

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ МАКРОЧАСТИЦ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин*

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 2015 г.

Настоящая статья посвящена критическому обзору работ и изучению электростатического взаимодействия двух заряженных макрочастиц в равновесной плазме. Путем рассмотрения силы взаимодействия на основе тензора натяжений Максвелла показано, что в модели Пуассона – Больцмана две макрочастицы с одинаковыми зарядами всегда отталкиваются друг от друга как в изотермической, так и в неизотермической плазме. На тех расстояниях между макрочастицами, на которых возможна линеаризация больцмановских экспонент, взаимодействие между макрочастицами полностью описывается теорией Дебая – Хюккеля. Найдена связанная с электростатическим взаимодействием добавка к свободной энергии системы двух макрочастиц как путем интегрирования добавки к внутренней энергии, так и путем прямого вычисления добавки к энтропии. Показано, что свободная энергия совпадает с потенциалом Юкавы. Совпадение энергии взаимодействия, полученной интегрированием силы взаимодействия, со свободной энергией позволяет сделать вывод о потенциальном характере силы взаимодействия двух макрочастиц в равновесной плазме. Изучено влияние внешней границы на силу электростатического взаимодействия и показано, что характер взаимодействия зависит от выбора граничных условий на внешней границе. Также показано, что накопление объемного заряда вблизи внешней границы может приводить к притяжению двух одноименно заряженных частиц на расстояниях, сравнимых с радиусом внешней границы.

DOI: 10.7868/S0044451015110188

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1–5] на основе рассмотрения электростатической энергии системы двух макрочастиц в плазме по модели Пуассона – Больцмана был сделан вывод о возможности притяжения между одноименно заряженными макрочастицами. В модели Пуассона – Больцмана электроны и ионы полагаются распределенными по закону Больцмана в самосогласованном поле, которое само определяется уравнением Пуассона.

В работе [6] на основе анализа электростатического взаимодействия с использованием тензора натяжений Максвелла было показано, что в модели Пуассона – Больцмана две макрочастицы с одинаковыми зарядами всегда отталкиваются друг от друга как в изотермической, так и в неизотермической плазме. Игнатов путем рассмотрения взаимодействия с использованием уравнений Власова и усло-

вия зеркального отражения электронов и ионов от поверхностей макрочастиц (в этом случае функции распределения электронов и ионов по энергии оказываются равновесными везде) пришел к такому же выводу [7]. Аналогичный вывод о чисто отталкивательном характере взаимодействия двух одноименно заряженных макрочастиц сделан и в работе [8]. Несмотря на ясные выводы этих работ (см. также работы с аналогичным заключением [9–11]), в научной литературе регулярно появляются работы, в которых утверждается о возможности притяжения одноименно заряженных макрочастиц в равновесной плазме в рамках модели Пуассона – Больцмана (см., например, работы [12–14]). Поэтому настоящая работа посвящена критическому обзору работ и изучению электростатического взаимодействия двух заряженных макрочастиц в равновесной плазме в рамках модели Пуассона – Больцмана. (Мы здесь не касаемся вопроса об обоснованности модели Пуассона – Больцмана, отметим только, что физический смысл имеет только линеаризованная согласно [15] модель.)

*E-mail: fav@triniti.ru

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРА НАТЯЖЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В модели Пуассона–Больцмана распределения концентраций электронов и ионов в аксиально-симметричном случае рассматриваемой задачи описываются законом Больцмана:

$$\begin{aligned} n_e(r_z, z) &= n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi(r_z, z)}{T_e}\right), \\ n_i(r_z, z) &= n_{i0} \exp\left(-\frac{e\phi(r_z, z)}{T_i}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

причем из условия квазинейтральности и конечности зарядов макрочастиц следует, что $n_{e0} = n_{i0} \equiv n_0$ в случае бесконечной плазмы. Здесь $\phi(r_z, z)$ — потенциал электрического поля в точке пространства с цилиндрическими координатами r_z, z (см. рис. 1); n_{e0}, n_{i0} — концентрации электронов и ионов в невозмущенной плазме вдали от макрочастиц, где положено $\phi = 0$; T_e, T_i — температуры электронов и

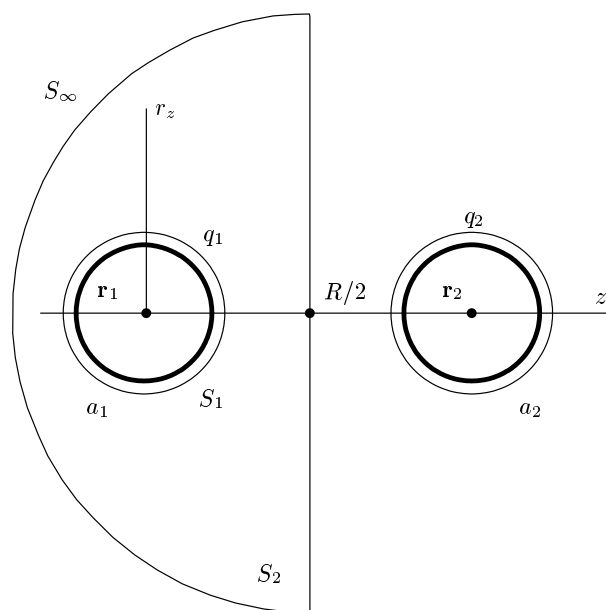


Рис. 1. Геометрия взаимодействия двух макрочастиц в неограниченной плазме: q_1, q_2 — заряды макрочастиц в элементарных зарядах, a_1, a_2 — их радиусы, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы центров макрочастиц, R — расстояние между центрами макрочастиц, r_z, z — координаты в цилиндрической системе координат, S_1 — поверхность, вплотную прилегающая к левой частице, S_2 — плоскость, проходящая через точку $z = R/2$ и перпендикулярная линии, соединяющей центры макрочастиц, S_∞ — полусфера бесконечного радиуса

ионов в энергетических единицах, e — элементарный заряд. Согласно (1), плотность объемного заряда ρ описывается выражением

$$\rho = en_0 \left[\exp\left(-\frac{e\phi}{T_i}\right) - \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) \right]. \quad (2)$$

Определим силу взаимодействия в плазме двух пылевых частиц одинакового размера, имеющих равные одноименные заряды. В принципе, форма частиц не имеет значения, важно только, чтобы они были зеркально симметричны относительно плоскости S_2 , перпендикулярной линии, соединяющей центры частиц и проходящей через точку $z = R/2$, где R — расстояние между пылевыми частицами (см. рис. 1). Полагаем, что газ покоится, поэтому в каждой точке вне макрочастиц выполнено равенство

$$\mathbf{f} = -\nabla P + \frac{(\epsilon_g - 1)}{8\pi} \nabla E^2 \equiv 0,$$

где \mathbf{f} — плотность объемных сил, действующих на газ, P — давление и ϵ_g — диэлектрическая проницаемость газа, E — напряженность электрического поля. Диэлектрическая проницаемость газа мало отличается от единицы, поэтому ниже везде положено, что диэлектрическая проницаемость среды равна единице. В этом случае при описании электростатических сил можно ограничиться рассмотрением тензора натяжений Максвелла [16].

Используя тензор натяжений Максвелла, для области, ограниченной с одной стороны поверхностью S_1 (см. рис. 1), вплотную прилегающей к левой частице, и поверхностью, образованной плоскостью S_2 и левой полусферой бесконечного радиуса S_∞ , имеем соотношение

$$\oint_{S_1} \mathbf{T}_n dS + \oint_{S_2+S_\infty} \mathbf{T}_n dS = \int_V \rho \mathbf{E} dV, \quad (3)$$

где T_n — нормальная (направленная вдоль внешней нормали) составляющая тензора натяжений Максвелла [16], ρ — плотность объемного заряда, объем V ограничен поверхностями S_1, S_2 и S_∞ . Сила, действующая на левую частицу, равна

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_1} \mathbf{T}_n dS. \quad (4)$$

Из (3), (4) находим

$$\mathbf{F} = \oint_{S_2+S_\infty} \mathbf{T}_n dS - \int_V \rho \mathbf{E} dV. \quad (5)$$

Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре первой макрочастицы (см. рис. 1) и осью z , направленной вдоль линии, соединяющей центры макрочастиц. Из симметрии задачи ясно, что может быть отличной от нуля только составляющая силы вдоль оси z . Поэтому второй член в правой части уравнения (5) можно представить в виде

$$F_{2,z} = - \int_V \varrho E_z dV. \quad (6)$$

В плоскости $z = R/2$ электрическое поле имеет только радиальную составляющую: $E_z(z = R/2) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \frac{E_z E_x}{4\pi} = 0, & T_{zy} &= \frac{E_z E_y}{4\pi} = 0, \\ T_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) = -\frac{E^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (7)$$

На полусфере бесконечного радиуса из квазинейтральности объема V следует равенство нулю интеграла от максвелловского натяжения. Следовательно, первый член в правой части уравнения (5) можно представить в виде

$$F_{1,z} = - \int_{S_2} \frac{E^2}{8\pi} dS = -\frac{1}{4} \int_0^\infty E_s^2 r_z dr_z, \quad (8)$$

где $E_s = E(r_z, z = R/2)$, r_z — радиальная координата в цилиндрической системе координат.

