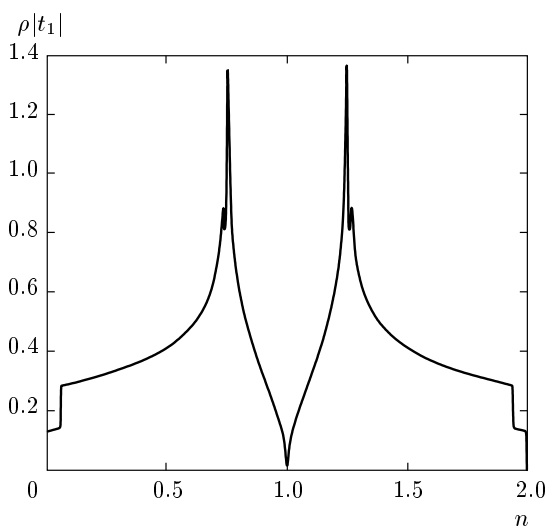


Рис. 6. Зависимость плотности электронных состояний бислоя графена в расчете на атом одного слоя от концентрации электронов для набора параметров $t_2 = 0, \gamma_1 = 0.12|t_1|, \gamma_3 = 0.1|t_1|, U = 2|t_1|$

ниям, определенным в работах [61, 62] для графита. Плотность электронных состояний бислоя графена при данном наборе параметров приведена на рис. 6. Для демонстрации влияния межслойного кулоновского взаимодействия величины G_1, G_3 и G_4 выбраны максимально возможными, при которых еще применимо приближение слабой связи. Из срав-

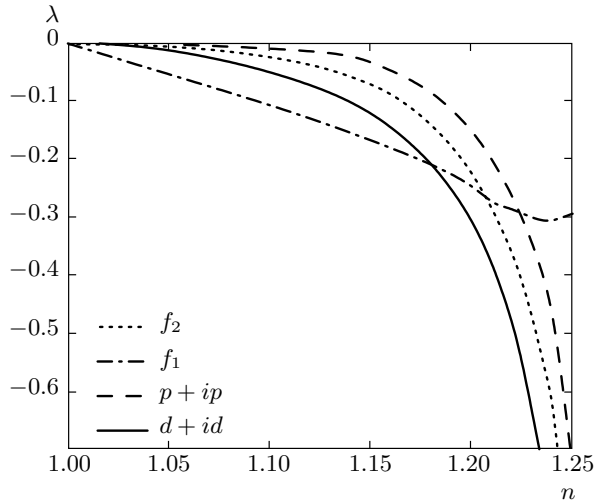


Рис. 7. Зависимости λ от концентрации носителей n в бислое графена для набора параметров $t_2 = 0$, $U = 2|t_1|$, $\gamma_1 = 0.12|t_1|$, $\gamma_3 = 0.1|t_1|$, $V = 0.5|t_1|$, $G_1 = G_3 = G_4 = 0.5|t_1|$ (все параметры в ед. $|t_1|$)

нения с рис. 2б видно, что учет межплоскостных взаимодействий не приводит к изменению областей реализации сверхпроводимости с f - и $d+id$ -типами симметрии, однако приводит к существенному повышению абсолютных значений эффективной константы связи, а следовательно, и к повышению критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на примере идеализированных монослоя и бислоя графена, в расчетах, не учитывающих наличие потенциала Ван дер Ваальса подложки и примесей, исследованы условия возникновения сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера в системах с линейным законом дисперсии. Электронная структура графена описана в рамках метода сильной связи в модели Шубина–Вонсовского, учитывающей не только кулоновское отталкивание электронов, находящихся на одном атоме углерода, но и межузельное кулоновское взаимодействие. Показано, что учет ренормировок Кона–Латтинжера до второго порядка теории возмущений включительно и учет межузельного кулоновского взаимодействия существенно сказываются на конкуренции между сверхпроводящими фазами с f - и $d+id$ -типами симметрии параметра порядка, а также приводят к увеличению абсолютных величин эффективного взаимодействия, а

следовательно, и к реализации более высоких критических температур перехода в сверхпроводящую фазу в идеализированном монослое графена.

