

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОГО РАСШИРЕНИЯ ПЛАЗМЫ ВЗРЫВОЭМИССИОННОГО ЦЕНТРА В ВАКУУМЕ

Е. В. Нефедцев^{a,b*}, *А. В. Батраков*^{a,c**}

^a *Институт сильноточной электроники Сибирского отделения Российской академии наук
634055, Томск, Россия*

^b *Томский государственный университет
634050, Томск, Россия*

^c *Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 22 апреля 2015 г.

Представлены результаты численного моделирования устойчивой стадии расширения катодного факела в период коммутации вакуумного пробоя. Использовалась модель двухжидкостной гидродинамики с поправками, позволившими применить ее к согласованному описанию переноса электронов и ионов в плазме и переноса электронов в вакуумном промежутке плазма–анод без наложения условий сшивания на расширяющуюся плазменной границе. Проанализирована динамика профилей концентрации, направленной скорости и температуры обеих компонент, а также влияние различных факторов на скорость расширения плазменного облака.

DOI: 10.7868/S0044451015100181

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что электрический пробой вакуумной изоляции инициируется взрывоэмиссионными центрами, которые выбрасывают плазменные струи в межэлектродный промежуток [1]. В силу малых пространственных и временных масштабов этого явления, много надежд на его изучение возложено на теоретические исследования. Описать в рамках единой модели все процессы, связанные с развитием вакуумного пробоя, весьма сложно. Как правило, исследуются отдельные стадии или объекты этого явления. Примерами теоретического моделирования процессов инициирования взрывных центров являются работы [2, 3], а моделирования свойств плазмы катодного пятна в сформировавшейся вакуумной дуге — работы [4, 5]¹⁾. В то же время имеется значительный пробел в исследовании коммутационной

стадии вакуумного пробоя [6, 7]. Сложность теоретического исследования этой стадии пробоя на основе континуальных моделей обусловлена наличием смешивающейся в пространстве границы двух «сред» — плазмы и вакуума. При этом изменение свойств расширяющейся катодной плазмы и скорость движения ее границы согласованы с переносом эмитированных плазмой электронов в остаточном вакуумном промежутке, который, в свою очередь, находится под высоким напряжением. В одной из последних работ [6] эволюция катодного факела моделировалась с привлечением методов частиц в ячейках и Монте-Карло (PIC–MC) на малых межэлектродных промежутках 30 мкм. Достоинством работы [6] является рассмотрение всех основных процессов вблизи катода, связанных с испарением материала, термоавтоэлектронной эмиссией, столкновениями частиц, формированием зарядового состава и переносом частиц.

В настоящей работе проведено исследование эволюции катодного факела в приближении его изотропного расширения в пространство практически интересного миллиметрового вакуумного межэлек-

*E-mail: nev@lve.hcei.tsc.ru

**E-mail: batrakov@lve.hcei.tsc.ru

¹⁾ Из весьма обширного списка работ здесь приведены лишь работы, цитируемые в последующих разделах.

тродного промежутка на основе численного решения уравнений переноса. Акцент сделан на исследовании эволюции пространственного распределения величин без детального моделирования явлений вблизи катодной поверхности. Рассмотрено влияние различных параметров на характеристики эволюции плазменного факела за пределами области его формирования.

2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Теоретические и экспериментальные данные [5, 6, 8] свидетельствуют о том, что в факеле взрывоэмиссионной катодной плазмы на расстояниях свыше ~ 10 мкм от катодной поверхности зарядовый состав ионов становится неизменным, при этом нейтральная фракция атомных частиц является незначительной. Это, в свою очередь, дает некоторое основание, пренебрегая ионизационно-рекомбинационными процессами, использовать для расчетов модель простой двухкомпонентной (двухжидкостной) плазмы, рассмотренную, в частности, в работе [9]. При этом кратность ионизации атомных частиц Z_i предполагается равной кратности ионизации основной фракции из зарядового спектра ионов.

