

СОЛИТОНОПОДОБНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ТЕРАГЕРЦЕВЫХ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ ТУННЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

*С. В. Сазонов**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 апреля 2014 г.

Представлено теоретическое исследование солитоноподобных режимов распространения широкополосных терагерцевых импульсов в системе туннельных переходов с учетом влияния вышележащих по энергии квантовых состояний. При этом не использовалось стандартное для квазимонохроматических сигналов приближение медленно меняющихся амплитуд. Показано, что роль вышележащих состояний принципиально важна и не сводится лишь к эффектам поправочного характера. Проанализированы неизвестные ранее солитоноподобные режимы распространения и соответствующая динамика среды. Проведен учет процессов нелинейной рефракции. Выявлены условия, при которых реализуются самофокусировка и дефокусировка импульсов. Предсказан новый вид терагерцевых локализованных «пульс» с резко очерченными границами при неравновесной начальной заселенности туннельных состояний. Основное отличие данных «пульс» от рассматривавшихся ранее в оптическом диапазоне состоит в том, что на их формирование не оказывает влияние дифракция. Здесь фокусирующий эффект, создаваемый туннельным переходом, компенсируется дефокусирующим влиянием переходов на вышележащие состояния в условиях применимости приближения геометрической оптики.

DOI: 10.7868/S0044451014090089

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все более актуальное значение принимают исследования, связанные с вопросами генерации электромагнитного излучения терагерцевого диапазона частот (см., например, [1]). Чувствительность колебательных, вращательных, колебательно-вращательных, туннельных и других квантовых переходов различных сред к излучению данного диапазона приводит к возможности эффективного использования терагерцевых сигналов в спектроскопии, системах безопасности, восстановления изображений и т. д. [2–4].

Одним из наиболее эффективных методов генерации является метод, основанный на механизме оптического выпрямления [5–20]. В этом случае спектр терагерцевого сигнала, как правило, является широкополосным, т. е. спектральная ширина импульса соизмерима с центральной частотой его спектра.

Длительность генерируемого импульса такова, что он вмещает порядка одного периода колебаний терагерцевого диапазона [21–23]. Таким образом, при оптическом методе генерации терагерцевый сигнал обладает свойствами предельно короткого импульса (ПКИ) [24–27]. Это, в свою очередь, означает, что при теоретическом рассмотрении взаимодействия такого импульса с веществом не применимо стандартное для квазимонохроматических сигналов приближение медленно меняющихся амплитуд [28].

Следует отметить, что к настоящему времени взаимодействие терагерцевого излучения с веществом является наименее изученным по сравнению с излучением других частотных диапазонов. Поэтому возникает потребность в построении теоретических моделей, описывающих такое взаимодействие. Из-за большой спектральной ширины импульса во взаимодействие с ним вовлекается большое число различных степеней свободы среды. Это значительно усложняет построение материальных уравнений, описывающих отклик среды на воздействие терагерцевых ПКИ. Здесь построение какой-либо универсальной теории весьма затруднительно. Скорее сле-

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

дует выразить надежду на описание процессов взаимодействия, когда в динамику главным образом вовлекаются какие-то выделенные степени свободы или квантовые переходы. Как было сказано выше, интенсивному взаимодействию с терагерцевым излучением могут быть подвержены, в частности, туннельные состояния среды. Такие состояния встречаются, например, в сегнетоэлектриках типа «порядок–беспорядок» [29–31], в полимерах, содержащих органические молекулы [32], метаматериалах, состоящих из квантовых точек [33–35], ям, нитей и т. д.

Понятно, что с ростом эффективности генерации терагерцевого излучения значительно возрастает интенсивность терагерцевых импульсов. Поэтому уже сегодня становятся актуальными задачи построения нелинейных теоретических моделей, описывающих распространение терагерцевых ПКИ в различных средах.

До сих пор солитонная тематика в научной печати касалась главным образом оптического и ближнего инфракрасного частотных диапазонов и практически обходила стороной терагерцевый диапазон. Между тем в связи с интенсивным ростом приложений, которые находит сегодня терагерцевый электромагнитный диапазон, назревает необходимость в соответствующих исследованиях. Особенно это может коснуться систем связи и обработки информации, работающих в терагерцевом диапазоне. Кроме того, солитонная терагерцевая тематика представляет отдельный интерес, связанный с фундаментальными исследованиями. Не исключено, что в этой области будут найдены представляющие собой решения нелинейных уравнений новые солитонные или солитоноподобные объекты, которые до сих пор не были обнаружены в видимом (или близком к нему) оптическом диапазоне.

Настоящая работа посвящена анализу солитоноподобного распространения широкополосных терагерцевых сигналов в изотропных диэлектриках, содержащих туннельные квантовые переходы.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приводятся физические аргументы в обоснование четырехуровневой модели нелинейной среды, взаимодействующей с терагерцевым ПКИ, при определенной схеме разрешенных переходов. На этой основе записаны уравнения для элементов матрицы плотности среды и классическое волновое уравнение для электрического поля импульса. Раздел 3 посвящен исключению материальных переменных с использованием приближений оптической прозрачности и спектрального перекрытия. Как результат, выводится замкнутое нелинейное волновое уравнение для те-

рагерцевого импульса, в частном случае представляющее собой обобщение уравнения синус-Гордон (СГ). Одномерные солитоноподобные решения обобщенного СГ получены и детально проанализированы в разд. 4. В разд. 5 на основе метода усредненно-го лагранжиана проводится учет влияния процессов саморефракции. Выявлены условия, при которых распространение импульсов происходит в режимах самофокусировки, дефокусировки и формирования терагерцевых «пульс». При этом за рамками рассмотрения остается влияние эффектов дифракции. В заключении подведены итоги, а также намечены пути дальнейших исследований в данной области.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работах [36, 37] с использованием разных приближений рассматривались солитонные режимы распространения широкополосных электромагнитных импульсов в сегнетоэлектриках, содержащих туннельные квантовые состояния протонов, образованные симметричными двухъямными потенциалами. Однако в этих работах туннельные состояния учтены в рамках двухуровневой модели, что значительно сужает круг исследуемых вопросов. Понятно также, что область применимости двухуровневой модели крайне ограничена из-за широкого спектра терагерцевого сигнала. Поэтому возникает необходимость выхода за пределы приближения двухуровневой среды.

Характерная частота ω_{21} перехода между туннельными состояниями имеет порядок 10^{12} с⁻¹. Пусть характерный временной масштаб $\tilde{\tau}_p$ терагерцевого импульса порядка 10^{13} с⁻¹. Тогда имеем малый параметр

$$\mu_1 \equiv \omega_{21} \tilde{\tau}_p \ll 1. \quad (1)$$

В случае широкополосного импульса типа ПКИ величина $\tilde{\tau}_p$ имеет смысл его длительности t_p . Тогда смысл условия (1) состоит в том, что спектральная ширина импульса $\delta\omega \sim 1/t_p \gg \omega_{21}$, т. е. спектр импульса значительно перекрывает рассматриваемый квантовый переход $1 \leftrightarrow 2$, что приводит к сильному взаимодействию между полем и данным переходом. В этой связи неравенство (1) можно назвать приближением спектрального перекрытия. С другой стороны, такой широкий спектр сигнала способен вовлечь во взаимодействие с ним квантовые переходы на вышележащие состояния как с уровня 1, так и с уровня 2. Обозначим эти состояния соответственно

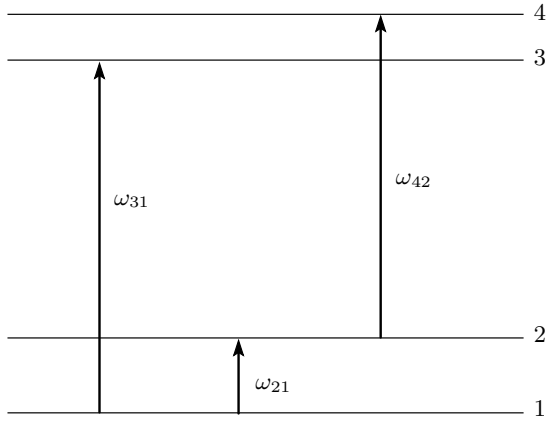


Рис. 1. Квантовая модель среды. Стрелками изображены разрешенные переходы и обозначены соответствующие частоты

уровнями 3 и 4, ограничившись, таким образом, приближением четырехуровневой среды (рис. 1). Будем считать, что частоты ω_{31} и ω_{42} разрешенных переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ удовлетворяют условиям прозрачности, противоположным (1):

$$\mu_2 \sim (\omega_{31} \tilde{\tau}_p)^{-1} \sim (\omega_{42} \tilde{\tau}_p)^{-1} \ll 1, \quad (2)$$

где $\tilde{\tau}_p$ — характерный временной масштаб импульса.

В случае водородосодержащих сегнетоэлектриков $\omega_{31} \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$ [29], что вполне согласуется с (2). Переходами между состояниями 3 и 4 пренебрежем как эффектами более высокого порядка малости.

Заметим, что в приложении к вопросам распространения ПКИ в различных средах приближения (1) и (2) впервые использовались в работах [38, 39]. Позже они были использованы в других работах [27, 40–43], в которых рассматривались более сложные модели среды.