Полученные для монослоя графена результаты обобщены на случай идеализированного бислоя графена, состоящего из двух монослоев, взаимодействующих между собой посредством межслойного кулоновского отталкивания. Показано, что рассмотрение идеализированной двухслойной системы графена приводит к существенному повышению критической температуры сверхпроводящего перехода в рамках механизма Кона–Латтинжера.

Авторы выражают благодарность В. В. Валькову за полезные замечания. Работа выполнена в рамках Программы Отделения физических наук РАН (проект № П.3.1), при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00058, 14-02-31237), а также гранта Президента РФ МК-526.2013.2. Один из авторов (М. М. К.) благодарит Фонд «Династия» за финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Е. Лозовик, С. П. Меркулова, А. А. Соколик, УФН **178**, 757 (2008).
2. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
3. V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, Rev. Mod. Phys. **84**, 1067 (2012).
4. P. R. Wallace, Phys. Rev. **71**, 622 (1947).
5. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, Nature (London) **438**, 197 (2005).
6. Y.-W. Tan, Y. Zhang, K. Bolotin, Y. Zhao, S. Adam, E. H. Hwang, S. Das Sarma, H. L. Stormer, and P. Kim, Phys. Rev. Lett. **99**, 246803 (2007).
7. S. V. Morozov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, F. Schedin, D. C. Elias, J. A. Jaszczak, and A. K. Geim, Phys. Rev. Lett. **100**, 016602 (2008).
8. K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, and H. L. Stormer, Sol. St. Commun. **146**, 351 (2008).
9. N. Garcia, P. Esquinazi, J. Barzola-Quiquia, B. Ming, and D. Spoddig, Phys. Rev. B **78**, 035413 (2008).