Из формулы (6) с учетом (2) после несложных преобразований и интегрирования по углам получаем

$$\begin{aligned} F_{2,z} &= -2\pi n_0 \int_0^\infty \left\{ T_i \left[\exp\left(-\frac{e\phi_s}{T_i}\right) - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + T_e \left[\exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) - 1 \right] + f_{add} \right\} r_z dr_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\phi_s = \phi(r_z, z = R/2)$, f_{add} — добавочный член, который возникает из-за конечного размера макрочастиц:

$$\begin{aligned} f_{add} &= T_i \left[\exp\left(-\frac{\phi_{L,r_z}}{T_i}\right) - \exp\left(-\frac{\phi_{R,r_z}}{T_i}\right) \right] + \\ &\quad + T_e \left[\exp\left(\frac{\phi_{L,r_z}}{T_e}\right) - \exp\left(\frac{\phi_{R,r_z}}{T_e}\right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где ϕ_{L,r_z} и ϕ_{R,r_z} — потенциалы в левой и правой половинах поверхности S_1 в цилиндрическом сечении радиусом r_z :

$$\phi_{L,r_z} = e\phi|_{r=a_1, \theta=\pi-\theta_{r_z}}, \quad \phi_{R,r_z} = e\phi|_{r=a_1, \theta=\theta_{r_z}},$$

$$\theta_{r_z} = \arcsin(r_z/a_1),$$

r и θ — координаты в сферической системе координат с началом в центре первой макрочастицы, a_1 — ее радиус. Для проводящих (в этом случае $\phi_{L,r_z} = \phi_{R,r_z}$) и точечных макрочастиц, а также в линейаризованном приближении Дебая–Хюккеля эта добавка равна нулю, но для диэлектрических макрочастиц при решении нелинейаризованной задачи может быть отлична от нуля. В случае равномерного распределения свободного заряда по поверхностям макрочастиц значение ϕ_{L,r_z} будет по абсолютной величине больше ϕ_{R,r_z} , поэтому добавочный член (10) будет положительным и после интегрирования по r_z даст силу отталкивания. В работах [1–5] рассматривались точечные макрочастицы, поэтому для условий этих работ точно выполняется равенство $f_{add} = 0$.

В изотермическом случае $T_e = T_i \equiv T$ из (8), (9) следует, что

$$\begin{aligned} F_z &= F_{1,z} + F_{2,z} = \\ &= - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{4} E_s^2 + 4\pi n_0 T \left[\operatorname{ch}\left(\frac{e\phi_s}{T}\right) - 1 \right] \right\} r_z dr_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Минимальное значение гиперболического косинуса равно единице, поэтому выражение в квадратных скобках и, соответственно, выражение в фигурных скобках в (11) всегда положительны (равны нулю только при равном нулю потенциале и поле в плоскости симметрии задачи, что возможно только при нулевых зарядах, но этот случай не представляет никакого интереса). Отсюда следует, что всегда, при любых расстояниях между частицами $F_z < 0$, т. е. одноименно заряженные пылевые частицы в плазме с бальцмановскими распределениями плотностей электронов и ионов всегда будут отталкиваться. Отметим, что аналогичное выражение (с учетом равенства нулю нейтрализующего фона на бесконечности) для силы было получено несколько иным способом в работе [7]. Также отметим, что отсутствие притяжения в равновесной плазме между двумя заряженными пластинами в одномерной плоской геометрии было доказано еще Дерягиным [17], а в работе [18] показано, что при любой однозначной и непрерывной зависимости плотности объемного заряда от потенциала (нелинейной и небальцмановской в общем случае) из условия суммарной нейтральности системы следует, что электростатическое взаимодействие двух бесконечных заряженных пластин, проицаемых для плазменных частиц, является отталкивательным.

Для случая неизотермической плазмы, разложив экспоненты в ряд Тейлора, из формул (8) и (9) получаем

$$F_z = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left\{ E_s^2 + 4\pi n_0 (e\phi_s)^2 \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e} \right) - \frac{8\pi}{3!} n_0 (e\phi_s)^3 \left(\frac{1}{T_i^2} - \frac{1}{T_e^2} \right) + \dots \right\} r_z dr_z. \quad (12)$$

Отсюда видно, что в случае $T_e > T_i$ и отрицательного потенциала ϕ_s (т.е. при отрицательных зарядах макрочастиц), члены с нечетными степенями ϕ_s оказываются положительными, как и члены с четными степенями. Поэтому одноименно заряженные пылевые частицы будут отталкиваться и в неизотермической плазме.

При выполнении условия $|e\phi_s/T| \ll 1$ силу можно вычислить аналитически. В этом случае из (11) и (12) можно легко получить

$$F_z = -\frac{1}{4} \int_0^\infty (E_s^2 + k_D^2 \phi_s^2) r_z dr_z, \quad (13)$$

где k_D — постоянная экранирования,

$$k_D^2 = 4\pi e^2 \left(\frac{n_{i0}}{T_i} + \frac{n_{e0}}{T_e} \right).$$

Далее положим, что микрочастицы точечны. Уравнения Пуассона для самосогласованного поля каждой макрочастицы,

$$\Delta\phi = -4\pi e (n_i - n_e) - eq_i \delta(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

при выполнении условия $|e\phi_s/T| \ll 1$ имеют широко известное решение Дебая – Хюккеля [15]:

$$\phi_i = \frac{eq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \exp(-k_D |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|). \quad (15)$$

Здесь ϕ_1 и ϕ_2 — распределения потенциала систем зарядов, связанных соответственно с первой и второй макрочастицами (включая их заряды), $\delta(\mathbf{r}_i)$ — дельта-функция, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, задающий положение i -го заряда (напомним, что для упрощения выкладок в этом разделе мы рассматриваем одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q$). В цилиндрической системе координат потенциал и радиальная составляющая электрического поля в плоскости симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{2eq}{u} \exp(-k_D u), \\ E_s &= \frac{2eqr_z (1 + k_D u)}{u^3} \exp(-k_D u), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$u = \sqrt{r_z^2 + \frac{1}{4}R^2}.$$

Подставив (16) в (13) и интегрируя, находим

$$F_z = -\frac{e^2 q^2}{R^2} (1 + k_D R) \exp(-k_D R). \quad (17)$$

Из (17), интегрируя соотношение $F_z = -\nabla U$ с учетом того, что энергия взаимодействия при $R = \infty$ равна нулю, для электростатической энергии взаимодействия двух макрочастиц получаем

$$U = \frac{e^2 q^2}{R} \exp(-k_D R). \quad (18)$$

Из вида выражений (17), (18) можно сделать вывод, что сила и потенциал взаимодействия двух макрочастиц описывается потенциалом Юкавы и имеет место только отталкивание одноименно заряженных макрочастиц. К последнему выводу пришли и авторы работ [9–11] при рассмотрении электростатического взаимодействия в модели Пуассона – Больцмана двух макроионов в ограниченном стенками электролите.

Здесь нужно отметить, что в случае одноименно заряженных макрочастиц разного радиуса между ними возможно притяжение (см., например, [19] и цитированную там литературу). Область проявления данного эффекта лежит на межчастичных расстояниях, когда зазор между поверхностями макрочастиц составляет менее 1% от их суммарного радиуса [19–22]. На таких расстояниях в пылевой плазме обычно можно пренебречь эффектами экранирования и для определения силы взаимодействия воспользоваться результатами указанных работ.

Для равновесной пылевой плазмы, если выполнены неравенства

$$R > a_1 \left(1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right), \quad R > a_2 \left(1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \right), \quad (19)$$

во внутренней области между макрочастицами имеется поверхность S_0 , на которой z -составляющая поля обращается в нуль. В этом случае выражение для $F_{1,z}$ будет аналогичным (8):

$$F_{1,z} = -\frac{1}{4} \int_0^\infty E_{s0}^2 r_z dr_z, \quad (20)$$

где теперь E_{s0} — перпендикулярная оси z составляющая поля на поверхности S_0 . В итоге, из (11) для модели Пуассона – Больцмана получаем

$$F_z = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left(E_{s0}^2 + 8\pi n_0 \left\{ T_i \left[\exp\left(-\frac{e\phi_s}{T_i}\right) - 1 \right] + T_e \left[\exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) - 1 \right] \right\} \right) r_z dr_z, \quad (21)$$

где ϕ_s — потенциал электрического поля на поверхности S_0 . Подынтегральное выражение в (21) неотрицательно, поэтому при выполнении условий (19) между одноименно заряженными макрочастицами притяжение будет отсутствовать (отметим, что нарушение этих условий еще не гарантирует появления притяжения). Для одинаковых частиц с равными зарядами уже из соображений симметрии ясно, что эти условия будут выполнены всегда, поэтому между ними притяжения не будет ни при каких межчастичных расстояниях. Вопрос о влиянии размера частиц на силу взаимодействия более подробно рассмотрен в работах [19–22].

3. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

К неправильному выводу о наличии электростатического притяжения между двумя макрочастицами авторов работ [1–5] привело то, что для определения силы ими использовалась внутренняя энергия. Известно [23], что в системе с постоянным числом частиц N внутренняя энергия является термодинамическим потенциалом по отношению к переменным S и V (энтропии и объему), в то время как свободная энергия — термодинамическим потенциалом по отношению к переменным T и V (температуре и объему). Поэтому при определении силы в изотермической плазме при постоянных V и N нужно пользоваться свободной энергией [23].