В соответствии со схемой разрешенных переходов, выделенных на рис. 1, запишем систему уравнений для элементов соответствующей матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\omega_{21}\rho_{21} + i\Omega_{21}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \Omega_{42}\rho_{41} - i\Omega_{31}\rho_{32}^*, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t} = -i\omega_{31}\rho_{31} + i\Omega_{31}(\rho_{11} - \rho_{33}) - i\Omega_{21}\rho_{32}, \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \rho_{42}}{\partial t} = -i\omega_{42}\rho_{42} + i\Omega_{42}(\rho_{22} - \rho_{44}) - i\Omega_{21}\rho_{41}, \quad (3c)$$

$$\frac{\partial \rho_{32}}{\partial t} = -i\omega_{32}\rho_{32} + i(\Omega_{31}\rho_{21}^* - \Omega_{21}\rho_{31} - \Omega_{42}\rho_{43}^*), \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \rho_{41}}{\partial t} = -i\omega_{41}\rho_{41} + i(\Omega_{42}\rho_{21} - \Omega_{31}\rho_{43} - \Omega_{21}\rho_{42}), \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \rho_{43}}{\partial t} = -i\omega_{43}\rho_{43} + i(\Omega_{42}\rho_{32}^* - \Omega_{31}\rho_{41}), \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) + i\Omega_{31}(\rho_{31} - \rho_{31}^*), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = -i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) + i\Omega_{42}(\rho_{42} - \rho_{42}^*), \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \rho_{33}}{\partial t} = -i\Omega_{31}(\rho_{31} - \rho_{31}^*), \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \rho_{44}}{\partial t} = -i\Omega_{42}(\rho_{42} - \rho_{42}^*).$$

Здесь $\Omega_{lk} = d_{lk}E/\hbar$, d_{lk} — дипольные моменты разрешенных квантовых переходов, предполагающиеся вещественными, E — электрическое поле импульса.

Уравнения (3) и (4) описывают динамику недиагональных элементов матрицы плотности $\hat{\rho}$ соответственно для разрешенных и запрещенных переходов. Системе (5) отвечает динамика населенностей квантовых уровней.

Дополним систему материальных уравнений (3)–(5) волновым уравнением для электрического поля импульса, считая, что он распространяется вдоль оси z :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n_m^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta_{\perp} E, \quad (6)$$

где поляризационный отклик среды

$$P = n[d_{21}(\rho_{21} + \rho_{21}^*) + d_{31}(\rho_{31} + \rho_{31}^*) + d_{42}(\rho_{42} + \rho_{42}^*)], \quad (7)$$

n_m — показатель преломления среды, формируемый степенями свободы среды, отличными от рассматриваемых квантовых переходов, n — концентрация туннельных центров, c — скорость света, Δ_{\perp} — поперечная к оси z часть лапласиана.

3. ИСКЛЮЧЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

В соответствии с условием (2) левые части уравнений (3) и (4) малы по сравнению с каждым слагаемым в соответствующих правых частях. Полагая их равными нулю в уравнении (4), придем к выражениям

$$\begin{aligned}\rho_{32} &= \frac{\Omega_{31}\rho_{21}^* - \Omega_{21}\rho_{31} - \Omega_{42}\rho_{43}^*}{\omega_{32}}, \\ \rho_{41} &= \frac{\Omega_{42}\rho_{21} - \Omega_{21}\rho_{42} - \Omega_{31}\rho_{43}}{\omega_{41}}, \\ \rho_{43} &= \frac{\Omega_{42}\rho_{32}^* - \Omega_{31}\rho_{41}}{\omega_{43}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Подставляя получившиеся выражения для ρ_{32} , ρ_{41} и ρ_{43} в уравнения (3b) и (3c), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{31}}{\partial t} &= -i\left(\omega_{31} - \frac{\Omega_{21}^2}{\omega_{32}}\right)\rho_{31} + \Omega_{31}(\rho_{11} - \rho_{33}) - \\ &\quad - i\frac{\Omega_{21}\Omega_{31}}{\omega_{32}}\rho_{21}^* + i\frac{\Omega_{21}\Omega_{42}}{\omega_{32}}\rho_{43}^*,\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{42}}{\partial t} &= -i\left(\omega_{42} - \frac{\Omega_{21}^2}{\omega_{41}}\right)\rho_{42} + \Omega_{42}(\rho_{22} - \rho_{44}) - \\ &\quad - i\frac{\Omega_{21}\Omega_{42}}{\omega_{41}}\rho_{21} + i\frac{\Omega_{21}\Omega_{31}}{\omega_{41}}\rho_{43}.\end{aligned}\quad (10)$$

Ниже в недиагональных элементах матрицы плотности $\hat{\rho}$ будем учитывать степенные нелинейности не выше третьего порядка. Тогда последними слагаемыми в выражениях (9) и (10), содержащими элемент ρ_{43} матрицы плотности, соответствующий запрещенному переходу, как видно из выражений (9), (10) и (4), можно пренебречь. Считая также, что $\Omega_{21}^2/\omega_{31}\omega_{32} \ll 1$, перепишем уравнения (9) и (10) в виде

$$\begin{aligned}\rho_{31} &= \frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}}(\rho_{11} - \rho_{33}) + \frac{\Omega_{31}\Omega_{21}^2}{\omega_{31}^2\omega_{32}}(\rho_{11} - \rho_{33}) - \\ &\quad - \frac{\Omega_{21}\Omega_{31}}{\omega_{31}\omega_{32}}\rho_{21}^* + \frac{i}{\omega_{31}}\frac{\partial\rho_{31}}{\partial t},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\rho_{42} &= \frac{\Omega_{42}}{\omega_{42}}(\rho_{22} - \rho_{44}) + \frac{\Omega_{42}\Omega_{21}^2}{\omega_{42}^2\omega_{41}}(\rho_{22} - \rho_{44}) - \\ &\quad - \frac{\Omega_{21}\Omega_{42}}{\omega_{41}\omega_{42}}\rho_{21} + \frac{i}{\omega_{42}}\frac{\partial\rho_{42}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (12)$$

Подставляя (11) в уравнение (5) для ρ_{33} , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{33}}{\partial t} &= i\frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}\omega_{32}}\Omega_{21}(\rho_{21}^* - \rho_{21}) + \\ &\quad + \frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{31} + \rho_{31}^*).\end{aligned}\quad (13)$$

Учтя только первое слагаемое в правой части выражения (11), запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{31} + \rho_{31}^*) \approx \frac{2}{\omega_{31}}\frac{\partial}{\partial t}[\Omega_{31}(\rho_{11} - \rho_{33})].$$

Поскольку $\rho_{33} \sim E^2$, этим элементом матрицы плотности $\hat{\rho}$ можно пренебречь. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{31} + \rho_{31}^*) \approx \frac{2}{\omega_{31}}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_{31}\rho_{11}).$$

Учитывая теперь уравнения (5a) и (5c), найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{33}}{\partial t} &= -\frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}\omega_{32}}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} + \rho_{33}) + 2\frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}^2}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_{31}\rho_{11}) \approx \\ &\approx -\frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}\omega_{32}}\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} + 2\frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}^2}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_{31}\rho_{11}).\end{aligned}\quad (14)$$

В силу того, что $\omega_{21} \ll \omega_{31}$ (см. условия (1) и (2)), здесь можно с хорошей точностью положить $\omega_{32} \approx \omega_{31}$. Тогда из уравнения (14) получаем

$$\frac{\partial\rho_{33}}{\partial t} = \frac{1}{\omega_{31}^2}\left(\Omega_{31}^2\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} + \rho_{11}\frac{\partial\Omega_{31}^2}{\partial t}\right).$$

Совершенно аналогично найдем

$$\frac{\partial\rho_{44}}{\partial t} = \frac{1}{\omega_{42}^2}\left(\Omega_{42}^2\frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} + \rho_{22}\frac{\partial\Omega_{42}^2}{\partial t}\right).$$

Интегрируя последние два уравнения, имеем

$$\rho_{33} = \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\rho_{11}, \quad \rho_{44} = \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2}\rho_{22}.\quad (15)$$

С учетом (15) выражения (11) и (12) примут вид

$$\begin{aligned}\rho_{31} &= \frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}}\left(1 + \frac{\Omega_{21}^2 - \Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\right)\rho_{11} - \\ &\quad - \frac{\Omega_{21}\Omega_{31}}{\omega_{31}^2}\rho_{21}^* + \frac{i}{\omega_{31}}\frac{\partial\rho_{31}}{\partial t},\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\rho_{42} &= \frac{\Omega_{42}}{\omega_{42}}\left(1 + \frac{\Omega_{21}^2 - \Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2}\right)\rho_{22} - \\ &\quad - \frac{\Omega_{21}\Omega_{42}}{\omega_{42}^2}\rho_{21} + \frac{i}{\omega_{42}}\frac{\partial\rho_{42}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (17)$$

Таким образом, с помощью соотношений (15)–(17) элементы матрицы плотности, соответствующие переходам $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, а также населенности третьего и четвертого квантовых уровней выразились через элементы матрицы плотности, соответствующие переходу $1 \leftrightarrow 2$.