Для каждой компоненты плазмы, ионной ($p = i$) и электронной ($p = e$), формулируются по три уравнения моментов функции распределения:

$$\frac{\partial N_p}{\partial t} + \nabla(N_p \mathbf{V}_p) = 0, \quad (1)$$

$$M_p N_p \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial t} + M_p N_p (\mathbf{V}_p \nabla) \mathbf{V}_p = -\nabla(N_p k T_p) - q_0 Z_p N_p \nabla \varphi - \boldsymbol{\pi}_{p\alpha\beta, \beta} + \mathbf{R}_p, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} N_p \frac{\partial k T_p}{\partial t} + \frac{3}{2} N_p (\mathbf{V}_p \nabla) k T_p = -N_p k T_p (\nabla \mathbf{V}_p) - \nabla \mathbf{q}_p - \boldsymbol{\pi}_{p\alpha\beta} V_{p\alpha, \beta} + W_p. \quad (3)$$

Система (1)–(3) замыкается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q_0}{\varepsilon_0} (Z_i N_i + Z_e N_e). \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) в качестве зависимых переменных выступают следующие: N_p [м⁻³] — концентрация частиц сорта p (электроны, ионы), \mathbf{V}_p [м/с] — направленная скорость частиц сорта p , $k T_p$ [Дж] — температура p -й фракции. Постоянными параметрами уравнений являются q_0 [Кл] —

элементарный заряд, Z_p — зарядность частицы, при этом $Z_e \equiv -1$, M_p [кг] — масса частицы сорта p . Греческие символы нумеруют компоненты векторных (\mathbf{V}_p) и тензорных ($\boldsymbol{\pi}_p$) величин ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), запятая перед символом означает дифференцирование по соответствующей координате, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Уравнения (1)–(3) записаны с учетом уравнений состояния электронной и ионной сред, связывающих давление с концентрацией частиц и температурой, в виде $P_p = N_p k T_p$.

Уравнения (1) представляют собой уравнения непрерывности. Нулевое значение в правой части соответствует предположению о пренебрежении ионизационно-рекомбинационными процессами.

Уравнения (2) являются следствием уравнения динамики. Правая часть представляет собой сумму сил, действующих на единичный элемент объема данной компоненты плазмы (слева направо): 1) силы давления, 2) кулоновской силы, 3) вязкостной силы, 4) силы взаимодействия компонентов. Здесь

$$\boldsymbol{\pi}_{p\alpha\beta} = H_p \left(V_{p\alpha, \beta} + V_{p\beta, \alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \mathbf{V}_p \right)$$

— тензор вязких напряжений. Выражение для коэффициентов вязкости H_p приведено в разд. 3. Величина \mathbf{R}_p представляет собой среднее изменение импульса частиц сорта p вследствие столкновений с частицами других сортов. Для случая двухкомпонентной плазмы силы взаимодействия электронов и ионов равны по величине, но противоположны по направлению: $\mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_e$.

Уравнения (3) являются следствием закона сохранения энергии. Они выражают тепловой баланс единичного элемента объема. Правая часть представляет собой факторы изменения теплосодержания единичного элемента объема данной компоненты, связанные с (слева направо) 1) действием сил давления, 2) теплопередачей в пределах данной компоненты, 3) выделением тепла в результате вязкостного трения, 4) теплопередачей и выделением тепла в процессе взаимодействия между компонентами. Вектор \mathbf{q}_p есть плотность потока тепла, переносимого частицами данного сорта. Он выражает собой перенос энергии хаотического движения в сопутствующей системе координат, относительно которой направленная скорость частиц этого сорта в данной точке пространства обращается в нуль. Величина W_p представляет собой выделение тепла в p -компоненте плазмы вследствие взаимодействия частиц p -го сорта с частицами других сортов. Выражения для величин \mathbf{R}_p , \mathbf{q}_p и W_p для двухкомпонент-

ной плазмы с учетом поправок, принятых в настоящей работе, рассмотрены в разд. 3.