Определим свободную энергию системы двух макрочастиц в бесконечной плазме [6]. В работах [1–5, 24] для зависящей от расстояния между макрочастицами части внутренней энергии получено выражение

$$\mathcal{E}(R) = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} \left(1 - \frac{1}{2} k_D R \right) \exp(-k_D R), \quad (22)$$

где q_1, q_2 — заряды макрочастиц. Свободная и внутренняя энергии связаны известным термодинамическим тождеством [23]:

$$\mathcal{F} = T \int_T^\infty \left(\frac{\mathcal{E}}{T^2} \right)_{V,N} dT, \quad (23)$$

где интеграл берется при постоянном объеме V и постоянном числе электронов и ионов N , т. е. при их постоянных плотностях n_0 . Поэтому в (23) от температуры зависит только постоянная экранирования:

$$k_D = \left(\frac{8\pi e^2 n_0}{T} \right)^{1/2} \equiv aT^{-1/2},$$

где a — независимая от температуры величина. После подстановки (22) в (23) и интегрирования по частям находим, что

$$\mathcal{F} = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} \exp(-k_D R). \quad (24)$$

Это выражение в случае одинаковых зарядов совпадает с (18), что позволяет сделать вывод о потенциальном характере силы взаимодействия двух макрочастиц в равновесной плазме. Также мы можем сделать окончательный вывод, что в модели Пуассона–Больцмана между двумя точечными одноименно заряженными частицами электростатическое притяжение отсутствует при любых условиях.

4. ЭНТРОПИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ МАКРОЧАСТИЦ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Чтобы окончательно прояснить вопрос, вычислим энтропию электронов и ионов рассматриваемой системы, которая для идеального газа электронов и ионов определяется выражением [23]

$$S = S_e + S_i = - \sum_{\sigma=e,i} \int n_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) [\ln n_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - 1] \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (25)$$

где $n_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функции распределения электронов и ионов, имеющие в равновесной плазме вид

$$n_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \exp\left(\frac{\mu_\sigma - \varepsilon_\sigma}{T}\right), \quad (26)$$

μ_σ — химический потенциал, ε_σ — полная энергия,

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_\sigma} + e_\sigma \phi(\mathbf{r}).$$

Химический потенциал найдем из условия нормировки

$$N_\sigma = \int n_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (27)$$

где N_σ — полное число частиц σ -компоненты плазмы в системе. Получаем

$$\mu_\sigma = T \ln \left(\frac{\vartheta_{0\sigma} N_\sigma}{\int \exp(-e_\sigma \phi / T) d\mathbf{r}} \right), \quad (28)$$

где $\vartheta_{0\sigma} = (2\pi\hbar^2/m_\sigma T)^{3/2}$. Для невозмущенной плазмы ($\phi = 0$) находим

$$S_{0\sigma} = -N [\ln(\vartheta_{0\sigma} n_0) - 5/2]. \quad (29)$$

Для поправки к энтропии, связанной с электростатическим взаимодействием, теперь имеем

$$\begin{aligned} \Delta S_\sigma &= S - S_{0\sigma} = \\ &= N_\sigma \left[\ln \left(\frac{1}{V} \int \exp \left(-\frac{e_\sigma \phi}{T} \right) d\mathbf{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int \frac{e_\sigma \phi}{T} \exp \left(-\frac{e_\sigma \phi}{T} \right) d\mathbf{r}}{\int \exp(-e_\sigma \phi / T) d\mathbf{r}} \right], \quad (30) \end{aligned}$$

где V — объем системы. При выполнении условия $|e\phi_{1,2}/T| \ll 1$ экранированный потенциал описывается решением (15). Обратим особое внимание на то, что это решение найдено в линейном приближении отношений $e\phi_{1,2}/T$, поэтому при разложении членов

$$\exp \left(-\frac{e_\sigma \phi}{T} \right) = \exp \left(-\frac{e_\sigma \phi_1}{T} \right) \exp(-e_\sigma \phi_2 / T)$$

в (30) мы должны удерживать только линейные члены. В этом случае из (30) для зависящей от межчастичного расстояния части изменения энтропии находим

$$\begin{aligned} \Delta S_\sigma(R) &= -\frac{e^2 n_0}{T^2} \int \phi_1 \phi_2 d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{k_D}{T} \exp(-k_D R). \quad (31) \end{aligned}$$

Окончательно для поправки к энтропии имеем

$$\begin{aligned} \Delta S(R) &= \Delta S_e(R) + \Delta S_i(R) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{k_D}{T} \exp(-k_D R). \quad (32) \end{aligned}$$

Теперь, после подстановки (22) и (32) в термодинамическое равенство [23]

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS, \quad (33)$$

получается выражение

$$U = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} \exp(-k_D R), \quad (34)$$

в точности совпадающее с (18) в случае равных зарядов. Это показывает, что найденный в ряде работ минимум в зависимости электростатической энергии системы двух заряженных макрочастиц в плазме от межчастичного расстояния возникает за счет изменения энтропии системы вследствие обмена энергией с термостатом.

5. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ

В работах [25, 26] численно определялась энергия электрического поля двух заряженных макрочастиц в неравновесной плазме и был обнаружен минимум в зависимости этой энергии от межчастичного расстояния. На основе этого наблюдения делался ошибочный вывод о притяжении одноименно заряженных макрочастиц. В работе [24] вычислены энергия электрического поля и сила взаимодействия на основе тензора натяжений Максвелла двух одноименно заряженных макрочастиц в неравновесной плазме, создаваемой внешним источником ионизации газа. Показано, что энергия электрического поля имеет минимум как функция межчастичного расстояния, но при этом нет никакого притяжения между одноименно заряженными макрочастицами в полном соответствии с изложенным выше.

В работе [14] также обнаружен эффект притяжения одноименно заряженных макрочастиц, но при этом область расстояний, в которой проявлялся этот эффект, лежал в области, много меньшей дебаевского радиуса. В этой области взаимодействие двух частиц близко к кулоновскому и никакого эффекта притяжения без учета эффектов поляризации поверхностного заряда (см., например, [19–22]), которые в [14] не учитывались, не должно наблюдаться. Также отметим, что в работе [14] рассматривается сферически-симметричная задача. В этом случае и распределение объемного заряда будет сферически-симметричным. Следовательно, действующая на макрочастицу сила после интегрирования по пространственному распределению объемного заряда окажется равной нулю.

На наш взгляд, вывод об эффекте притяжения в работе [14] базируется на ошибке при вычислении свободной энергии. В модели Пуассона–Больцмана распределения электронов и ионов подчиняются закону Больцмана (1), при этом в случае конечной ячейки мы не можем просто положить $n_{e0} = n_{i0}$ — выполнение этого равенства зависит от выбора по-

стоянной составляющей потенциала, так как $\phi = 0$ там, где $n_e = n_{e0}$ и $n_i = n_{i0}$. В случае бесконечной расчетной ячейки не возникает никаких проблем с выбором постоянной составляющей потенциала ϕ_C , так как в этом случае после выбора $\phi = 0$ при $r = \infty$ из условия квазинейтральности следует $n_{e0} = n_{i0}$ и $\phi_C = 0$. Если положить $\phi = 0$ на внешней границе в случае конечной ячейки, то в общем случае будет выполнено неравенство $n_{e0} \neq n_{i0}$ (например, если внешнюю границу выбрать достаточно близко, то в случае отрицательных зарядов макрочастиц будет выполнено условие $n_{e0} \ll n_{i0}$) и при линейризации распределений Больцмана в правой части уравнения Пуассона (39) появится дополнительный постоянный член, равный $4\pi e (n_{e0} - n_{i0})$. Чтобы компенсировать этот член, в потенциале появится постоянная составляющая, равная

$$\phi_C = 4\pi e k_D^{-2} (n_{i0} - n_{e0}),$$

т. е. для нахождения плотности объемного заряда в принципе можно просто положить $\phi_C = 0$.

В работе [14] положено, что $n_{e0} = n_{i0} + \Delta_0$, а величину Δ_0 авторы определяли из условия

$$\Delta_0 = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{1}{2}R\right)^3 - \alpha r_0^3 \right]}, \quad (35)$$

где R — расстояние между соседними частицами, Z — заряд макрочастиц в элементарных зарядах, $\alpha \leq 1$ — коэффициент заполнения трехмерного пространства сферами радиуса r_0 , зависящий от типа кристаллической решетки, которую формируют макрочастицы. Далее авторы определяли энергию электрического поля и, используя формулу (23), находили свободную энергию (которую также называют свободной энергией Гельмгольца). Зависимость свободной энергии Гельмгольца от R имела минимум, поэтому авторы сделали вывод о наличии притяжения. Как видно из (35), как концентрация электронов $n_{e0} = n_{i0} + \Delta_0$, так и объем системы $V = \pi R^3/6$ в работе [14] зависели от расстояния между частицами, поэтому нельзя пользоваться формулой (23) для нахождения свободной энергии Гельмгольца [23].

В [14] утверждается, что в работах [6, 9] отсутствие притяжения доказано только для неэлектронейтральных систем. Неверность этого утверждения легко показать, проинтегрировав объемный заряд в сферической системе координат с полюсом в центре рассматриваемой частицы. Для объемного заряда, связанного с i -й макрочастицей, используя (15), находим

$$\begin{aligned} Q_i &= - \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k_D^2}{4\pi e} \phi_i r_i^2 dr d\theta_i d\varphi_i = \\ &= - \int_0^\infty \frac{q_i}{r_i} \exp(-k_D r_i) k_D^2 r_i^2 dr_i = \\ &= -q_i \int_0^\infty \exp(-\tilde{r}_i) \tilde{r}_i d\tilde{r}_i = -q_i, \quad (36) \end{aligned}$$

т. е. каждая система зарядов квазинейтральна.