Используя теперь уравнения (5) и (15), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} &= i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - \frac{\partial\rho_{33}}{\partial t} = \\ &= i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\rho_{11}\right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{11}}{\partial t} = i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*). \quad (18)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{22}}{\partial t} = -i\Omega_{21}(\rho_{21} - \rho_{21}^*). \quad (19)$$

Здесь

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} \left(1 + \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\right), \quad \tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} \left(1 + \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2}\right). \quad (20)$$

Подставляя в уравнение (3а) вместо ρ_{41} и ρ_{32}^* их выражения (8) в пренебрежении последними слагаемыми в числителях и полагая здесь $\rho_{31}^* = \Omega_{31}\rho_{11}/\omega_{31}$, $\rho_{42} = \Omega_{42}\rho_{22}/\omega_{42}$ (см. (16), (17)), имеем

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\tilde{\omega}_{21}\rho_{21} + i\Omega_{21}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22}), \quad (21)$$

где

$$\tilde{\omega}_{21} = \omega_{21} + \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}}. \quad (22)$$

При получении уравнений (18)–(22), как и выше, мы положили $\omega_{32} \approx \omega_{31}$, $\omega_{41} \approx \omega_{42}$. Вводя переменные

$$U = \frac{\rho_{21} + \rho_{21}^*}{2}, \quad V = \frac{\rho_{21}^* - \rho_{21}}{2i}, \quad (23)$$

$$W = \frac{\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{11}}{2},$$

перепишем выражения (18), (19) и (21) в виде уравнений Блоха:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\tilde{\omega}_{21}V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \tilde{\omega}_{21}U + 2\Omega_{21}W, \quad (24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\Omega_{21}V.$$

Считая, что ω_{21} и $\tilde{\omega}_{21}$ — величины одного порядка и принимая во внимание условие (1), положим в нулевом по μ_1 приближении $\tilde{\omega}_{21} = 0$. Тогда $U = 0$,

$$V = W_\infty \sin \theta, \quad W = W_\infty \cos \theta, \quad (25)$$

где $W_\infty = W(t = -\infty) = (w_2 - w_1)/2$, w_1 и w_2 — начальные населенности соответственно первого и второго уровней,

$$\theta = 2 \int_{-\infty}^t \Omega_{21} dt' = 2 \frac{d_{21}}{\hbar} \int_{-\infty}^t E dt'. \quad (26)$$

Тогда из первого уравнения (24) в первом по μ_1 приближении имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\tilde{\omega}_{21}W_\infty \sin \theta =$$

$$= -W_\infty \left(\omega_{21} + \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}} \right) \sin \theta. \quad (27)$$

Очевидно, что $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$. Принимая во внимание соотношения (15) и (20), запишем данное условие в виде $\tilde{\rho}_{11} + \tilde{\rho}_{22} = 1$. Кроме того, $\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{11} = 2W_\infty \cos \theta$ (см. (25)). Отсюда, а также из (15) и (20), сохраняя члены порядка $\Omega_{31}^2/\omega_{31}^2 \sim \Omega_{42}^2/\omega_{42}^2$, получим

$$\rho_{11} = \left(1 - \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\right) \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta\right), \quad (28)$$

$$\rho_{22} = \left(1 - \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2}\right) \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta\right),$$

$$\rho_{33} = \frac{\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta\right), \quad (29)$$

$$\rho_{44} = \frac{\Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta\right).$$

Учитывая выражения (28), (29), (16), (17) и (25), имеем

$$\rho_{31} = \frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}} \left(1 + \frac{\Omega_{21}^2 - 2\Omega_{31}^2}{\omega_{31}^2}\right) \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta\right) -$$

$$- \frac{\Omega_{21}\Omega_{31}}{\omega_{31}^2} \rho_{21}^* + \frac{i}{\omega_{31}} \frac{\partial \rho_{31}}{\partial t}, \quad (30)$$

$$\rho_{42} = \frac{\Omega_{42}}{\omega_{42}} \left(1 + \frac{\Omega_{21}^2 - 2\Omega_{42}^2}{\omega_{42}^2}\right) \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta\right) -$$

$$- \frac{\Omega_{21}\Omega_{42}}{\omega_{42}^2} \rho_{21} + \frac{i}{\omega_{42}} \frac{\partial \rho_{42}}{\partial t}. \quad (31)$$

Последние слагаемые в правых частях уравнений (30) и (31) малы вследствие условий (2). В первом порядке по малому параметру $\mu_2 \sim 1/\omega_{31}, 1/\omega_{42}$ имеем

$$\rho_{31} = \frac{\Omega_{31}}{\omega_{31}} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta\right),$$

$$\rho_{42} = \frac{\Omega_{42}}{\omega_{42}} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta\right).$$

Отсюда, а также из выражения (7) видно, что первое приближение по μ_2 соответствует бездисперсионному отклику среды, формируемому переходами $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. В свою очередь, переход $1 \leftrightarrow 2$ модулирует восприимчивость переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ за счет динамического изменения разности населенностей уровней 1 и 2. Дисперсия отклика на переходах $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ появляется в высших порядках по μ_2 , учитываемых последними слагаемыми в уравнениях (30), (31). В то же время из выражений (7), (23), (26) и (27) следует, что уже в первом приближении по μ_1 поляризационный отклик на перехо-

де $1 \leftrightarrow 2$ является сугубо дисперсионным и содержит нелинейность по напряженности поля импульса. При этом собственная частота ω_{21} данного перехода испытывает динамическую квадратичную по полю штарковскую модуляцию благодаря переходам $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. Поэтому ниже в разложении по обоим малым параметрам ограничимся лишь первым порядком по μ_1 . Учитывая последние слагаемые в правых частях уравнений (30), (31) методом последовательных приближений и удерживая слагаемые вплоть до μ_3^2 и $\mu_1\mu_2^2$, после использования уравнений (7), (23), (27) и выражений для Ω_{lk} имеем

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)}, \quad (32)$$

где

$$P^{(0)} = \frac{2n}{\hbar} \left[\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \right) + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \right) \right] E, \quad (33)$$

$$P^{(1)} = -2nW_\infty \times \left\{ d_{21} \int_{-\infty}^t \left[\omega_{21} + \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) E^2 \right] \sin \theta dt' - \frac{2}{\hbar} \left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) E \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (34)$$

$$P^{(2)} = 2n \left\{ \frac{W_\infty d_{21} \omega_{21}}{\hbar^2} \left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}^2} + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}^2} \right) E^2 \times \int_{-\infty}^t \sin \theta dt' + \frac{W_\infty d_{21}^2}{\hbar^2} \left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}^3} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}^3} \right) \frac{\partial}{\partial t} (E^2 \sin \theta) + \frac{1}{\hbar^3} \left[\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}^2} (d_{21}^2 - 2d_{31}^2) \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta \right) + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}^2} (d_{21}^2 - 2d_{42}^2) \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta \right) \right] E^3 - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}^2} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \cos \theta \right) + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}^2} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \cos \theta \right) \right) E \right] \right\}. \quad (35)$$

Подстановка соотношений (33)–(35) в выражение (6) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P^{(1)} + P^{(2)}) - \Delta_\perp E, \quad (36)$$

где v_0 — линейная скорость, определяемая выражением

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{c} \times \sqrt{n_m^2 + \frac{8\pi n}{\hbar} \left[\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \right) + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \right) \right]}. \quad (37)$$

Правая часть уравнения (36) содержит малые по параметрам μ_1 и μ_2 нелинейные и дисперсионные слагаемые, а также вклад от поперечной динамики импульса, выраженный последним слагаемым. Оставаясь в рамках параксиального приближения, будем и его считать относительно малым. Тогда к уравнению (36) можно применить приближение однонаправленного распространения [38, 39]. Для этого введем «бегущее» время $\tau = t - z/v_0$ и «медленную» координату $\zeta = \mu z$, где $\mu \sim \mu_1, \mu_2$. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\frac{\mu}{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \tau}.$$

В последнем выражении мы пренебрегли слагаемым $\mu^2 \partial^2 / \partial \zeta^2$. Тогда после интегрирования по τ и возвращения к исходным независимым переменным z и t , из выражения (36) получим

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi v_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (P^{(1)} + P^{(2)}) + \frac{v_0}{2} \Delta_\perp \int_{-\infty}^t E dt'. \quad (38)$$

Рассмотрим частные случаи. Предположим вначале, что переходами $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ можно пренебречь. Тогда $d_{31} = d_{42} = 0$ и, как видно из уравнений (33)–(35), (37), $P^{(0)} = P^{(2)} = 0$, а

$$P^{(1)} = -W_\infty d_{21} n \omega_{21} \int_{-\infty}^t \sin \theta dt'.$$

Подставляя последнее выражение в (38) и учитывая (26), приходим в одномерном случае ($\Delta_\perp = 0$) к уравнению СГ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} = -\alpha \sin \theta, \quad (39)$$

где

$$\alpha = -\frac{8\pi d_{21}^2 n \omega_{21} v_0}{\hbar c^2} W_\infty.$$

Пусть теперь переход $1 \leftrightarrow 2$ запрещен, т.е. $d_{21} = \theta = P^{(1)} = 0$. Тогда с учетом выражений (35) и (38) в одномерном случае приходим к модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза (МКдВ)

$$\frac{\partial E}{\partial z} - \eta E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = 0,$$

где

$$\eta = 24 \frac{\pi n v_0}{\hbar^3 c^2} \left[\frac{d_{31}^4}{\omega_{31}^2} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \right) + \frac{d_{42}^4}{\omega_{42}^2} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \right) \right],$$

$$\delta = \frac{4 \pi n v_0}{\hbar c^2} \left[\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}^2} \left(\frac{1}{2} - W_\infty \right) + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}^2} \left(\frac{1}{2} + W_\infty \right) \right].$$

Отметим, что оба уравнения, СГ и МКдВ, соответственно при условиях (1) и (2) впервые были получены в работах [38, 39].

Таким образом, нелинейное интегродифференциальное уравнение (38), в котором $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ определяются соответственно выражениями (34) и (35), является обобщением рассмотренных ранее случаев, описывающих взаимодействие электромагнитных импульсов с двухуровневыми атомами. Сравнимая МКдВ и выражение для $P^{(2)}$, можно сказать, что изменение населенностей туннельного перехода $1 \leftrightarrow 2$ динамическим образом модулирует кубическую нелинейность η и дисперсию δ , создаваемые переходами $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, что выражается изменением θ в (35) по мере распространения импульса.

Если теперь в выражении (38) пренебречь вкладом $P^{(2)}$ в поляризационный отклик как величиной более высокого порядка малости, приходим к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} - 4\beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left[\alpha - \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \right] \sin \theta = \frac{v_0}{2} \Delta_\perp \theta, \quad (40)$$

где

$$\beta = -\frac{2 \pi n v_0 W_\infty}{\hbar c^2} \left(\frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right).$$

Из уравнения (40) видно, что в использованном при его выводе приближении линейная дисперсия создается только туннельным переходом $1 \leftrightarrow 2$. Переходы же $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ изменяют линейную безынерционную часть показателя преломления среды, определяемую квадратным корнем в выражении (37), и создают дополнительную нелинейность, учитываемую в уравнении (40) коэффициентом β .