10. A. K. Geim, M. I. Katsnelson, and K. S. Novoselov, *Nature Phys.* **2**, 620 (2006).
11. A. F. Young and P. Kim, *Nature Phys.* **5**, 222 (2009).
12. M. I. Katsnelson, *Eur. Phys. J. B* **51**, 157 (2006).
13. T. M. Rusin and W. Zawadzki, *Phys. Rev. B* **80**, 045416 (2009).
14. P. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, and A. K. Geim, *Science* **320**, 1308 (2008).
15. W. A. Muñoz, L. Covaci, and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **86**, 184505 (2012).
16. H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga, L. M. K. Vandersypen, and A. F. Morpurgo, *Nature (London)* **446**, 56 (2007).
17. A. Shailos, W. Nativel, A. Kasumov, C. Collet, M. Ferrier, S. Gueron, R. Deblock, and H. Bouchiat, *Europhys. Lett.* **79**, 57008 (2007).
18. X. Du, I. Skachko, and E. Y. Andrei, *Phys. Rev. B* **77**, 184507 (2008).
19. C. Ojeda-Aristizabal, M. Ferrier, S. Guéron, and H. Bouchiat, *Phys. Rev. B* **79**, 165436 (2009).
20. A. Kanda, T. Sato, H. Goto, H. Tomori, S. Takana, Y. Ootuka, and K. Tsukagoshi, *Physica C* **470**, 1477 (2010).
21. H. Tomori, A. Kanda, H. Goto, S. Takana, Y. Ootuka, and K. Tsukagoshi, *Physica C* **470**, 1492 (2010).
22. N. M. R. Peres, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. B* **72**, 174406 (2005).
23. E. C. Marino and L. H. C. M. Nunes, *Nucl. Phys. B* **741**, 404 (2006).
24. J. González, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **63**, 134421 (2001).
25. B. Uchoa and A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 146801 (2007).
26. A. M. Black-Schaffer and S. Doniach, *Phys. Rev. B* **75**, 134512 (2007).
27. C. Honerkamp, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 146404 (2008).
28. J. González, *Phys. Rev. B* **78**, 205431 (2008).
29. R. S. Markiewicz, *J. Phys. Chem. Sol.* **58**, 1179 (1997).
30. W. Kohn and J. M. Luttinger, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 524 (1965).
31. D. Fay and A. Layzer, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 187 (1968).
32. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 525 (1988).
33. M. A. Baranov, A. V. Chubukov, and M. Yu. Kagan, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 2471 (1992).
34. R. Nandkishore, L. S. Levitov, and A. V. Chubukov, *Nature Phys.* **8**, 158 (2012).
35. B. Valenzuela and M. A. H. Vozmediano, *New J. Phys.* **10**, 113009 (2008).
36. J. L. McChesney, A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller, K. Horn, J. González, and E. Rotenberg, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 136803 (2010).
37. M. L. Kiesel, C. Platt, W. Hanke, D. A. Abanin, and R. Thomale, *Phys. Rev. B* **86**, 020507(R) (2012).
38. T. O. Wehling, E. Şaşoğlu, C. Friedrich, A. I. Lichtenstein, M. I. Katsnelson, and S. Blugel, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 236805 (2011).
39. J. González, *Phys. Rev. B* **88**, 125434 (2013).
40. E. H. Hwang and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 156802 (2012).
41. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
42. W. Kohn, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 393 (1959).
43. J. Friedel, *Adv. Phys.* **3**, 446 (1954); *Nuovo Cimento Suppl.* **2**, 287 (1958).
44. M. Yu. Kagan, *Phys. Lett. A* **152**, 303 (1991).
45. M. Yu. Kagan and V. V. Val'kov, *ЖЭТФ* **140**, 179 (2011); *ФНТ* **37**, 84 (2011); *A Lifetime in Magnetism and Superconductivity: A Tribute to Professor David Schoenberg*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge (2011).
46. А. А. Левин, *Введение в квантовую химию твердого тела*, Химия, Москва (1974).
47. E. Perfetto, M. Cini, S. Ugenti, P. Castrucci, M. Scarselli, M. De Crescenzi, F. Rosei, and M. A. El Khakani, *Phys. Rev. B* **76**, 233408 (2007).
48. S. Shubin and S. Vonsowsky, *Proc. Roy. Soc. A* **145**, 159 (1934); *Phys. Zs. UdSSR* **7**, 292 (1935); **10**, 348 (1936).
49. Л. П. Горьков, Т. К. Мелик-Бархударов, *ЖЭТФ* **40**, 1452 (1961).
50. D. J. Scalapino, E. Loh, Jr., and J. E. Hirsch, *Phys. Rev. B* **34**, 8190 (1986); **35**, 6694 (1987).
51. R. Hlubina, *Phys. Rev. B* **59**, 9600 (1999).

52. S. Raghu, S. A. Kivelson, and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. B* **81**, 224505 (2010).
53. A. S. Alexandrov and V. V. Kabanov, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 136403 (2011).
54. М. Ю. Каган, В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 253 (2013); *ЖЭТФ* **144**, 837 (2013).
55. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
56. И. Е. Дзялошинский, В. М. Яковенко, *ЖЭТФ* **94**, 344 (1988); И. Е. Дзялошинский, И. М. Кричевер, Я. Хронек, *ЖЭТФ* **94**, 344 (1988).
57. A. T. Zheleznyak, V. M. Yakovenko, and I. E. Dzyaloshinskii, *Phys. Rev. B* **55**, 3200 (1997).
58. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, V. A. Mitskan, and M. M. Korovushkin, *Sol. St. Commun.* **188**, 61 (2014).
59. E. McCann and V. I. Fal'ko, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 086805 (2006).
60. E. McCann and M. Koshino, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 056503 (2013).
61. M. S. Dresselhaus and G. Dresselhaus, *Adv. Phys.* **51**, 1 (2002).
62. N. B. Brandt, S. M. Chudinov, and Y. G. Ponomarev, in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, North-Holland, Amsterdam (1988), Vol. 20.1.