В работе [13] взаимодействие двух макрочастиц рассмотрено с приближенным учетом эффектов поляризации поверхностного заряда, при этом притяжение появлялось на расстояниях, сравнимых с дебаевским радиусом экранирования R_D . К сожалению, в работе [13] не указаны размеры макрочастиц, а переменная R , которая в начале использовалась для обозначения радиуса макрочастиц, в разделе с обсуждением результатов уже является безразмерным расстоянием. Если размеры макрочастиц были заметно меньше дебаевского радиуса, то эффекты поляризации не могут привести к появлению эффекта притяжения на расстояниях порядка R_D (см. [19–22]). В работе [13] говорится, что в [6] пренебрегалось зависимостью статической продольной диэлектрической функции $\epsilon_L(k, 0)$ от волнового вектора k . На самом деле в работе [6] взаимодействие рассматривалось без привлечения диэлектрической функции плазмы, связанной с экранированием плазмой любого электростатического поля. В этой работе пренебрегалось статической продольной диэлектрической функцией плазмы, связанной со столкновениями электронов и ионов, которая равна нулю (см. [27], с. 87). Если взаимодействие двух макрочастиц рассматривать с использованием функции $\epsilon_L(k, 0)$, то в дебаевском приближении [27, 28]

$$\epsilon_L(k, 0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2} \quad (37)$$

и для фурье-образа потенциала взаимодействия имеем

$$U(k) = \frac{4\pi e^2 q_1 q_2}{k^2} \frac{1}{\epsilon_L(k, 0)} = \frac{4\pi e^2 q_1 q_2}{k^2 + k_D^2}. \quad (38)$$

Здесь $4\pi e^2 q_1 q_2 / k^2$ — фурье-образ кулоновского потенциала взаимодействия макрочастиц. После обратного преобразования (38) для потенциала взаимодействия получим выражение (34).

В работах [29, 30] сила электростатического взаимодействия двух макрочастиц вычислялась на основе данных численных расчетов с использованием

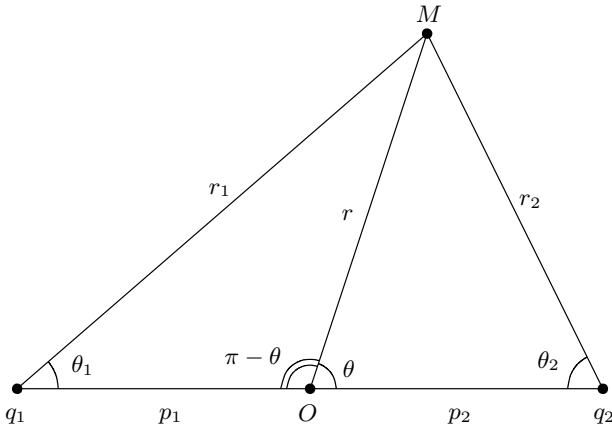


Рис. 2. Геометрия взаимодействия двух точечных макрочастиц: r_i, θ_i ($i = 1, 2$) — радиусы и полярные углы в сферической системе координат с полюсом в центре i -й макрочастицы и осью, направленной к центру другой макрочастицы, $R = p_1 + p_2$ — межчастичное расстояние (в случае одинаковых зарядов $p_1 = p_2 = R/2$), q_1, q_2 — заряды макрочастиц, r, θ — координаты в сферической системе координат с центром в точке O и осью, направленной к центру второй макрочастицы

тензора натяжений Максвелла и было обнаружено притяжение двух одноименно заряженных макрочастиц. Расчеты велись для конечной области с внешней границей. Чтобы установить характер влияния внешней границы на силу взаимодействия двух заряженных макрочастиц в равновесной плазме рассмотрим макрочастицы малого радиуса, для которых $k_D a_1 \ll 1, k_D a_2 \ll 1$.

Геометрия взаимодействия в сферической системе координат показана на рис. 2. Мы рассматриваем взаимодействие двух макрочастиц, окруженных другими такими же макрочастицами. Влияние других макрочастиц в нашей модели учитывается через граничные условия как и в модели Вигнера–Зейтца при рассмотрении, например, зарядки одной макрочастицы. В нашей модели в качестве внешней границы выбрана сфера, хотя, возможно, более правильным был бы выбор эллипсоида вращения (см., например, [29]). Расчеты показывают (см. ниже), что влияние внешней границы оказывается наибольшим вдоль линии, соединяющей центры макрочастиц и существенно меньшим в перпендикулярном этой линии направлении. Поэтому замена эллипсоида вращения сферой является вполне оправданной.

Самосогласованный потенциал макрочастиц и плазмы будем искать на основе линеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана (14). Будем искать

решение в конечной области, в качестве внешней границы которой возьмем сферу с центром в точке O и радиусом R_b . Мы здесь не будем интересоваться эффектами, связанными с размерами частиц, поэтому везде ниже будет подразумеваться переход $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 0$.

Распределение потенциала будем искать на основе линеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана:

$$\Delta\phi - k_D^2\phi = 0. \tag{39}$$

На систему наложим граничные условия:

$$\left. \frac{\partial\phi_1(r_1, \theta_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=a_1} = -\frac{eq_1}{a_1^2},$$

$$\left. \frac{\partial\phi_2(r_2, \theta_2)}{\partial r_2} \right|_{r_2=a_2} = -\frac{eq_2}{a_2^2}, \tag{40}$$

и на внешней границе условие, которое использовалось в работе [29]:

$$\left. \frac{\partial\phi(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R_b} = 0. \tag{41}$$

Условие (41) обеспечивает квазинейтральность рассматриваемой области.

Ввиду линейности рассматриваемой задачи потенциал представим в виде суперпозиции трех членов:

$$\phi(r, \theta) = \phi_1(r_1) + \phi_2(r_2) + \phi_3(r, \theta), \tag{42}$$

где ϕ_1 — экранированный потенциал первой частицы, который обеспечивает выполнение первого граничного условия (40), ϕ_2 — экранированный потенциал второй частицы, который обеспечивает выполнение второго граничного условия (40), ϕ_3 — потенциал объемных зарядов, который обеспечивает выполнение внешнего граничного условия (41). С учетом цилиндрической симметрии задачи (39) и граничных условий (40) составляющие решения (42) можно записать в виде [31]

$$\phi_1(r_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{K_{n+1/2}(k_D r_1)}{\sqrt{k_D r_1}},$$

$$\phi_2(r_2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{K_{n+1/2}(k_D r_2)}{\sqrt{k_D r_2}}, \tag{43}$$

$$\phi_3(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{I_{n+1/2}(k_D r)}{\sqrt{k_D r}} P_n(\mu),$$

где $I_{n+1/2}, K_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода [32], P_n — полиномы Лежандра. При малых значениях аргумента

модифицированные функции Бесселя третьего рода определяются выражениями [32]

$$K_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{(2n-1)!!}{z^n}, \quad (44)$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ (отметим, что при $n=0$ по определению $(2n-1)!! = 1$). Следовательно, при малых $z \ll 1$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{K_{n+1/2}(z)}{z^{1/2}} \right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(n+1)(2n-1)!!}{z^{n+2}}. \quad (45)$$

Поэтому из граничных условий (40) следует, что при малых r_i ($i=1, 2$) поле должно совпадать с полем точечного заряда $E_i = eq_i/r_i^2$, поэтому величины A_n и B_n для всех $n \geq 1$ должны быть равными нулю, а коэффициенты для $n=0$ определены соотношениями

$$A_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} eq_1 k_D, \quad B_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} eq_2 k_D. \quad (46)$$

Используем формулу сложения Гегенбауэра [32], которая для геометрии углов, приведенной на рис. 2, дает

$$\frac{K_{1/2}(\tilde{r}_i)}{\tilde{r}_i^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{im} (2m+1) \times \\ \times \frac{K_{m+1/2}(u_i)}{u_i^{1/2}} \frac{I_{m+1/2}(v_i)}{v_i^{1/2}} P_m(\mu), \quad (47)$$

где $i=1, 2$, $u_i = \max(\tilde{r}, \tilde{p}_i)$, $v_i = \min(\tilde{r}, \tilde{p}_i)$, $\tilde{r} = k_D r$, $\tilde{p}_i = k_D p_i$. Тогда решение (42) можно представить в виде (для $r > \max(p_1, p_2)$)

$$\phi(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1) \left[(-1)^n A_0 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_0 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r})}{\tilde{r}^{1/2}} + C_n \frac{I_{n+1/2}(\tilde{r})}{\tilde{r}^{1/2}} \right\} \times \\ \times P_n(\mu). \quad (48)$$

Теперь из граничного условия (42), используя явные выражения (46) для коэффициентов A_0 и B_0 , находим

$$C_n = ek_D \beta_n \left[(-1)^n q_1 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + \right. \\ \left. + q_2 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right], \quad (49)$$

где $(\tilde{R}_b = k_D R_b)$

$$\beta_n = (2n+1) \frac{\tilde{R}_b K_{n+3/2}(\tilde{R}_b) - n K_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}{\tilde{R}_b I_{n+3/2}(\tilde{R}_b) + n I_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}. \quad (50)$$

Из формулы (49) видно, что в случае двух одинаковых зарядов $q_1 = q_2$ благодаря симметрии задачи $p_1 = p_2$ и все коэффициенты с нечетными номерами обращаются в нуль.