Особо подчеркнем, что уравнение (40), вообще говоря, нельзя рассматривать как слабо возмущенное уравнение СГ (39). Действительно, величина

отношения второго слагаемого в квадратных скобках в (40) к первому по порядку величины равна $(d/d_{21})^2 \mu_2/\mu_1$, где $d \sim d_{31}, d_{42}$. Отсюда видно, что данные слагаемые могут находиться по отношению друг к другу в произвольном количественном отношении, в том числе быть одного порядка. Следовательно, переходы $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ в рассматриваемом приближении могут вносить сравнимые вклады в динамику распространения импульса. Ниже иногда будем называть уравнение (40) обобщенным уравнением СГ.

4. ОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ

С целью получить стационарные солитоноподобные решения уравнения (40) при $\Delta_\perp = 0$ положим $\theta = \theta(t - z/v)$, где v — скорость распространения импульса. В результате имеем

$$\theta = \pi + 2 \arctg \left(\sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha \tau_p^2}} \operatorname{sh} \xi \right), \quad (41)$$

где τ_p — свободный параметр, связанный с длительностью импульса (см. ниже), а динамическая переменная ξ при $\beta/\alpha > 0$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\xi + \frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \arctg \left(\frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{th} \xi \right) = \frac{t - z/v}{\tau_p}. \quad (42)$$

Если $\beta/\alpha < 0$, то

$$\xi - \frac{2}{\tau_p} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{arth} \left(\frac{2}{\tau_p} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{th} \xi \right) = \frac{t - z/v}{\tau_p}. \quad (43)$$

При этом скорость v распространения ПКИ связана с τ_p соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \alpha \tau_p^2. \quad (44)$$

Из выражений (14), (43) и (26) для электрического поля импульса в обоих случаях имеем

$$E = \frac{\hbar}{d_{21} \sqrt{\tau_p^2 + 4\beta/\alpha}} \operatorname{sech} \xi. \quad (45)$$

Решением уравнения (40) в виде формул (41)–(45) неявно, параметрически, задается зависимость электрического поля импульса от «бегущего» времени $t - z/v$. Связь между ξ и $t - z/v$, выражаемая соотношениями (42) и (43), может быть задана

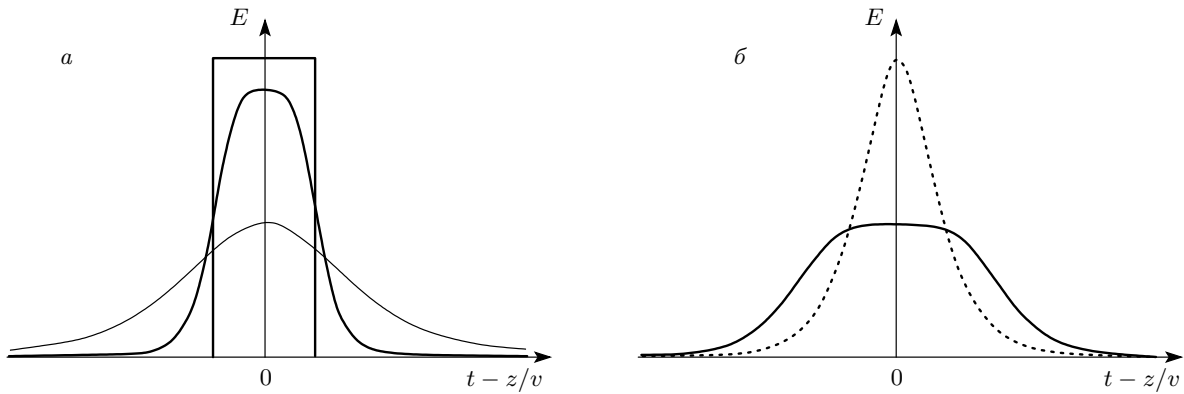


Рис. 2. а) Профили «солитона» уравнения (40) при $\beta/\alpha > 0$; толщина соответствующих линий растет по мере уменьшения длительности t_p , сопровождаемого ростом амплитуды и стремлением пиковой части «солитона» к форме плато; при $t_p = t_p^{min}$ (см. (48)) профиль принимает прямоугольную форму с максимальным амплитудным значением. б) Профили солитонов СГ (пунктир) и уравнения (40) (сплошная линия) при $\beta/\alpha > 0$ и одном и том же значении свободного параметра τ_p

в дифференциальной форме, справедливой в обоих случаях:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\tau_p} \frac{\tau_p^2 + 4(\beta/\alpha) \operatorname{th}^2 \xi}{\tau_p^2 + 4(\beta/\alpha)}, \quad (46)$$

где точка над ξ обозначает производную по $t - z/v$. При $\beta = 0$, как и следовало ожидать, решение в обоих случаях переходит в солитон уравнения СГ (39).

Термин «солитон» в нелинейной оптике последнее время все чаще применяют к решениям нелинейных уравнений в виде уединенных импульсов [44], понимая этот термин не в строгом смысле, без привязки к вопросу об интегрируемости. Следуя этой тенденции, ниже решение вида (41)–(45) также будем иногда называть «солитоном», беря, однако, данный термин в кавычки.

Из выражений (45) и (46) видно, что «площадь» «солитона» в обоих случаях ($\beta/\alpha > 0$ и $\beta/\alpha < 0$) равна

$$\begin{aligned} A \equiv \theta(z, t)_{t \rightarrow \infty} &= \frac{2d_{21}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E dt' = \\ &= \frac{2d_{21}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E \dot{\xi}^{-1} d\xi = 2\pi \end{aligned}$$

(см. также (26)). Отсюда, а также из соотношения (28) следует, что в процессе распространения «солитона» населенности уровней туннельного перехода $1 \leftrightarrow 2$ испытывают полную инверсию с последующим возвращением к исходным значениям.

Ниже проведем анализ решения уравнений (41)–(45) отдельно при $\beta/\alpha > 0$ и $\beta/\alpha < 0$.

1. Случай $\beta/\alpha > 0$. График зависимости электрического поля от «бегущего» времени представлен для различных значений τ_p на рис. 2. Здесь же для сравнения пунктирной линией при том же значении τ_p дана соответствующая зависимость при $\beta = 0$, когда во взаимодействии с полем участвует только туннельный квантовый переход $1 \leftrightarrow 2$, что соответствует солитону уравнения СГ. Видно, что в рассматриваемом случае «солитон» является менее заостренным и более растянутым во времени, чем солитон СГ. С уменьшением свободного параметра τ_p данное различие становится все более рельефным, и при $\tau_p = 0$ профиль электрического поля принимает прямоугольный вид (рис. 2а). Понятно, что в непосредственной близости от значения $\tau_p = 0$, вообще говоря, необходимо учитывать высший порядок дисперсии, обусловленный наличием переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ и содержащийся в выражении для $P^{(2)}$. Тем не менее уже в рамках используемого приближения становится понятной тенденция к формированию при $\tau_p \rightarrow 0$ «предельного солитона».

В общем случае определим длительность t_p импульса как интервал между временами при фиксированном z , где электрическое поле в $e \approx 2.718$ раза меньше амплитудного значения. Как видно из выражения (45), при этих временах $\operatorname{sech} \xi = e^{-1}$, $\operatorname{th} \xi = \pm \sqrt{1 - e^{-2}}$, откуда $\xi = \pm [1 + \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-2}})]$. Тогда, используя уравнение (42), запишем

$$\begin{aligned} t_p^* &= 2\tau_p^* \left[1 + \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2}} \right) \right] + \\ &+ 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - e^{-2}}}{\tau_p^*}. \quad (47) \end{aligned}$$

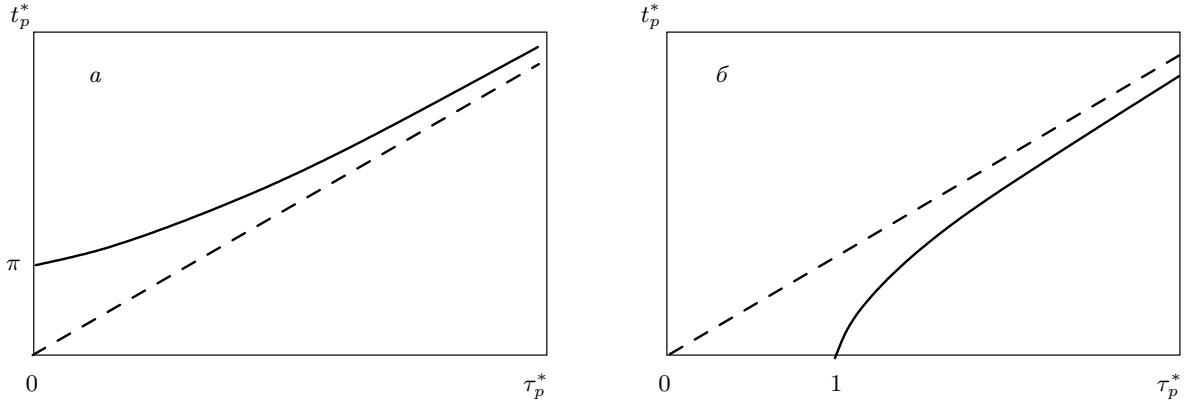


Рис. 3. Зависимости длительности t_p «солитона» от параметра τ_p при $\beta/\alpha > 0$ (а) и $\beta/\alpha < 0$ (б). Для удобства оба параметра нормированием на величину $2\sqrt{|\beta/\alpha|}$ приведены к безразмерному виду. Сплошные линии соответствуют выражениям (47) (а) и (49) (б), штриховые — солитонам СГ

Здесь и ниже

$$t_p^* \equiv \frac{t_p}{2} \sqrt{\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|}, \quad \tau_p^* \equiv \frac{\tau_p}{2} \sqrt{\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|}.$$