В течение коммутационного периода вакуумного пробоя межэлектродный промежуток можно условно разделить на три изменяющих свои размеры участка: участок плотной плазмы, примыкающий к катоду, переходный участок редкой плазмы и участок вакуума, в котором имеет место перенос электронов, эмитированных границей плазмы. Участок плотной плазмы ограничивается радиусом, на котором длина свободного пробега частиц λ становится соизмеримой с характерными масштабами изменения концентраций частиц. Этот участок плазмы можно полностью описать моделью [9], не внося в нее дополнительных корректив. Рассмотрим условия, при которых модель (1)–(4), посредством введения корректирующих поправок, могла бы быть распространена на весь межэлектродный промежуток. Такой подход снимает проблему сшивания региональных решений и деления электронов на плазменные и пучковые, тем более что нет оснований считать переход от плотной плазмы к вакууму достаточно резким, чтобы можно было бы обоснованно применить саму методику сшивания.

Участок вакуума характеризуется отсутствием ионов, поэтому уравнения (2) и (3) для $p = i$ становятся неактуальными, а уравнение (1) констатирует лишь факт отсутствия прироста ионов в данной точке (до прихода в эту точку границы плазмы). В уравнении (2) для электронов становится доминирующим второй член правой части, описывающий электростатическую силу со стороны поля, сосредоточенного в вакуумном промежутке. Остальные члены, зависящие от температуры и концентрации частиц обеих компонент, становятся пренебрежимо малыми. В силу этого также пропадает актуальность уравнения (3) для $p = e$.

Таким образом, система уравнений (1)–(4) пригодна для описания переноса частиц как в плотной плазме, так и в вакууме при условии, что физически неадекватные решения уравнений (2) и (3) для $p = i$ в вакуумной области (не влияющие в этой области на величины N_e и V_e) не приведут к счетным катастрофам. Предварительные расчеты дали устойчивые и качественно разумные решения, описывающие распространение сферически-симметричной плазмы. Однако для проведения более точных расчетов в области редкой плазмы потребовалась некоторая предварительная корректировка выражений, содержащихся в уравнениях (2) и (3).

3. МОДИФИКАЦИЯ ЧЛЕНОВ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОМПОНЕНТ ПЛАЗМЫ

В рамках континуальной модели каждый малый фрагмент среды может быть охарактеризован локальной функцией распределения в сопутствующей системе координат. В соответствии с таким подходом, первые два члена в правых частях уравнений (2) и (3), характеризующие процессы передачи импульса и тепла в пределах одной компоненты плазмы, могут быть записаны в форме [9] без изменений. Однако члены, связанные с обменом импульсом и энергией между электронами и ионами, содержат коэффициенты, выражения для которых получены усреднением по равновесной функции распределения, что изначально предполагает высокую частоту столкновений и малое значение скорости перемещения одной компоненты относительно другой $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$. При переходе к большим относительным скоростям $\Delta V \equiv |\Delta \mathbf{V}|$ требуется корректировка этих членов не столько на уровне коэффициентов, сколько на уровне самих функциональных зависимостей [10].

Для классического случая $\Delta V \ll V_T = (3kT_e/M_e)^{1/2}$, сила \mathbf{R}_e представляется в виде двух составляющих — силы «трения» \mathbf{R}_e^V и «термосилы» \mathbf{R}_e^T [9]:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_e^V + \mathbf{R}_e^T \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} -\alpha_0 \mu_{ei} \Delta \mathbf{V} - \beta_0 N_e \nabla kT_e, \quad (5)$$

где

$$\mu_{ei} = \delta M_e^{1/2} \frac{N_e N_i Z_i^2}{(kT_e)^{3/2}} \ln \Lambda_{ei},$$

$$\delta = \frac{4(2\pi)^{1/2} q_0^4}{3(4\pi\epsilon_0)^2} = 1.78 \cdot 10^{-55} \text{ м}^6 \text{ кг}^2 \text{ с}^{-4},$$

$$\ln \Lambda_{pq} = \ln(2.415 \cdot 10^{41}) + 1.5 \ln(kT_p [\text{Дж}]) - 0.5 \ln(N_q [\text{м}^{-3}]),$$