В случае, когда размерами частиц можно пренебречь, силы, действующие на первую и вторую макрочастицы, определяются напряженностями электрического поля в точках нахождения этих макрочастиц. Отметим, что формула сложения Гегенбауэра (47) не позволяет посчитать потенциалы (и, соответственно, напряженности поля) ϕ_1 при $r = p_1$ и ϕ_2 при $r = p_2$ с нужной точностью, поэтому силы взаимодействия определим следующим образом:

$$F_{12}(R) = -eq_1 \left[\left. \frac{\partial \phi_2(r_2)}{\partial r_2} \right|_{r_2=R} + \right. \\ \left. + \left. \frac{\partial \phi_3(r, \mu)}{\partial r} \right|_{\substack{r=p_1 \\ \mu=-1}} \right], \quad (51)$$

$$F_{21}(R) \equiv -eq_2 \left[\left. \frac{\partial \phi_1(r_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=R} + \right. \\ \left. + \left. \frac{\partial \phi_3(r, \mu)}{\partial r} \right|_{\substack{r=p_2 \\ \mu=1}} \right].$$

Здесь принято во внимание, что согласно граничным условиям (40) электрическое поле от потенциала ϕ_i ($i=1, 2$) после вычета кулоновского поля i -й макрочастицы в точке нахождения этой макрочастицы обратится в нуль. Выражения (51) после подстановки (48) приобретают вид

$$F_{12}(R) = eq_1 k_D \left\{ B_0 \frac{K_{3/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \left[\frac{I_{n+3/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n}{\tilde{p}_1} \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} \right] \right\}, \quad (52)$$

$$F_{21}(R) = eq_2 k_D \left\{ A_0 \frac{K_{3/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[\frac{I_{n+3/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} + \frac{n}{\tilde{p}_2} \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] \right\}.$$

Используя явные выражения для коэффициентов A_0, B_0, C_n и функции $K_{3/2}$, из (52) получим:

$$\begin{aligned}
 F_{12}(R) = & \frac{e^2 q_1 q_2}{R^2} (1 + k_D R) \exp(-k_D R) - \\
 & - e^2 k_D^2 q_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} \frac{1}{\tilde{p}_1^{1/2}} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\partial \tilde{p}_1} - \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{2\tilde{p}_1} \right] - \\
 & - e^2 k_D^2 q_1 q_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \frac{1}{\tilde{p}_1^{1/2}} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\partial \tilde{p}_1} - \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{2\tilde{p}_1} \right], \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{21}(R) = & \frac{e^2 q_1 q_2}{R^2} (1 + k_D R) \exp(-k_D R) - \\
 & - e^2 k_D^2 q_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \frac{1}{\tilde{p}_2^{1/2}} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\partial \tilde{p}_2} - \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{2\tilde{p}_2} \right] - \\
 & - e^2 k_D^2 q_1 q_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} \frac{1}{\tilde{p}_2^{1/2}} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\partial \tilde{p}_2} - \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{2\tilde{p}_2} \right]. \quad (54)
 \end{aligned}$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3 представлены зависимости силы взаимодействия двух макрочастиц с одинаковыми зарядами (дебаевская зависимость определяется первым членом в правых частях выражений (53) и (54)). (В настоящей работе сила определяется в сферической системе координат, полюс которой находится между макрочастицами, поэтому сила отталкивания положительна, а сила притяжения отрицательна для обеих макрочастиц.) Видно, что на малых расстояниях сила взаимодействия хорошо описывается дебаевской зависимостью, а по мере увеличения межчастичного расстояния и приближения макрочастиц к внешней границе отталкивание переходит в притяжение двух одноименно заряженных частиц. Отметим, что это происходит при $R < R_b$, т. е. еще когда расстояние до внешней границы от ближайшей макрочастицы превышает половину межчастичного расстояния.

На рис. 4 представлены графики зависимости мультипольных составляющих силы взаимодействия от межчастичного расстояния, связанных с

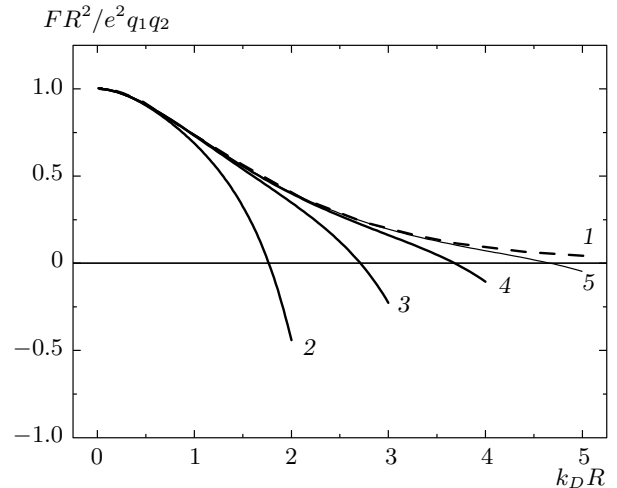


Рис. 3. Сила взаимодействия двух точечных макрочастиц с одинаковыми зарядами $q_1 = q_2$ как функция межчастичного расстояния. Дебаевская зависимость (кривая 1), полная сила при $R_b k_D = 2$ (2), 3 (3), 4 (4), 5 (5)

объемными зарядами, обеспечивающими квазинейтральность расчетной ячейки. Видно, что уже для $n = 6$ вклад в полную силу при $R \leq R_b$ оказывается пренебрежимо малым.

На рис. 5 показано, как зависит от межчастичного расстояния сила взаимодействия в случае разных зарядов ($q_2 = 2q_1$) при $p_1 = p_2 = R/2$. Видно, что силы, действующие на первую и вторую макрочастицы, оказываются разными. В работе [30] также было получено неравенство сил. В этой работе сила переопределялась следующим образом:

$$F = \frac{F_{21} m_1 - F_{12} m_2}{m_1 + m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы макрочастиц. В случае двух макрочастиц одинаковой массы и одинакового заряда эта формула дает правильное выражение для силы взаимодействия. Вообще, в однородном внешнем поле E_0 выполнено равенство $F_{12} + F_{21} = (q_1 + q_2) E_0$, т. е. «чистую» силу взаимодействия надо определять как $F_{12}^* = F_{12} - q_1 E$ и $F_{21}^* = F_{21} - q_2 E$. В этом случае в системе, на которую не действуют внешние силы, должно быть $F_{12}^* = -F_{21}^*$.

Неравенство сил на рис. 5 (возможно, и в работе [30]) связано со следующим обстоятельством. В случае разных зарядов мы не можем полагать $p_1 = p_2$, так как неравенство зарядов нарушает пространственную симметрию задачи. Как видно из рис. 5, на макрочастицу с большим зарядом действует сила, сдвигающая ее к центру, в то время как макроча-

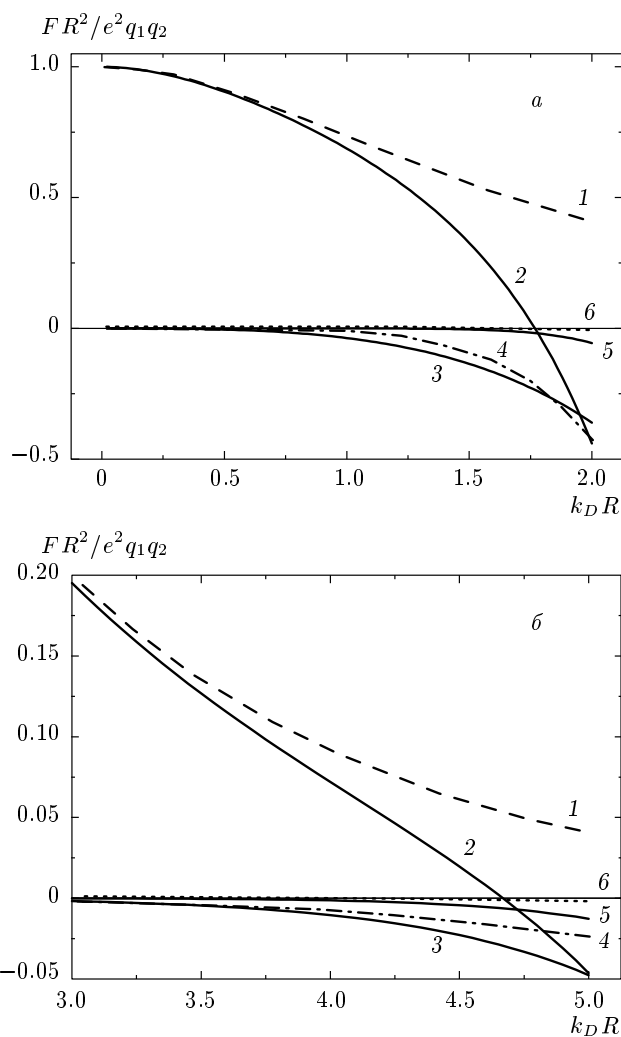


Рис. 4. Зависимости мультипольных составляющих силы взаимодействия от межчастичного расстояния при $Rbk_D = 2$ (а), 5 (б). Кривая 1 — дебаевская зависимость, 2 — полная сила, 3–6 — составляющие силы мультипольных моментов $n = 0, 2, 4, 6$ электростатического потенциала ϕ_3

стица с меньшим зарядом сдвигается к внешней границе. Неравенство сил говорит о том, что на объемные заряды действуют нескомпенсированные силы, и они также будут сдвигаться, т. е. система объемных зарядов не находится в равновесии. Мы можем выбрать p_1 и p_2 так, что будет выполнено равенство сил $F_{12} = F_{21}$.