На рис. 3а изображена зависимость $t_p^*(\tau_p^*)$. Отсюда видно, что минимальная длительность t_p^{min} достигается при $\tau_p = 0$ и соответствует «предельному солитону» прямоугольного профиля на рис. 2 с максимальной амплитудой

$$E_m = \frac{\hbar}{2d_{21}} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

и скоростью распространения $v = v_0$. Из выражения (47) следует, что минимальная длительность определяется выражением

$$t_p^{min} = 2\pi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{48}$$

В следующем разделе мы еще вернемся к «предельному солитону», где будет исследоваться вопрос о влиянии конечности поперечных размеров импульса на его нелинейное распространение. Поэтому проведем для него численные оценки. Из определений коэффициентов α и β следует, что

$$|\alpha| \sim \frac{\omega_c^{(21)} \omega_{21}}{c}, \quad |\beta| \sim \frac{\omega_c}{c\omega_0},$$

где $\omega_c^{(21)} = 4\pi d_{21}^2 n/\hbar$ и $\omega_c = 4\pi d_{31}^2 n/\hbar \sim 4\pi d_{42}^2 n/\hbar$ — коллективные частоты соответственно на переходах $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$, $\omega_0 \sim \omega_{31} \sim \omega_{42}$. Взяв $d_{21} \sim d_{31} \sim d_{42} \sim 10^{-18}$ ед. СГСЭ, $n \sim 10^{22}$ см $^{-3}$, имеем $\omega_c^{(21)} \sim \omega_c \sim 10^{14}$ с $^{-1}$, $v \approx v_0 \sim c/n_m$ (см. (44) при

$\tau_p \rightarrow 0$). Кроме того, $\Omega_{31} \sim d_{31} E_m/\hbar \sim (\omega_{21}\omega_0)^{1/2}$, $t_p \sim (\omega_{21}\omega_0)^{-1/2}$. Пусть $d_{31} \sim d_{21}$, $\omega_{21} \sim 10^{12}$ с $^{-1}$, $\omega_0 \sim 10^{14}$ с $^{-1}$. Тогда $\Omega_{31} \sim 10^{13}$ с $^{-1}$, $t_p \sim 10^{-13}$ с, что хорошо согласуется с условиями (1) и (2), если в качестве временного масштаба $\tilde{\tau}_p$ импульса берется его длительность t_p . Используя приведенные выше значения, для интенсивности терагерцевого импульса найдем

$$I \approx \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\hbar \Omega_{31}}{d_{31}} \right)^2 \sim 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Есть надежда, что такие значения интенсивностей терагерцевых сигналов могут быть получены в ближайшие годы с использованием различных методов их фокусировки [11–13].

2. Случай $\beta/\alpha < 0$. Определив длительность «солитона», как и в предыдущем случае, запишем

$$t_p^* = 2\tau_p^* \left[1 + \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2}} \right) \right] - 2 \operatorname{arth} \frac{\sqrt{1 - e^{-2}}}{\tau_p^*}. \tag{49}$$

Соответствующая зависимость изображена на рис. 3б. Как следует из ее вида, а также из выражений (43) и (45), $\tau_p \geq 2\sqrt{|\beta/\alpha|}$ (или $\tau_p^* > 1$). С уменьшением τ_p (а вместе с ним и t_p) «солитон» становится уже и острее, а при $\tau_p \rightarrow 2\sqrt{|\beta/\alpha|}$ его амплитуда резко возрастает, длительность t_p также резко уменьшается, а скорость стремится к значению $v_m = v_0/(1 - 4\beta v_0)$ (см. (49), (44) и (45)). При равновесной начальной населенности туннельных состояний величина $\alpha > 0$. Следовательно, $\beta < 0$ и $v_m < v_0$. В неравновесном случае величина β

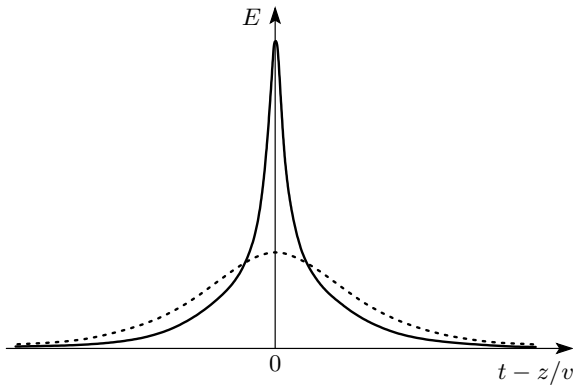


Рис. 4. Профили солитонов уравнений (39) (пунктир) и (40) (сплошная линия) при $\beta/\alpha < 0$ и одном и том же значении свободного параметра τ_p

положительна, поэтому $v_m > v_0$. Заметим, что в принятом приближении однонаправленного распространения скорость солитона незначительно отличается от v_0 . Поэтому ситуация, при которой значение v_m отрицательно, здесь исключена. Из рис. 4 видно, что здесь «солитон» (43), (45), в противоположность случаю $\beta/\alpha > 0$, выше и острее солитона СГ при одном и том же значении τ_p . Поэтому его можно назвать «заостренным солитоном».

Легко видеть, что в обоих случаях при $\tau_p \gg \gg 2\sqrt{|\beta/\alpha|}$ рассмотренные солитоноподобные решения приближаются по свойствам к солитону СГ.

В заключение настоящего раздела сделаем замечания относительно динамики населенностей среды, сопровождающей распространение рассмотренных выше «солитонов». В принятых здесь приближениях $(\Omega_{31}/\omega_{31})^2 \sim (\Omega_{42}/\omega_{42})^2 \ll 1$. Тогда из выражений (29) следует, что квантовые состояния, лежащие по энергии выше туннельных, практически не заселяются. Что же касается туннельных состояний, то, как видно из соотношений (28) и (41),

$$\rho_{11} \approx \frac{1}{2} - W_\infty \frac{q \operatorname{sh}^2 \xi - 1}{q \operatorname{sh}^2 \xi + 1}, \quad \rho_{22} \approx \frac{1}{2} + W_\infty \frac{q \operatorname{sh}^2 \xi - 1}{q \operatorname{sh}^2 \xi + 1},$$

где $q = 1 + 4\beta/\alpha\tau_p^2$.

Таким образом, как и в отсутствие вышележащих состояний (что соответствует случаю СГ), по мере распространения «солитона» происходит полный обмен населенностями между туннельными уровнями с конечным возвратом к их исходным значениям. При этом центру «солитона» соответствует инвертированное (по отношению к исходной) разность этих населенностей. Однако здесь влияние

удаленных состояний на динамику населенностей туннельных уровней может быть принципиальным. Действительно, при $\beta/\alpha > 0$ инвертированная разность населенностей туннельных состояний является долгоживущей по сравнению со случаем СГ, так как длительность «солитона» уравнения (40) может значительно превышать длительность солитона СГ. Наиболее рельефно данное различие проявляется в случае «предельного солитона», длительность которого определяется выражением (48). При распространении же «заостренного солитона» ($\beta/\alpha < 0$) разность населенностей туннельных состояний, напротив, короткоживущая в сравнении со случаем, при котором удаленные квантовые уровни отсутствуют.

5. ВЛИЯНИЕ САМОРЕФРАКЦИИ

Рассмотренные в предыдущем разделе одномерные солитоноподобные решения обобщенного уравнения СГ (40) справедливы, строго говоря, если их поперечные размеры бесконечны. Понятно, что в реальных ситуациях это не так и необходим учет конечности данных размеров. Это обстоятельство может оказывать существенное влияние на процесс распространения импульсов, приводя к явлениям самофокусировки, дефокусировки и т. д. Следуя работе [45], объединим эти нелинейные явления единым термином «саморефракция».

С формальной точки зрения, процессы саморефракции учитываются при отличной от нуля правой части уравнения (40). Будем считать далее, что формирование рассмотренных в предыдущем разделе одномерных «солитонов» происходит быстрее, нежели влияние саморефракции. Кроме того, в нашем рассмотрении будем пренебрегать влиянием дифракционной расходимости «солитонов». Сказанное в этом абзаце справедливо, если выполняется условие

$$l_{dis} \ll l_r \ll l_D, \tag{50}$$

где l_{dis} , l_r и l_D — соответственно дисперсионная, рефракционная и дифракционная длины.

Анализ двойного неравенства (50) проведем несколько позже. Здесь же заметим, что при выполнении этого неравенства хорошо зарекомендовал себя метод «усредненного лагранжиана» [46–48], который мы и будем использовать для учета саморефракции.

Уравнению (40) соответствует плотность лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - 2 \left[\alpha + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{v_0}{4} (\nabla_{\perp} \theta)^2. \quad (51)$$

Используя выражения (41)–(43), в качестве пробных решений для учета процессов саморефракции на рассмотренные выше солитоны примем выражения

$$\theta = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha} \gamma^2 \operatorname{sh} \xi} \right), \quad (52)$$

$$\xi + 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma \operatorname{arctg} \left(2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma \operatorname{th} \xi \right) = \gamma \left(\tau - \frac{\varphi_+}{v_0} \right), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \xi + 2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \gamma \operatorname{arth} \left(2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \gamma \operatorname{th} \xi \right) = \\ = \gamma \left(\tau - \frac{\varphi_-}{v_0} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь γ — динамический параметр, связанный с длительностью импульса, а φ_+ и φ_- — солитонные эйконалы соответственно для случаев $\beta/\alpha > 0$ и $\beta/\alpha < 0$. Соотношение (53) справедливо при $\beta/\alpha > 0$, а (54) — при $\beta/\alpha < 0$. В одномерном случае для γ и φ_{\pm} имеем $\gamma = 1/\tau_p = \operatorname{const}$, $\varphi_{\pm} = v_0 \alpha \tau_p^2 z$ (см. (42)–(44)). Поэтому ниже, следуя [46, 47], будем считать γ и φ соответственно «медленной» и «быстрой» функциями координат. В этой связи при подстановке выражений (52)–(54) с использованием (46) в лагранжиан (51) будем пренебрегать производными γ , что соответствует приближению геометрической оптики для солитонов [46, 47].