α_0, β_0 — поправочные множители порядка единицы, зависящие от заряда иона. На основе данных [9] в пределах значений Z_i от +1 до +4 можно записать

$$\alpha_0 \approx 0.0127 Z_i^2 - 0.1092 Z_i + 0.6092;$$

$$\beta_0 \approx 0.0300 Z_i^2 + 0.2750 Z_i + 0.4683.$$

Вблизи границы плазмы следует ожидать появление больших значений относительной скорости ΔV . При этом выражение для силы взаимодействия выходит за рамки линейного по ΔV приближения (5). Согласно [11], более общее выражение для силы

трения имеет вид (в работе [11] полагалось $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$ и $Z_i = 1$)²⁾

$$\mathbf{R}_e^V = -\frac{q_0^4}{4\pi\varepsilon_0^2} \frac{N_e N_i}{\sqrt{\pi} k T_e} \times \int_0^z \frac{\exp(-t^2) dt - z \exp(-z^2)}{z^2} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta V}, \quad (6)$$

где

$$z^2 = \frac{M_e (\Delta V)^2}{2kT_e}.$$

В пределе малых значений ΔV это выражение стремится к выражению (5), а в пределе больших значений $\Delta V \gg V_T$ — к известному выражению, описывающему взаимодействие однородного моноэнергетического потока заряженных частиц с кулоновскими рассеивающими центрами [12]:

$$\mathbf{R}_e^V \xrightarrow{\Delta V \rightarrow \infty} -\frac{q_0^4}{4\pi\varepsilon_0^2} \frac{N_e N_i Z_i^2}{M_e (\Delta V)^2} \ln \Lambda_{ie} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta V}. \quad (7)$$

Для проведения численных расчетов целесообразно использовать сравнительно простое выражение, обладающее предельными свойствами (5) и (7). С учетом того, что при $\Delta V \rightarrow \infty$ слагаемое $\mathbf{R}_e^T \rightarrow 0$, таким выражением может быть следующее:

$$\mathbf{R}_e = f (-\alpha_0 \mu_{ei} \Delta \mathbf{V} - \beta_0 N_e \nabla k T_e), \quad (8)$$

где

$$f = \left[1 + \frac{\sqrt{2} \alpha_0}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{M_e (\Delta V)^2}{k T_e} \right)^{3/2} \right]^{-1}.$$

Сравнение (8) с выражением (6) (при $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $Z_i = 1$) дает ошибку аппроксимации в промежуточных точках не более 10%.

Значения плотности потока тепла, переносимого в пределах электронной и ионной компонент плазмы, согласно [9] даются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= -\gamma_0 \frac{(kT_e)^{5/2}}{\delta M_e^{1/2} \ln \Lambda_{ee}} \nabla k T_e + \beta_0 N_e k T_e \Delta \mathbf{V}, \\ \mathbf{q}_i &= -\frac{3.9 (kT_i)^{5/2}}{\delta Z_i^2 M_i^{1/2} \ln \Lambda_{ii}} \nabla k T_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где поправочный множитель γ_0 на основе данных [9] в пределах значений Z_i от +1 до +4 можно аппроксимировать выражением

$$\gamma_0 \approx -0.2181 Z_i^2 + 2.3354 Z_i + 1.0561.$$

²⁾ Во многих работах поправочные множители опускают, а «термосилой» пренебрегают по отношению к силе «трения», что формально здесь сводится к равенствам $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$.

Изменение плотности тепловой энергии за единицу времени связано с ее выделением (в основном в электронной подсистеме) за счет работы сил «трения» и обменом ее между электронами и ионами. Используя данные [9] и учитывая (добавлением множителя f) снижение эффективности взаимодействия электронов и ионов при увеличении относительной скорости, запишем:

$$W_e = f \left\{ (-\alpha_0 \mu_{ei} \Delta \mathbf{V} - \beta_0 N_e \nabla k T_e) \Delta \mathbf{V} - \mu_{ei} \frac{3(kT_e - kT_i)}{M_i} \right\}, \quad (10)$$

$$W_i = f \left\{ \mu_{ei} \frac{3(kT_e - kT_i)}{M_i} \right\}.$$

Еще одной величиной, становящейся проблемной в области перехода плазма–вакуум, является вязкостный член уравнения (3), описывающий выделение тепла в результате внутреннего трения. Он отличается от остальных членов тем, что не имеет существенной зависимости от концентрации частиц. Для плотной плазмы коэффициенты вязкости логарифмически слабо зависят от их концентрации частиц, но в то же время имеют сильную зависимость от температуры:

$$H_p = \frac{\alpha_p^H M_p^{1/2} (kT_p)^{5/2}}{\delta Z_p^2 \ln \Lambda_{pp}}, \quad (11)$$