Из рис. 6 следует, что действительно можно выбрать p_1 и p_2 таким образом, чтобы выполнялось равенство сил, при этом приведенная сила практически совпадает с приведенной силой в случае одинаковых зарядов. На рис. 6 также представлены зависимости p_1 и p_2 от R . Видно, что при малых R

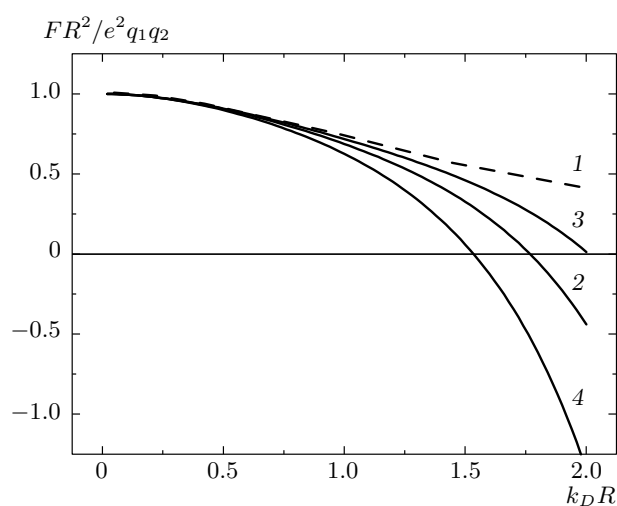


Рис. 5. Сила взаимодействия в случае двух макрочастиц с равными и разными зарядами при $Rbk_D = 2$: 1 — дебаевская зависимость; 2 — сила в случае $q_1 = q_2$; 3, 4 — $q_2 = 2q_1$; сила, действующая на макрочастицу с зарядом q_1 (3), q_2 (4)

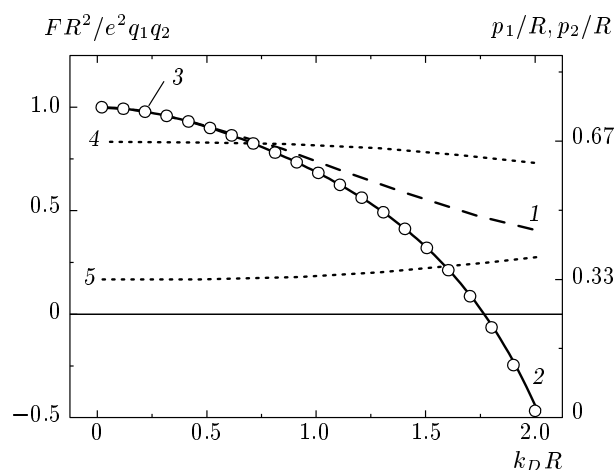


Рис. 6. Сила взаимодействия макрочастиц с равными и разными зарядами при $Rbk_D = 2$. Кривая 1 — дебаевская зависимость, 2 — полная сила при $q_1 = q_2, p_1 = p_2$; 3 — полная сила при $q_2 = 2q_1, p_1 + p_2 = R$; p_1 и p_2 выбраны так, чтобы было выполнено равенство $F_{12} = F_{21}$, 4 — p_1 , 5 — p_2

приближенно выполнены соотношения

$$p_1 \approx \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad p_2 \approx \frac{q_1}{q_1 + q_2},$$

т. е. макрочастица с бóльшим зарядом располагается ближе к центру расчетной ячейки. Далее с ростом R величина p_1 незначительно уменьшается, а p_2 — увеличивается.

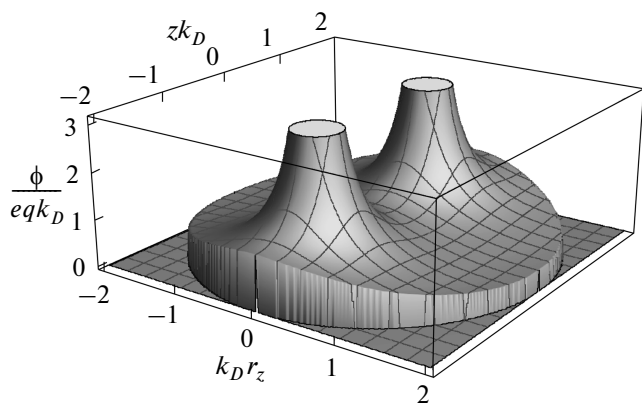


Рис. 7. Двумерное распределение приведенного потенциала ϕ/eqk_D в случае $q_1 = q_2, R_b k_D = 2$

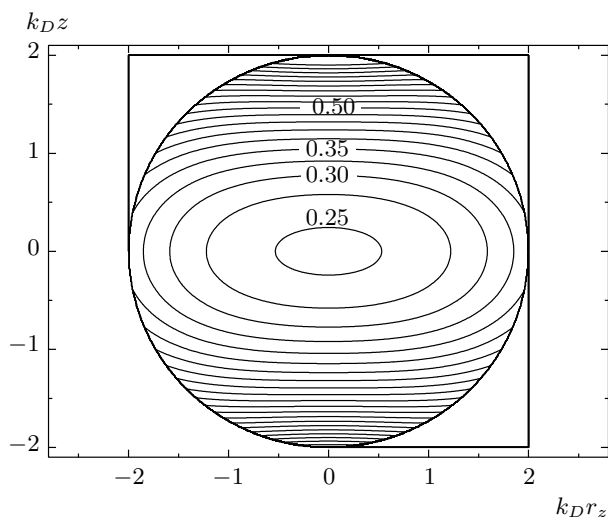


Рис. 8. Эквипотенциальные линии приведенного потенциала ϕ/eqk_D в случае $q_1 = q_2, R_b = 2k_D^{-1}$

На рис. 7 показано двумерное распределение потенциала в цилиндрической системе координат: $z = r \cos \theta, r_z = r \sin \theta$. Видно, что во внутренних точках расчетной ячейки потенциал нигде не достигает экстремального значения. На рис. 8 показаны эквипотенциальные линии потенциала ϕ_3 . Видно, что этот потенциал имеет минимальное значение в центре расчетной ячейки и возрастает к внешней границе, причем наиболее быстро вдоль линии, соединяющей центры макрочастиц и очень медленно в перпендикулярном направлении вдоль оси r_z (см. рис. 9). Рост ϕ_3 с увеличением r говорит о том, что электрическое поле компенсирующих зарядов направлено к центру расчетной ячейки, т. е. эти

заряды дают результирующую силу, соответствующую притяжению макрочастиц. Конкуренция этой силы, растущей с увеличением межчастичного расстояния (при постоянном R_b), с дебаевской силой, уменьшающейся с ростом R , и определяет появление эффекта притяжения на расстояниях порядка $R \sim R_b$.

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ОБОЛОЧКОЙ

В работе [30] при моделировании взаимодействия двух макрочастиц в плазме во внешнем однородном поле E_0 использовались условия на внешней границе, которые для рассматриваемого в настоящей работе случая $E_0 = 0$ и формы внешней границы сводятся к условиям (41) и

$$\left. \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=R_b} = 0, \tag{55}$$

т. е. условие (41) дополнено равенством нулю тангенциальной составляющей поля на внешней границе. Условие (55) эквивалентно условию

$$\phi(r, \theta)|_{r=R_b} = \text{const},$$

что соответствует граничному условию для проводящей сферы радиуса R_b . Но в этом случае граничное условие (41) должно иметь вид

$$E_{out}|_{r=R_b} - E_{in}|_{r=R_b} = 4\pi\sigma, \tag{56}$$

где $E_{out}|_{r=R_b}, E_{in}|_{r=R_b}$ — нормальные составляющие напряженности электрического поля вблизи внешней и внутренней поверхностей сферы, σ — плотность поверхностного заряда на сфере. В случае рассматриваемой нами задачи о взаимодействии двух макрочастиц, которая не является сферически-симметричной, нельзя одновременно задать условия $E_{out}|_{r=R_b} = 0, \sigma(\theta) = 0$ и, следовательно, $E_{in}|_{r=R_b} = 0$, поэтому использовавшиеся в работе [30] условия на внешней границе являются нефизическими.