Далее, после интегрирования по τ , придем к «усредненным лагранжианам»

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &\equiv -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} L_+ d\tau = \frac{1}{2v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \times \\ &\times \left[\frac{\partial \varphi_+}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \varphi_+)^2}{2} \right] \operatorname{arctg} \left(2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma \right) + \\ &+ \alpha \left[\frac{1}{\gamma} + 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{arctg} \left(2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma \right) \right], \\ \Lambda_- &\equiv -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} L_- d\tau = \frac{1}{2v_0} \sqrt{\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|} \times \\ &\times \left[\frac{\partial \varphi_-}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \varphi_-)^2}{2} \right] \operatorname{arth} \left(2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \gamma \right) + \\ &+ \alpha \left[\frac{1}{\gamma} - 2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \operatorname{arth} \left(2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь выражение для L_+ получается при подстановке в (51) пробного решения (52), (53), а для L_- — пробного решения (52), (54).

Используя уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_{\pm}}{\partial (\partial \varphi_{\pm} / \partial z)} + \nabla_{\perp} \frac{\partial \Lambda_{\pm}}{\partial (\nabla_{\perp} \varphi_{\pm})} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_{\pm}}{\partial \gamma} = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\pm}}{\partial z} + \nabla_{\perp} (\rho_{\pm} \nabla_{\perp} \varphi_{\pm}) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \varphi_{\pm})^2}{2} - \frac{v_0 \alpha}{\gamma^2} &= 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \operatorname{arctg} \left(2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma \right), \\ \rho_- &= \operatorname{arth} \left(2\sqrt{\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|} \gamma \right). \end{aligned} \quad (57)$$

В одномерном случае ($\nabla_{\perp} = 0$) из (56), (57) имеем $\gamma = 1/\tau_p = \operatorname{const}$, $\varphi_{\pm}/v_0 = \alpha \tau_p^2 z$, что в точности соответствует решению (41)–(44). Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу применяемого здесь метода усредненного лагранжиана.

Система (56) формально схожа с системой уравнений движения идеальных жидкостей с «плотностями» ρ_+ и ρ_- , где роли «потенциалов скоростей» играют эйконалы φ_+ и φ_- . Отмеченная гидродинамическая аналогия позволяет установить качественный критерий характера распространения импульса с учетом саморефракции [41]. Сравнивая второе уравнение (56) с интегралом Коши для течения идеальной жидкости [49], получаем

$$-\frac{v_0 \alpha}{\gamma^2} = \int \frac{dP_{\pm}}{\rho_{\pm}},$$

где P_{\pm} — «давления» воображаемых жидкостей. Отсюда с учетом (57) находим

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{d\rho_+} &= 8\pi v_0 \beta \frac{\rho_+ \operatorname{ctg} \rho_+}{\sin^2 \rho_+}, \\ \frac{dP_-}{d\rho_-} &= -8\pi v_0 \beta \frac{\rho_- \operatorname{cth} \rho_-}{\operatorname{sh}^2 \rho_-}. \end{aligned} \quad (58)$$

При $dP_{\pm}/d\rho_{\pm} > 0$ имеет место случай «нормальной» идеальной жидкости, который в нашем случае соответствует дефокусировке солитона [41]. Ситуация $dP_{\pm}/d\rho_{\pm} < 0$ соответствует «газу Чаплыгина» [47], и имеет место самофокусировка солитона [41].

Легко видеть, что правые части обоих уравнений (58) положительны при $\alpha > 0$ и отрицательны при $\alpha < 0$. Таким образом, обобщая сказанное выше и учитывая выражение для α , приходим к выводу, что при равновесной начальной заселенности туннельных квантовых состояний среды ($W_\infty < 0$) имеет место дефокусировка «солитона», а в неравновесном случае ($W_\infty > 0$) — его самофокусировка. Данный вывод находит простое физическое обоснование. Действительно, согласно (44), при $\alpha > 0$ скорость распространения уменьшается с увеличением параметра τ_p , а следовательно, с уменьшением амплитуды «солитона» (см. (45)). В центре поперечного сечения импульса амплитуда больше, чем на его периферийных участках. Поэтому последние по мере распространения постепенно отстают от центра, что и приводит к дефокусировке. Аналогичное рассуждение показывает, что при $\alpha < 0$ периферийные участки обгоняют центральную часть импульса, приводя его к самофокусировке.

При дефокусировке в процессе распространения «солитона» параметр ρ_\pm уменьшается. Это, как видно из (57), сопровождается уменьшением γ , увеличением длительности и уменьшением амплитуды. В случае самофокусировки, напротив, значения ρ_\pm увеличиваются.

Если $\beta/\alpha < 0$ ($\beta > 0$ или $d_{31}^2/\omega_{31} < d_{42}^2/\omega_{42}$), то справедливо второе выражение (57). Из него видно, что с увеличением ρ_- значение γ неограниченно возрастает. Вместе с этим уменьшается до нуля длительность солитона и растет до бесконечности его амплитуда. Данная ситуация соответствует точке $\tau_p^* = 1$ на рис. 3б. Таким образом, при $d_{31}^2/\omega_{31} < d_{42}^2/\omega_{42}$ самофокусировка носит неограниченный характер.

Важные особенности, связанные с ограниченным характером самофокусировки, проявляются при $d_{31}^2/\omega_{31} > d_{42}^2/\omega_{42}$. В этом случае $\beta/\alpha > 0$ и справедливо первое выражение (57), из которого следует, что $\rho_+ \leq \pi/2$. Соответствующие этому особенности лучше выявить, основываясь на проделанном ниже количественном анализе системы (56), (57).

Будем считать импульс аксиально-симметричным с осью симметрии z . Тогда уравнения непрерывности (56) точно удовлетворяются при [50]

$$\begin{aligned} \rho_\pm &= \rho_\pm^{(0)} \frac{R_0^2}{R_\pm^2} F\left(\frac{r}{R_\pm}\right), \\ \varphi_\pm &= f_\pm + \frac{r^2}{2} \frac{d}{dz} (\ln R_\pm), \end{aligned} \quad (59)$$

где R_\pm, f_\pm — некоторые функции координаты z ; при этом R_\pm имеет смысл характерного поперечного ра-

диуса солитона, а df_\pm/dz — нелинейной добавки к обратной скорости $1/v_0$ на оси симметрии, где $r = 0$,

$$\rho_+^{(0)} = \arctg\left(\frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right), \quad \rho_-^{(0)} = \operatorname{arth}\left(\frac{2}{\tau_p} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

— значения ρ_+, ρ_- в центре «солитона» после его сформирования (при $z = 0$), r — радиальная координата цилиндрической системы, $F(r/R_\pm)$ — функция, определяющая распределение интенсивности солитона в его поперечных сечениях; конкретные виды зависимостей $R_\pm(z), f_\pm(z)$ и $F(r/R_\pm)$ находятся из второго уравнения (56).

Легко видеть, что второе слагаемое в правой части второго уравнения (59) характеризует искривление волновых фронтов «солитона» при его самореконструкции.

В случае солитона СГ ($\beta = 0$) имеем $\rho_+ = \rho_-$, $f_+ = f_-$, $R_+ = R_- = R$, а для F в работе [50] найдено точное решение:

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/R^2}}.$$

В теории самофокусировки как непрерывных пучков, так и импульсов хорошо зарекомендовало себя приосевое приближение $r^2/R_\pm^2 \ll 1$ [51, 52]. В соответствии с этим в нашем случае выражение для F представим в виде

$$F = 1 - \frac{r^2}{2R_\pm^2}. \quad (60)$$

Подстановка выражений (59) и (60) с учетом (57) в интегралы Коши (56) после приравнивания к нулю в приосевом приближении коэффициентов при нулевой и второй степенях r для случая $\beta/\alpha > 0$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_+}{dz^2} &= 8v_0\beta \frac{\rho_+^{(0)} R_0^2}{R_+^3} \frac{\operatorname{ctg}\left(\rho_+^{(0)} R_0^2/R_+^2\right)}{\sin^2\left(\rho_+^{(0)} R_0^2/R_+^2\right)}, \\ \frac{df_+}{dz} &= 4v_0\beta \operatorname{ctg}^2\left(\rho_+^{(0)} \frac{R_0^2}{R_+^2}\right), \end{aligned} \quad (61)$$

а для случая $\beta/\alpha < 0$ —

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_-}{dz^2} &= -8v_0\beta \frac{\rho_-^{(0)} R_0^2}{R_-^3} \frac{\operatorname{cth}\left(\rho_-^{(0)} R_0^2/R_-^2\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\rho_-^{(0)} R_0^2/R_-^2\right)}, \\ \frac{df_-}{dz} &= -4v_0\beta \operatorname{cth}^2\left(\rho_-^{(0)} \frac{R_0^2}{R_-^2}\right). \end{aligned} \quad (62)$$