где $\alpha_i^H = 0.96$, $\alpha_e^H = 0.73$ [9].

Как показали предварительные расчеты, в области плотной плазмы вязкостный член в уравнении теплового баланса (3) оказывается пренебрежимо малым по сравнению с остальными членами. Использование же выражения (11) при переходе к редкой плазме в окрестности ее границы $N_p \rightarrow 0$ дает физически неадекватный бесконечно быстрый рост температуры. На основании этого вязкостный член в уравнении (3) был исключен. Силовые же вязкостные члены в уравнениях (2) учтены в полной мере.

4. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим задачу об эволюции катодного факела, генерируемого острым катодом, предполагая изотропность его расширения в пределах некоторого телесного угла. Акцентируя внимание на описании явлений в межэлектродном промежутке, мы исключаем из рассмотрения малую радиальную область, непосредственно примыкающую к взрывоэмиссионному центру, и связанные с этой областью

такие явления, как испарение материала катода, термоавтоэмиссия электронов и неупругие столкновения частиц, приводящие к изменению зарядового состояния ионов. Внутренняя граница, радиус которой принят равным $r_0 = 0.01$ мм, рассматривалась как некоторая близкая к катоду поверхность, на которой можно сформулировать упрощенные граничные условия. Радиус анода принят равным $r_a = 1$ мм. В соответствии с численными экспериментами [5] можно ожидать, что результаты расчета для сферически-симметричной электродной системы могут с малыми погрешностями быть использованы для описания расширения катодного факела в плоской системе электродов (при условии совмещения начала радиальной координаты с точкой выброса струи). При этом, несмотря на ограничения по углу разлета, влиянием собственного магнитного поля плазменной струи на ее формирование можно пренебречь.

В качестве совокупности базовых параметров, вокруг которых осуществлялись вариации, выбраны следующие параметры. Ионы, эмитируемые из медного катода ($M_i = 64$ единиц атомных масс) считались двухзарядными $Z_i = 2$, что согласуется с данными [5, 6, 13, 14]. Считалось, что на границе r_0 начиная с момента времени $t = \tau = 2$ нс возникает однородный стационарный поток ионов меди плотностью $J_{i0} = N_{i0}V_{i0}$, где N_{i0} и V_{i0} — граничные концентрация и скорость ионов. В течение времени $0 < t < \tau$, существенно меньшего времени перекрытия межэлектродного промежутка плазмой, граничная концентрация частиц и напряжение источника изменялись по линейному закону $N_{i0}t/\tau$ и Ut/τ , после чего эти величины оставались постоянными на уровне значений соответственно N_{i0} и U .

На радиусе $r = r_0 = 0.01$ мм, согласно расчетам и экспериментальным данным [2, 6, 15, 16], можно ожидать значений концентрации частиц в пределах $\sim 10^{24}$ – 10^{26} м⁻³. В качестве базовых значений концентраций частиц на катодной границе приняты значения $N_{i0} = 1 \cdot 10^{25}$ м⁻³ и $N_{e0} = Z_i N_{i0} = 2 \cdot 10^{25}$ м⁻³.

Температура электронов и ионов на внутренней границе полагалась близкой к значению критической температуры меди, $T_{i0} = T_{e0} = 8000$ К [6]. В качестве базового значения для скорости инжекции ионов из границы $r = r_0$ выбрана средняя проекционная скорость теплового движения частиц пара, находящегося в равновесии с поверхностью, $V_{i0} = kT_{i0}/2\pi M_i \approx 400$ м/с. Это значение в сочетании с базовой граничной концентрацией, приведенной выше, дает угловую эффективность источника ионов

$r_0^2 N_{0i} V_{0i} = 4 \cdot 10^{17}$ с⁻¹ · ср⁻¹, что соответствует по порядку величины значениям, полученным в расчетах [6].