Граничные условия (40), (55), (56) соответствуют задаче о взаимодействии двух макрочастиц в равновесной плазме, ограниченной сферической проводящей оболочкой радиуса R_b , например, внутри Q -машины (см., например, [33, 34]) со сферической формой нагретых пластин. В этом случае выраже-

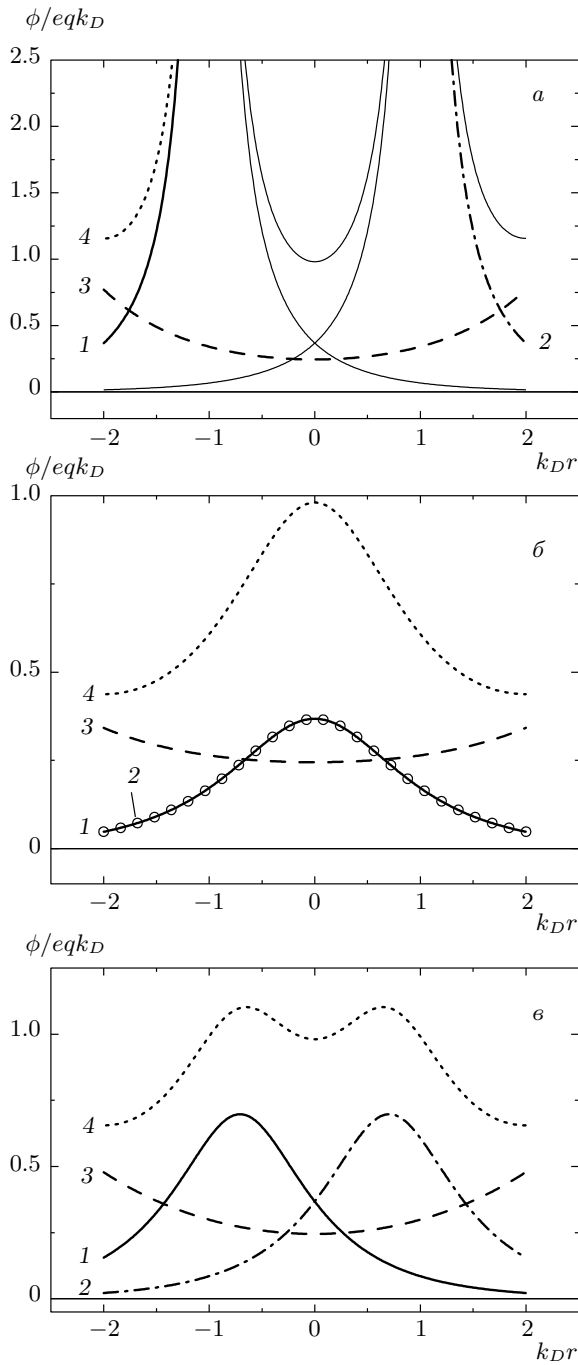


Рис. 9. Распределение приведенного потенциала при $R_b = 2R_D$, $q_1 = q_2$: *a* — вдоль линии $\mu = 1$ (отрицательным r соответствуют $\mu = -1$ или $\theta = \pi$), *б* — $\mu = 0$, *в* — $\theta = \pi/4$. Кривая 1 — приведенный потенциал ϕ_1/ek_Dq , 2 — приведенный потенциал ϕ_2/ek_Dq , 3 — приведенный потенциал ϕ_3/ek_Dq , 4 — приведенная сумма $(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)/ek_Dq$

ния (46) для коэффициентов A_0 и B_0 не изменятся, а из (55) и (48) находим

$$C_n = - \left[(-1)^n e q_1 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + e q_2 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] \times \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}{I_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}, \quad n \geq 1. \quad (57)$$

Прежде чем перейти к нахождению коэффициента C_0 , определим заряды плазмы внутри сферической оболочки, Q , и на ней, Q_{sph} . Для внешней области из условий на границе с проводником следует, что

$$E_{out} = \frac{Q_{out}}{r^2}, \quad \phi_{out} = \frac{Q_{out}}{r} + D_0, \quad (58)$$

где Q_{out} — полный заряд сферической области, который определяется законом сохранения заряда:

$$Q_{out} - Q - Q_{sph} = e(q_1 + q_2), \quad (59)$$

D_0 — постоянная, определяемая условием непрерывности потенциала:

$$\phi_{out}|_{r=R_b} = \phi|_{r=R_b}$$

(еще раз напомним, что мы не можем положить $D_0 = 0$, так как постоянная составляющая потенциала определяется условием $\phi = 0$ в точке, где $n_{e0} = n_{i0}$). В случае сферической оболочки, не связанной с другими внешними проводниками, будет иметь равенство $Q_{out} = 0$, в противном случае будет происходить обмен зарядом с другими проводниками и Q_{out} определится потенциалом контактирующих электрически со сферической оболочкой проводников.

Интегрируя по поверхности сферической оболочки, из (56) с учетом (58) находим

$$Q_{sph} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sigma(\mu) R_b^2 d\mu d\varphi = Q_{out} - \tilde{R}_b^2 \left\{ \left[e q_1 \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + e q_2 \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] \times \frac{K_{3/2}(\tilde{R}_b)}{\tilde{R}_b^{1/2}} - \frac{C_0}{k_D} \frac{I_{3/2}(\tilde{R}_b)}{\tilde{R}_b^{1/2}} \right\}. \quad (60)$$

Далее, используя (48) с учетом (47) при $r < p_i$, для объемного заряда плазмы получаем

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{R_b} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{k_D^2}{4\pi} \phi(r, \mu) \right] r^2 dr d\mu d\varphi = \\
 &= -eq_1 \left[1 - \tilde{R}_b^{3/2} K_{3/2}(\tilde{R}_b) \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} \right] - \\
 &\quad - eq_2 \left[1 - \tilde{R}_b^{3/2} K_{3/2}(\tilde{R}_b) \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] - \\
 &\quad - \frac{C_0}{k_D} \tilde{R}_b^{3/2} I_{3/2}(\tilde{R}_b). \quad (61)
 \end{aligned}$$

Из выражений (60) и (61) видно, что при любом значении C_0 закон сохранения заряда (59) будет выполнен. Следовательно, мы не можем найти значение C_0 из граничных условий (40), (55), (56), для этого нужно привлечь дополнительные физические соображения. Например, рассмотрим Q -машину сферической формы. В установившемся режиме будет выполнено условие равенства нулю как потока электронов, так и потока ионов, поэтому можно ожидать, что вблизи стенки будет приближенно выполнено условие $n_{e0}|_{R_b} = n_{i0}|_{R_b}$. Тогда вблизи внешней стенки мы должны задать условие $\phi|_{R_b} = 0$. Далее, если внешняя сферическая оболочка изолирована от других проводников, то вне нее $E_{out} = 0$ и, следовательно, $Q_{out} = 0$. В этом случае для C_0 будем иметь

$$\begin{aligned}
 C_0 &= - \left[eq_1 \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_1^{1/2}} + eq_2 \frac{I_{1/2}(\tilde{p}_2)}{\tilde{p}_2^{1/2}} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{K_{1/2}(\tilde{R}_b)}{I_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Выражениям (57) и (62) можно придать вид (49), если определить коэффициенты β_n следующим образом:

$$\beta_n = - \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}{I_{n+1/2}(\tilde{R}_b)}, \quad n \geq 0. \quad (63)$$

В этом случае для определения сил можно пользоваться выражениями (53) и (54).

На рис. 10 показано, как меняется сила взаимодействия двух точечных макрочастиц с одинаковыми зарядами $q_1 = q_2$ в изолированной сферической проводящей оболочке при изменении межчастичного расстояния $R = 2p$, $p \equiv p_1 = p_2$. Видно, что в рассматриваемом случае притяжения одноименно

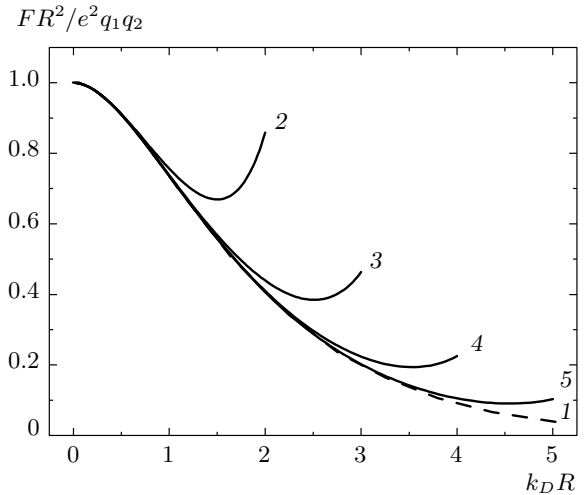


Рис. 10. Сила взаимодействия двух точечных макрочастиц с одинаковыми зарядами $q_1 = q_2$ в изолированной сферической проводящей оболочке как функция межчастичного расстояния. Дебаевская зависимость (кривая 1), полная сила при $R_b k_D = 2$ (2), 3 (3), 4 (4), 5 (5)

заряженных точечных макрочастиц не наблюдается, а по мере роста межчастичного расстояния и их приближения к поверхности сферической оболочки начиная с некоторого R сила отталкивания увеличивается. Это объясняется тем, что на оболочке наводятся заряды противоположного знака по сравнению с зарядами макрочастиц, поэтому каждая из них начинает притягиваться наведенными зарядами в направлении к ближайшей точке сферической оболочки. Такая сила направлена в ту же сторону, что и сила отталкивания, это и приводит к увеличению силы взаимодействия.

Отметим, что в случае бесконечной области взаимодействия мы должны положить $C_n = 0$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, так как модифицированные функции Бесселя первого рода при $R_b = \infty$ обращаются в бесконечность. В этом случае, используя явное выражение для модифицированной функции Бесселя третьего рода [32], из (52) для силы взаимодействия получаем выражение

$$F_{12} = F_{21} = \frac{e^2 q_1 q_2}{R^2} (1 + k_D R) \exp(-k_D R). \quad (64)$$

Отсюда хорошо видно, что в случае бесконечной области между двумя одноименно заряженными точечными макрочастицами нет никакого притяжения, что находится в полном согласии с выводами разд. 2.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что в рамках модели Пуассона–Больцмана в неограниченной равновесной плазме притяжение между одноименно заряженными макрочастицами отсутствует. Ошибочность вывода о возможности притяжения в этих условиях основана на использовании внутренней энергии в качестве термодинамического потенциала вместо свободной энергии. Также показано, что в случае рассмотрения задачи в ограниченной области возможно появление эффекта притяжения одноименно заряженных макрочастиц в равновесной плазме в рамках линеаризованной теории Пуассона–Больцмана. Этот эффект является следствием влияния внешних граничных условий и зависит от выбора их вида.