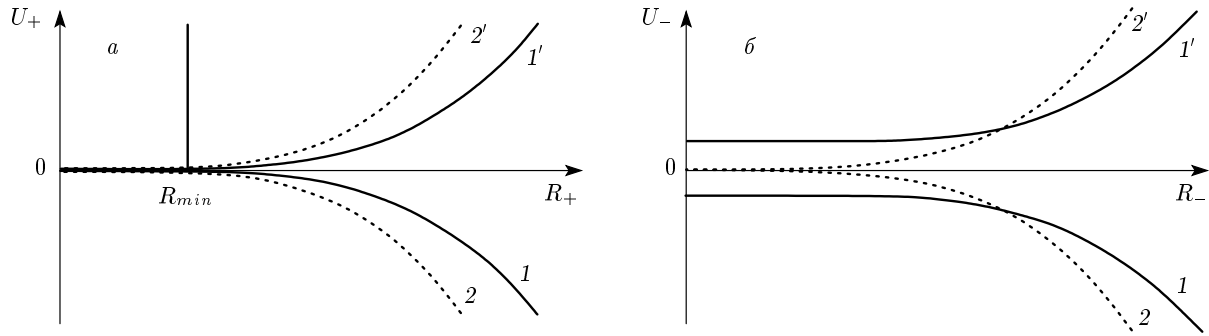


Рис. 5. «Потенциальные функции» U_+ (а) и U_- (б): сплошные кривые построены на основе выражений (64) ($\beta \neq 0$), пунктирные — на основе (65) ($\beta = 0$); кривые 1 и 2 соответствуют равновесным начальным заселенностям туннельных состояний ($\alpha > 0$), а кривые 1' и 2' — неравновесным заселенностям ($\alpha < 0$); вертикальная прямая, соответствующая $R_+ = R_{min}$ принадлежит «потенциальной функции» (64) как в равновесном, так и в неравновесном случае

Первые интегралы уравнений (61), (62) для R_{\pm} имеют вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_{\pm}}{dz} \right)^2 + U_{\pm} = E_{\pm}, \quad (63)$$

где E_{\pm} — постоянные интегрирования, а «потенциальные функции» U_{\pm} определяются выражениями

$$\begin{aligned} U_+ &= -2v_0\beta \operatorname{ctg}^2 \left(\rho_+^{(0)} \frac{R_0^2}{R_+^2} \right), \\ U_- &= 2v_0\beta \operatorname{cth}^2 \left(\rho_-^{(0)} \frac{R_0^2}{R_-^2} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Предел солитона СГ соответствует условию $\rho_+ \approx \rho_- \approx 2\gamma\sqrt{|\beta/\alpha|} \ll 1$ (см. (57)). В этом случае из (64) находим

$$U_+ \approx U_- \approx -\frac{v_0\alpha\tau_p^2}{2R_0^4} R^4. \quad (65)$$

Если считать, что в момент формирования солитона его волновые фронты являются плоскими (а это справедливо при условии (50)), то

$$E_+ = -2v_0\beta \operatorname{ctg}^2 \rho_+^{(0)}, \quad E_- = 2v_0\beta \operatorname{cth}^2 \rho_-^{(0)}.$$

Для «потенциальных функций» (65) имеем $E_+ = E_- = -v_0\alpha\tau_p^2/2$.

Из выражений (63) и (64) видно, что в общем случае для R_{\pm} имеем решения в квадратурах. Однако в явной аналитической форме эти решения представить невозможно. В пределе же СГ (см. (65)) имеем решение $R(z)$, выражающееся через эллиптические функции Якоби [50]. С другой стороны, наличия первых интегралов (63) вполне достаточно для анализа характеров саморефракции рассматриваемых солитонов.

На рис. 5 изображены зависимости «потенциальных функций», задаваемых выражениями (64) и (65), от R . Из данных выражений легко установить, по порядку величины, значения расстояний l_r , на которых становятся существенными эффекты саморефракции. Действительно, положив в (63) $dR_{\pm}/dz \sim R_0/l_r \sim U_{\pm} \sim E_{\pm}$, найдем с учетом (64) и (65)

$$l_r \sim \begin{cases} \frac{R_0}{t_p\sqrt{v_0|\alpha|}} & \text{при } \frac{1}{t_p^2} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \ll 1, \\ \frac{R_0}{\sqrt{v_0|\beta|}} & \text{при } \frac{1}{t_p^2} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \gg 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что дефокусировка в обоих рассматриваемых случаях носит взрывной характер, т. е. поперечное расплывание «солитона» по всему пространству происходит на конечных расстояниях z_d . Действительно, полагая в (64) $R_{\pm} \gg R_0$, приходим к (65). Отсюда и из (63) находим $R \sim (z_d - z)^{-1}$. Таким образом, при $z \rightarrow z_d$ апертура «солитона» стремится к бесконечности, что подтверждает взрывной характер дефокусировки.

Перейдем к рассмотрению процессов самофокусировки. Вначале рассмотрим случай $\beta/\alpha < 0$, или $\beta > 0$, так как при самофокусировке величина α отрицательна. Полагая в (64) $R \ll R_0$, найдем, что вблизи точки самофокусировки z_- радиус солитона

$$R_- = \frac{2\sqrt{v_0\beta}}{\operatorname{sh} \rho_-^{(0)}} (z_- - z).$$

Отсюда видно, что самофокусировка имеет относительно мягкий характер: производная dR_-/dz остается конечной в точке фокуса. После самофокуси-

ровки, как видно из (62), $df_-/dz = -4v_0\beta$. «Соли-тон», условно говоря, превращается в точку беско-нечной амплитуды, распространяющуюся со скоро-стью $v = v_0/(1 - 4\beta v_0)$.

Пусть теперь $\beta/\alpha > 0$. Тогда при самофокусиров-ке $\beta < 0$. Как следует из (57), $\rho_+ \leq \pi/2$. Тогда из первого выражения (59), а также из (60) получим

$$R_+ \geq R_{min} = R_0 \sqrt{\frac{2}{\pi} \rho_+^{(0)}} = R_0 \sqrt{\frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}. \quad (66)$$

При $R = R_{min}$ имеем «предельный солитон», одно-мерная структура которого рассмотрена в предыду-щем разделе. В этом случае из второго выражения (61) следует, что $df_+/dz = 0$. Следовательно, ско-рость «солитона» на его оси равна линейной скоро-сти v_0 . Как видно из выражения (66), смысл мини-мального поперечного радиуса «солитона» заключа-ется не в его абсолютном значении, а в его отноше-нии к начальному значению R_0 .

Для более детального описания продоль-но-поперечной динамики «предельного солитона» предположим, что его начальный радиус R_0 не сильно отличается от R_{min} . Тогда из (64) находим, что в окрестности R_{min}

$$U_+ = 2\pi^2 v_0 |\beta| \left(\frac{R - R_{min}}{R_{min}}\right)^2, \quad R \gtrsim R_{min}.$$

Следовательно,

$$R = R_{min} + (R_0 - R_{min}) |\cos \kappa z|, \quad (67)$$

где $\kappa = (2\pi/R_{min})\sqrt{v_0|\beta|}$.

Таким образом, поперечный радиус R «предель-ного солитона» по мере его распространения пульси-рует с пространственным периодом $R_{min}/2\sqrt{v_0|\beta|}$, находясь в интервале $R_{min} \leq R \leq R_0$. Как было сказано выше, в этом случае происходит ограниченная самофокусировка, сопровождаемая формированием пульсирующей терагерцевой пули конечных продольного и поперечного размеров. В точках фокусировки, соответствующих $\kappa z = \pi(m + 1/2)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, как следует из (67), производная dR_+/dz приобретает конечный скачок с переходом от отрицательного значения $-2\pi\sqrt{v_0|\beta|}(R_0/R_{min} - 1)$ (перед фокусом) к положительному значению $2\pi\sqrt{v_0|\beta|}(R_0/R_{min} - 1)$ (после фокуса). Это соответствует практически скачкообразному и периодическому (от фокуса к фокусу) изменению кривизны волновых фронтов «солитона» (см. второе выражение (59) и рис. 6).

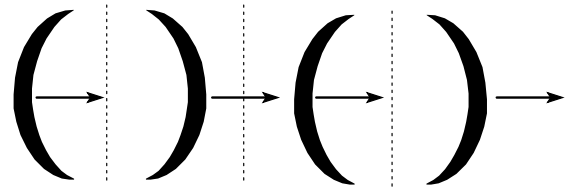


Рис. 6. Схематическое изображение периодиче-ской динамики формы «терагерцевой пули» в сечении плоскостью, параллельной направле-нию распространения. Вертикальные пунктирные прямые соответствуют моментам, где профиль «пули» в направлении распространения принимает вид «пре-дельного солитона» прямоугольной формы и мини-мальной длительности

В заключение настоящего раздела проведем чис-ленные оценки, в том числе подтверждающие вы-полнение условия (50). Полагая в (40) $\partial^2\theta/\partial z \partial \tau \sim \theta/l_{dis}t_p$ и приравнявая данное слагаемое по поряд-ку величины к

$$\left[\alpha - \beta \left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2\right] \sin\theta \sim |\alpha| + \frac{|\beta|}{t_p^2}$$

при $\theta \sim 1$, найдем

$$l_{dis} \sim \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|t_p} & \text{при } \frac{1}{t_p^2} \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \ll 1, \\ \frac{t_p}{|\beta|} & \text{при } \frac{1}{t_p^2} \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \gg 1. \end{cases}$$

Для определения дифракционной длины l_D прирав-няем первое слагаемое $\partial^2\theta/\partial z \partial \tau \sim \theta/l_D t_p$ в левой части уравнения (40) к правой части $(v_0/2)\Delta_\perp\theta \sim v_0\theta/R_0^2$ данного уравнения. Тогда $l_r \sim R_0^2/v_0 t_p$.

Из полученных оценочных выражений всех трех характерных длин находим следующее важное соот-ношение:

$$l_r \sim \sqrt{l_D l_{dis}}. \quad (68)$$

Таким образом, длина саморефракции по порядку величины есть среднее геометрическое дифракцион-ной и дисперсионной длин. Поэтому для выполне-ния условия (50) необходимо, чтобы $l_D \gg l_{dis}$. По-лагая, как и выше, $\omega_{21} \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $t_p \sim 10^{-13} \text{ с}$, а также $R_0 \sim 1 \text{ мм}$, имеем $l_{dis} \sim 10^{-3} \text{ см}$, $l_D \sim 10 \text{ см}$. Используя (68), найдем $l_r \sim 0.1 \text{ см}$. Итак, при вы-бранных параметрах среды и импульса приходим к выполнению условия (50) с хорошим запасом. Для продольного $l_{||}$ и поперечного R_{min} размеров рассмотренной выше «пули» имеем соответственно $l_{||} \sim v_0 t_p \sim 10^{-2} \text{ мм}$ и $R_{min} \sim R_0 \sim 1 \text{ мм}$. Таким об-разом, продольный размер «пули» на два порядка меньше поперечного.