Направленная скорость электронов на границе $r = r_0$ не фиксировалась, т. е. это значение могло устанавливаться автоматически в соответствии с условиями равновесной проводимости в расширяющемся факеле. В самом деле, перегретое состояние поверхности катода в катодном пятне дает основание считать его термоэмиттером с неограниченной эффективностью [5, 17]. Детальными расчетами [6, 18, 19] подтверждается, что в пределах катодного пятна существует значительный обратный поток электронов из плазмы на катод, что также согласуется с предположением о режиме неограниченной эмиссии.

Анодная граница $r = r_a$ описывалась как сток частиц с фиксированными символически низкими значениями концентраций $N_i(t, r_a) = 1 \cdot 10^3$ м⁻³ и $N_e(t, r_a) = Z_i N_i(t, r_a) = 2 \cdot 10^3$ м⁻³. Недопустимость нулевых значений концентраций частиц продиктована наличием в уравнениях (1)–(3) логарифмов от этих величин и выражений, приводящих к неопределенностям типа 0/0. Начальные значения концентраций также составляли символически малые значения $N_i(0, r) = 1 \cdot 10^6$ м⁻³, $N_e(0, r) = 2 \cdot 10^6$ м⁻³. Температура анода и начальные значения температур электронов и ионов полагались равными 300 К.

Электрический потенциал катода полагался равным нулю. Потенциал анода рассчитывался с учетом падения напряжения на внешнем сопротивлении $R = 50$ Ом при протекании полного тока I : $\varphi(t, r_a) = U - IR$, где U — напряжение источника питания, базовое значение которого выбрано равным 6 кВ.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе расчетов выявлено, что в диапазоне параметров, близких к базовым значениям, устойчивость расширения катодного факела нарушается до того, как происходит полное перекрытие промежутка плазмой. До этого момента расширение плазменного облака характеризуется плавным изменением во времени пространственных распределений (профилей) величин и непрерывностью тока проводимости.

На рис. 1 показано развитие профилей основных величин модели: концентраций частиц, их температур, направленных скоростей, а также потенциала, с