В ряде экспериментов (см., например, [35–39]) наблюдались эффекты, которые могут быть объяснены притяжением пылевых частиц, в других не наблюдалось никаких подобных эффектов [40–42]. Обычно в пылевой плазме в области нахождения пылевых частиц имеют место сильные потоки ионов и нарушена квазинейтральность плазмы, поэтому притяжение может быть обусловлено воздействием ионных потоков и электрического поля слоя объемного заряда. Например, в работе [43] исследовалось взаимодействие двух стационарных макрочастиц в стационарной однородной плазме с учетом теневых эффектов и было показано, что электростатическая часть силы является силой отталкивания, а притяжение обусловлено теневыми эффектами.

Вообще, интерес к вопросу о характере взаимодействия макрочастиц и возможности притяжения двух одноименно заряженных частиц имеет давнюю историю (см., например, [17, 44]). Поиск возможных механизмов притяжения между формирующими кристаллическую структуру пылевыми частицами был начат в работе [45]. Далее рассматривались механизмы притяжения вследствие низкочастотных флуктуаций электрического поля плазмы [46], за счет взаимодействия из-за осцилляций ионов в ионном потоке [47], вследствие образования областей с пониженной и повышенной плотностью ионов за пылевой частицей (ионный фокус) из-за сверхзвуковой скорости ионов в приэлектродном слое [48–52], за счет теневых эффектов (сила Лесажа), приводящих к асимметричным потокам нейтральных атомов и ионов на пылевые частицы [53–55], за счет термофоретических сил, приводящих к притяжению пылевых частиц, имеющих меньшую газовую температуру поверхности [56], за счет эффектов поляриза-

ции пылевых частиц во внешнем поле [57–59], за счет коллективных эффектов и плазменных потоков [60, 61] и т. д. Более подробное обсуждение данных вопросов можно найти в обзорах [12, 62–65].

Нужно отметить, что все эти исследования в основном относятся к неравновесной плазме низкого давления. В работе [66] рассмотрено взаимодействие пылевых частиц при повышенных давлениях, когда процессы переноса электронов и ионов вблизи них могут быть описаны в диффузионно-дрейфовом приближении. На основе модели точечных стоков [67, 68] для движущейся в изотропной плазме макрочастицы с учетом стоков электронов и ионов на ее поверхность, с учетом объемных процессов рождения и гибели плазменных частиц было показано, что на одноименно заряженную пылевую частицу, которая находится в кильватере движущейся пылевой частицы, на больших расстояниях действует сила притяжения, а в фарватере — сила отталкивания.

В заключение отметим, что экспериментальное обнаружение эффекта притяжения макрочастиц в равновесной плазме является весьма непростой задачей вследствие того, что пылевая плазма в экспериментах является сильно неравновесной, открытой системой.

Авторы выражают благодарность О. Ф. Петрову за инициирование полезного обсуждения рассмотренной в настоящей работе проблемы на семинаре в ОИВТ РАН.

Работа выполнена при поддержке Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом» (ГК № Н.4х.44.90.13.1107), РФФИ (грант № 15-02-06873) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (№ НШ-493.2014.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. P. Resendes, J. T. Mendonca, and P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **239**, 181 (1998).
2. Д. Н. Герасимов, О. А. Синкевич, *ТВТ* **37**, 853 (1999).
3. A. S. Ivanov, *Phys. Lett. A* **290**, 304 (2001).
4. Л. Г. Дьячков, *ТВТ* **43**, 331 (2005).
5. L. G. D'yachkov, *Phys. Lett. A* **340**, 440 (2005).
6. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. С. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 640 (2006).
7. А. М. Игнатов, *УФН* **171**, 213 (2001).

8. M. E. Markes and P. F. Williams, *Phys. Lett. A* **278**(3), 152 (2000).
9. J. C. Neu, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1072 (1999).
10. J. E. Sader and D. Y. C. Chan, *J. Colloid Interf. Sci.* **213**, 268 (1999).
11. J. E. Sader and D. Y. C. Chan, *Langmuir* **16**, 324 (2000).
12. P. K. Shukla and B. Eliasson, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 25 (2009).
13. F. B. Vaimbetov, A. E. Davletov, Zh. A. Kudyshev, and E. S. Mukhametkarimov, *Contrib. Plasma Phys.* **51**, 533 (2011).
14. A. V. Shavlov and V. A. Dzhumandzhi, *Phys. Plasmas* **20**, 083707 (2013).
15. P. Debye and E. Hückel, *Phys. Zeitschr.* **24**, 185 (1923).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
17. B. Derjaguin, *Trans. Faraday Soc.* **35**, 203 (1940).
18. К. В. Чукбар, *Физика плазмы* **26**, 455 (2000).
19. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
20. А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **136**, 601 (2009).
21. A. V. Filippov, *Contrib. Plasma Phys.* **49**, 433 (2009).
22. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **142**, 594 (2012).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. VI. Статистическая физика*, Наука, Москва (1976), с. 267.
24. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **132**, 949 (2007).
25. Ю. В. Петрушевич, *Физика плазмы* **29**, 508 (2003).
26. В. С. Грач, *Изв. вузов, радиофизика* **53**, 712 (2010).
27. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).
28. J.-P. Hansen and I. R. McDonald, *Theory of Simple Liquids*, Elsevier, London (2006).
29. В. А. Гундиенков, С. И. Яковленко, *ЖЭТФ* **125**, 1003 (2002).
30. Ю. В. Петрушевич, *Матем. моделирование* **24**(7), 13 (2012).
31. Г. Карслоу, Д. Егер, *Теплопроводность твердых тел*, Наука, Москва (1964) [H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon, Oxford (1959); Nauka, Moscow (1964)].
32. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949), т. 1 [G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, London (1922)].
33. R. Jones, *Phys. Rep.* **61**, 295 (1980).
34. Q.-Z. Luo, N. D'Angelo, and R. L. Merlino, *Phys. Plasmas* **6**, 3455 (1999).
35. A. Melzer, V. A. Schweigert, and A. Piel, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3194 (1999).
36. D. Samsonov, A. V. Ivlev, G. E. Morfill, and J. Goree, *Phys. Rev. E* **63**, 025401 (2001).
37. T. S. Ramazanov, K. N. Dzhumagulova, T. T. Daniyarov et al., *J. Plasma Phys.* **76**, 57 (2010).
38. A. D. Usachev, A. V. Zobnin, O. F. Petrov et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 045001 (2011).
39. S. K. Zhdanov, V. Nosenko, H. M. Thomas, G. E. Morfill, and L. Couëdel, *Phys. Rev. E* **89**, 023103 (2014).
40. U. Konopka, G. E. Morfill, and L. Ratke, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 891 (2000).
41. G. A. Heibner, M. E. Riley, D. S. Johnson et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 235001 (2001).
42. О. С. Ваулина, Е. А. Лисин, А. В. Гавриков, О. Ф. Петров, В. Е. Фортгов, *ЖЭТФ* **137**, 751 (2010).
43. M. Lampe and G. Joyce, *Phys. Plasmas* **22**, 023704 (2015).
44. E. J. W. Verwey and J. T. G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids*, Elsevier Publ. Comp., New York–Amsterdam–London–Brussels (1948).
45. V. N. Tsytovich, *Comments Plasma Phys. Control. Fusion* **15**, 349 (1994).
46. M. Nambu, S. V. Vladimirov, and P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **203**, 40 (1995).
47. S. V. Vladimirov and M. Nambu, *Phys. Rev. E* **52**, R2172 (1995).
48. F. Melandso and J. Goree, *Phys. Rev. E* **52**, 5312 (1995).
49. S. V. Vladimirov and O. Ishihara, *Phys. Plasmas* **3**, 444 (1996).

50. V. A. Schweigert, I. V. Schweigert, A. Melzer et al., *Phys. Rev. E* **54**, 4155 (1996).
51. A. Melzer, V. A. Schweigert, I. V. Schweigert et al., *Phys. Rev. E* **54**, R46 (1996).
52. M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavrishchaka, *Phys. Plasmas* **7**, 3851 (2000).
53. А. М. Игнатов, Кратк. сообщ. по физике ФИАН № 1–2, 58 (1995); *УФН* **171**, 213 (2001).
54. А. М. Игнатов, *Физика плазмы* **22**, 648 (1996).
55. А. М. Игнатов, *УФН* **171**, 213 (2001).
56. В. Е. Форттов, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, *ЖЭТФ* **116**, 1601 (1999).
57. G. Lapenta, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4409 (1995).
58. D. P. Resendes, *Phys. Rev. E* **61**, 793 (2000).
59. Ю. А. Манкелевич, М. А. Олеванов, Т. В. Рахимова, *ЖЭТФ* **121**, 1288 (2002).
60. В. Н. Цытович, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 1283 (2003).
61. В. Н. Цытович, *ЖЭТФ* **131**, 312 (2007).
62. В. Н. Цытович, *УФН* **167**, 57 (1997).
63. В. Е. Форттов, С. А. Храпак, А. Г. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, *УФН* **174**, 495 (2004).
64. S. V. Vladimirov and K. Ostrikov, *Phys. Rep.* **393**, 175 (2004).
65. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak et al., *Phys. Rep.* **421**, 1 (2005).
66. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., *ЖЭТФ* **135**, 567 (2009).
67. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 180 (2005).
68. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., *ЖЭТФ* **131**, 164 (2007).