Разумеется, рассмотренная «терагерцевая пуля» может сформироваться при условии, что характерное время саморелаксации $t_r = l_r/v_0$ много меньше времени релаксации T неравновесной населенности туннельных состояний, лежащего, например в кристаллах KDP, в широком диапазоне от 10^{-3} до 10^{-7} с [29, 31]. Согласно проделанным выше оценкам, в нашем случае $t_r \sim 10^{-11}$ с, что в любом случае значительно меньше T . Поэтому спонтанная релаксация неравновесной населенности туннельных состояний не может быть помехой в формировании рассмотренной здесь «терагерцевой пули».

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе предложена теоретическая модель среды, содержащей туннельные переходы и испытывающей нелинейное взаимодействие с импульсами широкополосного терагерцевого излучения. Особо подчеркнем, что для адекватного описания данного взаимодействия все изображенные на рис. 1 квантовые переходы важны. Как показано выше, они могут вносить во взаимодействие с импульсом соизмеримые между собой вклады. Поэтому обобщенное уравнение СГ (40) не следует рассматривать как некую поправочную модификацию уравнения СГ (39), где учитывается только туннельный переход $1 \leftrightarrow 2$. Именно поэтому найденные здесь солитоноподобные решения уравнения (40) могут кардинальным образом отличаться от солитонов СГ. Вопрос о том, являются эти решения солитонами в строгом смысле слова или нет, пока остается открытым и, видимо, представляет интерес. Ответ здесь может быть получен после всестороннего исследования математической структуры уравнения (40), для начала с равной нулю правой частью ($\Delta_{\perp} \theta = 0$). Самым важным в этой части остается вопрос интегрируемости уравнения (40).

В продолжение темы можно надеяться, что учет части $P^{(2)}$ поляризационного отклика в (38), определенный выражением (35), может привнести дополнительные особенности в солитоноподобную динамику терагерцевых ПКИ. Более того, с физической точки зрения данный учет, вообще говоря, необходим в случае «предельного солитона», длительность которого определена выражением (48) при $\beta/\alpha > 0$, а также для очень короткого «заостренного солитона», который формируется, если $\beta/\alpha < 0$.

Учет влияния поперечных возмущений на терагерцевые ПКИ проведен в настоящей работе в приближении геометрической оптики. Важным результатом здесь представляется обнаружение рас-

пространения импульса в режиме «терагерцевой пули» при неравновесной начальной заселенности туннельных состояний и при $\beta/\alpha > 0$. Такую населенность можно создать, например, предварительным воздействием на среду квазимонохроматического терагерцевого сигнала, резонансного переходу $1 \leftrightarrow 2$. Все известные до сих пор механизмы формирования «пуль» оптического диапазона не обходились без влияния дифракции, компенсирующей самофокусировку, происходящую за счет различных нелинейных процессов (см. [53], монографию [44] и цитируемую там литературу, а также обзор [54]). Рассмотренная здесь «терагерцевая пуля» формируется только за счет эффектов нелинейной рефракции в результате взаимной компенсации фокусирующей роли неравновесного перехода $1 \leftrightarrow 2$ и дефокусирующего влияния переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. В то же время учет дифракции может способствовать выявлению возможности формирования других объектов. В первую очередь, это, видимо, касается влияния поперечных возмущений на «заостренный солитон». Соответствующий учет в приближении геометрической оптики приводит в случае неравновесной населенности туннельных состояний к неограниченной самофокусировке «заостренного солитона». Здесь естественным образом возникает вопрос: способна ли дифракция остановить процесс самофокусировки и при каких условиях?

Кроме того, любопытным представляется вопрос об азимутальной устойчивости «терагерцевой пули». Что, например, произойдет, если отвлечься от аксиальной симметрии «солитонов» в их поперечных сечениях?

Роль дифракции по отношению к нелинейной рефракции возрастает с уменьшением концентрации квантовых центров среды, взаимодействующих с электромагнитным импульсом. Это понятно, так как рефракционная длина увеличивается с уменьшением данной концентрации, а дифракционная длина не зависит от нее. В первую очередь, это замечание может коснуться метаматериалов (квантовых точек, ям, нитей и т. д.), где соответствующая концентрация не может иметь таких больших значений, как в естественных природных материалах. В связи с возрастающей ролью исследования нелинейных оптических свойств метаматериалов следует ожидать роста аналогичного интереса к их физическим свойствам в терагерцевом диапазоне. В таком случае учет влияния дифракции может оказаться принципиально важным.

Не исключено, что использованная в настоящей работе теоретическая модель может быть адаптиро-

вана к модификации исследованных с помощью выражений (33)–(35) процессов переноса электронов и квазичастичных возбуждений в системе квантовых точек. Возможно эти процессы окажутся эффективными именно при воздействии широкополосных терагерцевых сигналов.

В свете изложенного выше возникает также вопрос об изучении нелинейной динамики широкополосных терагерцевых импульсов в системе не только туннельных, но и других степеней свободы среды, включая колебательные, вращательные и т. п. Колебательные степени свободы рассматривались, например, в работе [23], но лишь в линейном приближении. В этой связи представляет интерес построение простейшей, но универсальной, учитывающей все основные механизмы взаимодействия, теоретической модели нелинейного распространения широкополосных терагерцевых импульсов в диэлектрических средах.

Проведенное в настоящей работе исследование, стимулированное значительным в последние годы ростом эффективности генерации терагерцевого излучения и повышением его интенсивности, вызывает настоятельную необходимость развития «нелинейной терагерцевой оптики» как отдельной области работ по взаимодействию излучения с веществом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-00199а).

ЛИТЕРАТУРА

1. IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology **1**(2) (2011).
2. P. Y. Han and X.-C. Zhang, Meas. Sci. Tech. **12**, 1747 (2001).
3. B. Fergusson and X.-C. Zhang, Natures Materials **1**, 26 (2002).
4. П. Г. Крюков, *Фемтосекундные импульсы*, Физматлит, Москва (2008).
5. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
6. J. Hebling, G. Almasi, and I. Z. Cosma, Opt. Express **10**, 1161 (2002).
7. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **85**, 279 (2007).
8. А. Н. Тучак, Г. Н. Гольцман, Г. Х. Китаева и др., Письма в ЖЭТФ **96**, 97 (2012).
9. Д. А. Багдасарян, А. О. Макарян, П. С. Погосян, Письма в ЖЭТФ **37**, 498 (1983).
10. J. A. Fülöp, L. Pálfalvi, G. Almási, and J. Hebling, Opt. Express **18**, 12311 (2010).
11. M. I. Bakunov, S. B. Bodrov, and E. A. Mashkovich, J. Opt. Soc. Amer. B **28**, 1724 (2011).
12. J. A. Fülöp, L. Pálfalvi, M. C. Hoffmann, and J. Hebling, Opt. Express **19**, 15090 (2011).
13. H. Hirori, A. Doi, F. Blanchard, and K. Tanaka, Appl. Phys. Lett. **98**, 091106 (2011).
14. J. A. Fülöp, L. Pálfalvi, S. Klingebiel et al., Opt. Lett. **37**, 557 (2012).
15. A. G. Stepanov, S. Henin, Y. Petit et al., Appl. Phys. B **101**, 11 (2010).
16. M. I. Bakunov, S. B. Bodrov, and V. V. Tsarev, J. Appl. Phys. **104**, 073105 (2008).
17. A. N. Bugay and S. V. Sazonov, Phys. Lett. A **374**, 1093 (2010).
18. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **92**, 260 (2010).
19. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012).
20. M. Nagai, E. Matsubara, and M. Ashida, Opt. Express **20**, 6509 (2012).
21. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
22. У. А. Абдуллин, Г. А. Ляхов, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, ЖЭТФ **66**, 1295 (1974).
23. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **87**, 470 (2008).
24. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
25. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
26. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
27. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
28. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Основы оптики фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1978).
29. В. Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, Москва (1983).
30. Б. А. Струков, А. П. Леванюк, *Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах*, Наука, Москва (1995).

31. Р. Блинц, Б. Жекш, *Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики*, Мир, Москва (1975).
32. И. С. Осадько, *Флуктуирующая флуоресценция наночастиц*, Физматлит, Москва (2011).
33. А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **93**, 49 (2002).
34. S. A. Dubovis and A. M. Basharov, *Phys. Lett. A* **359**, 308 (2006).
35. А. М. Башаров, С. А. Дубовис, *ЖЭТФ* **128**, 476 (2006).
36. С. В. Сазонов, *ФТТ* **37**, 1626 (1995).
37. С. В. Нестеров, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **126**, 741 (2004).
38. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).
39. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущиповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
40. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **107**, 20 (1995).
41. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **119**, 419 (2001).
42. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123**, 1160 (2003).
43. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov et al., *Phys. Rev. A* **74**, 063815 (2006).
44. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005).
45. Л. А. Островский, В. И. Шрира, *ЖЭТФ* **71**, 1412 (1976).
46. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *ЖЭТФ* **92**, 1612 (1987).
47. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
48. M. Desaix, D. Anderson, and M. Lisak, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 2082 (1991).
49. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
50. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **144**, 1016 (2013).
51. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, *УФН* **93**, 19 (1967).
52. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, Москва (2001).
53. Y. Silberberg, *Opt. Lett.* **15**, 1282 (1990).
54. С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, *УФН* **183**, 133 (2013).