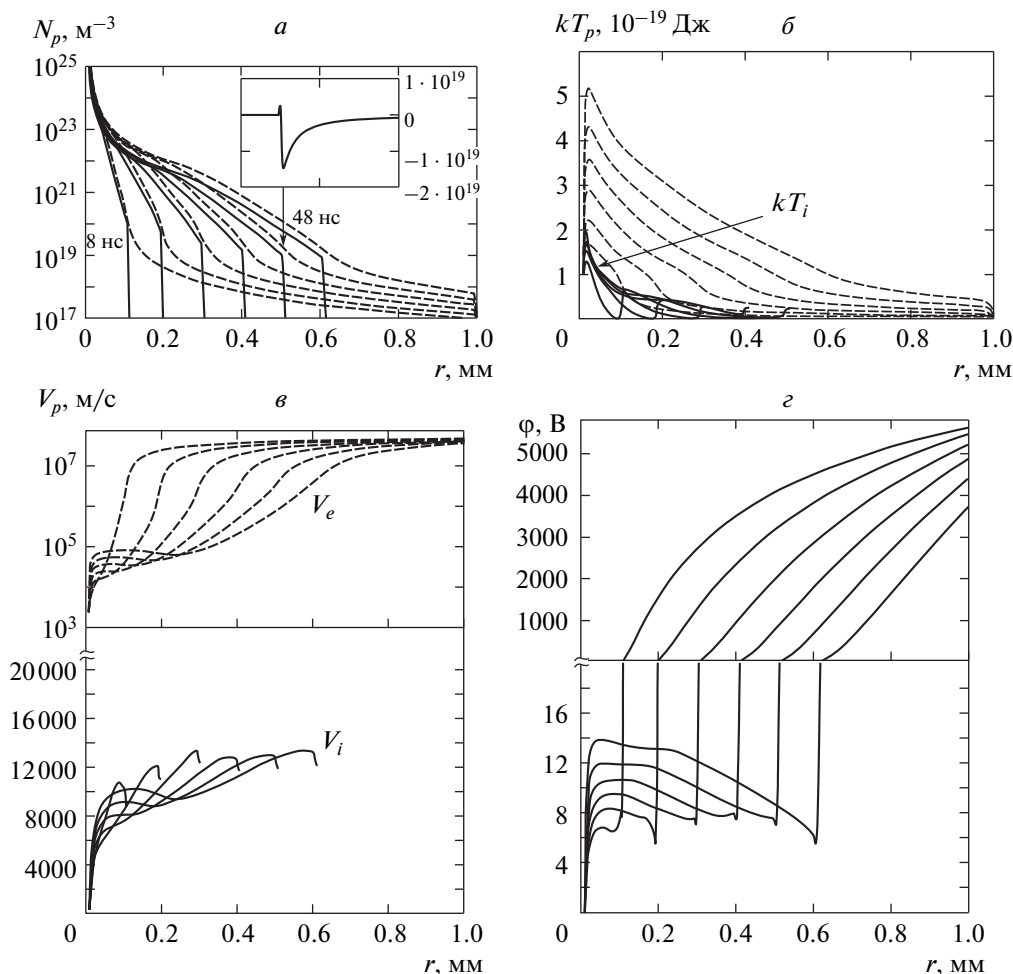


Рис. 1. Зависимости от радиальной координаты основных величин модели: концентрации (а), температуры (б), скорости (в) частиц, а также электростатического потенциала (г) в моменты времени 8, 16, 24, 32, 40, 48 нс (слева направо) при базовых параметрах. Профили электронов — штриховые кривые, профили ионов — сплошные. На вставке (а) показано распределение объемного заряда $Z_i N_i - N_e$ (в единицах элементарного заряда на 1 м^3) вблизи границы плазмы 40 нс профиля

шагом по времени 8 нс до начала развития неустойчивого режима (48 нс).

Говорить о едином характерном времени формирования стационарного профиля концентрации по всей его длине не представляется возможным. Вблизи катода в пределах ~ 0.1 мм часть профиля становится стационарной уже в течение примерно 10 нс. При большей удаленности от катодной поверхности характерное время формирования стационарного профиля резко увеличивается и явно превышает время перекрытия промежутка плазмой. Форма стационарной части профиля близка к степенной зависимости $N \sim r^{-2}$, но точно ей не соответствует. Как следует из рис. 1а, отделение электрон-

ного потока от плазмы происходит при концентрации порядка 10^{19} м^{-3} , которая уменьшается по мере расширения плазмы. Граница плазмы является резкой — ее размытость около 10 мкм соответствует длине Дебая. Перед границей возникает небольшой максимум концентрации ионов. Соответствующая ему величина положительного объемного заряда существенно меньше отрицательного объемного заряда электронов в вакуумной части межэлектродного промежутка (см. вставку на рис. 1а).

После некоторого периода ускорения в течение примерно 5–10 нс скорость движения плазменной границы («передних» ионов) V_b стремится к значению $1.3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$ (рис. 1в). Небольшие плавные

«качания» вокруг этого значения являются отголоском процесса «начала взрыва» в период $t < \tau$, что подтверждается ростом амплитуды качаний при понижении значения τ . Профили направленной скорости ионов и электронов вблизи катодной поверхности являются резко возрастающими. Далее формируется область плато, расширяющегося вместе с расширением стационарных участков профилей концентрации частиц. После участка плато профили вновь становятся возрастающими (рис. 1*в*). При значительном расширении плазменного облака в области плато появляется тенденция к образованию плавной складки (отрицательного уклона), что, по-видимому, обусловлено сильной неравномерностью температурных профилей.

Несмотря на некоторое подобие профилей направленной скорости ионов и электронов в пределах густой плазмы (рис. 1*в*), характер их движения различен. В самом деле, превышение значения направленной скорости электронов над шириной полосы разброса по тепловой скорости ($\sim kT_e/M_e \sim \sim 10^6$ м/с) имеет место лишь вблизи границы плазмы, поэтому внутри плазмы движение электронов в основном является хаотическим. Тепловая полоса разброса скоростей ионов, напротив, является узкой, т. е. движение ионов всегда можно считать направленным.

В пределах расстояния 10 мкм от «катодной» границы (рис. 1*б*) температура ионов и электронов достигает максимальных значений, превышающих граничную температуру. В глубине расширяющейся плазмы температура ионов значительно снижается (рис. 1*б*). Перед плазменной границей ионы существенно охлаждены. На самой же плазменной границе ионы, формирующие положительный объемный заряд, являются сравнительно «теплыми».

Температура электронов за время коммутационного периода постоянно возрастает, а ее профили расширяются (рис. 1*б*). Причиной разогрева электронов плазмы является увеличение тока через плазму из-за постоянного повышения проводимости «последовательно включенного» сужающегося вакуумного промежутка. Стабилизирующими факторами являются снижение эффективной частоты электрон-ионных столкновений и увеличение коэффициента теплопроводности с увеличением температуры. Темп роста температуры зависит от приложенного напряжения и практически не зависит от температуры поверхности катода при ее варьировании в пределах 3000–8000 К. Для $U = 6$ кВ в течение периода устойчивого расширения плазмы температура электронов достигает $5.04 \cdot 10^{-19}$ Дж (36500 К).

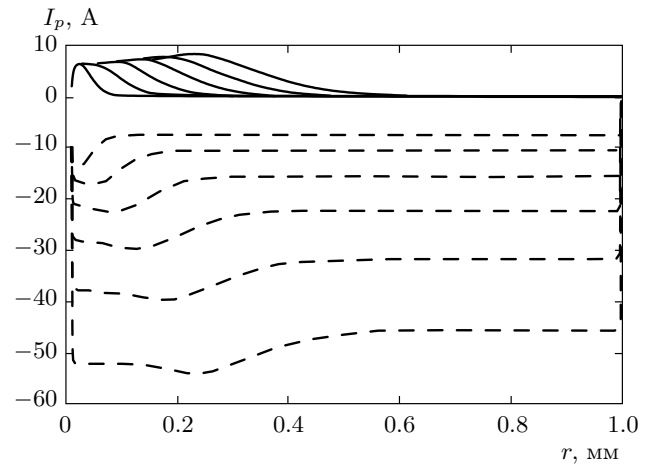


Рис. 2. Зависимости от радиальной координаты электронного (штриховые линии) и ионного (сплошные линии) токов, соответствующие данным рис. 1

Вблизи катодной границы имеет место резкий подъем потенциала плазмы, который сменяется пологим спадом (рис. 1*г*). По мере расширения облака плазмы отрицательный склон потенциала расширяется и в среднем углубляется на фоне «качаний», подобных «качанию» профиля скорости ионов. И подъем, и убывание потенциала увеличиваются с ростом внешнего напряжения. Перед границей плазмы имеет место симметричный локальный минимум глубиной примерно 1 В и шириной приблизительно 5 мкм, соответствующий максимуму плотности объемного заряда. За границей плазмы потенциал резко возрастает и распределяется в соответствии с режимом переноса электронов в вакуумном промежутке, ограниченном объемным зарядом.

На рис. 2 показаны зависимости ионного и электронного токов (пересчитанных на полный телесный угол 4π) от радиуса. Устойчивое расширение плазмы характеризуется непрерывностью полного тока проводимости — сумма ионного и электронного токов $I = I_i + I_e$, текущих в разных направлениях, практически не зависит от координаты. Небольшие девиации тока проводимости имеют место в области движущейся границы плазмы, где нарушение электронейтральности составляет приблизительно $(10^{-5} - 10^{-6})N_{i0}$. Однако они полностью компенсируются током смещения.

Вычисленный полный ток сравнивался с теоретическим значением электронного тока через сферический вакуумный диод, в котором внутренняя сферическая обкладка, являющаяся идеальным эмит-

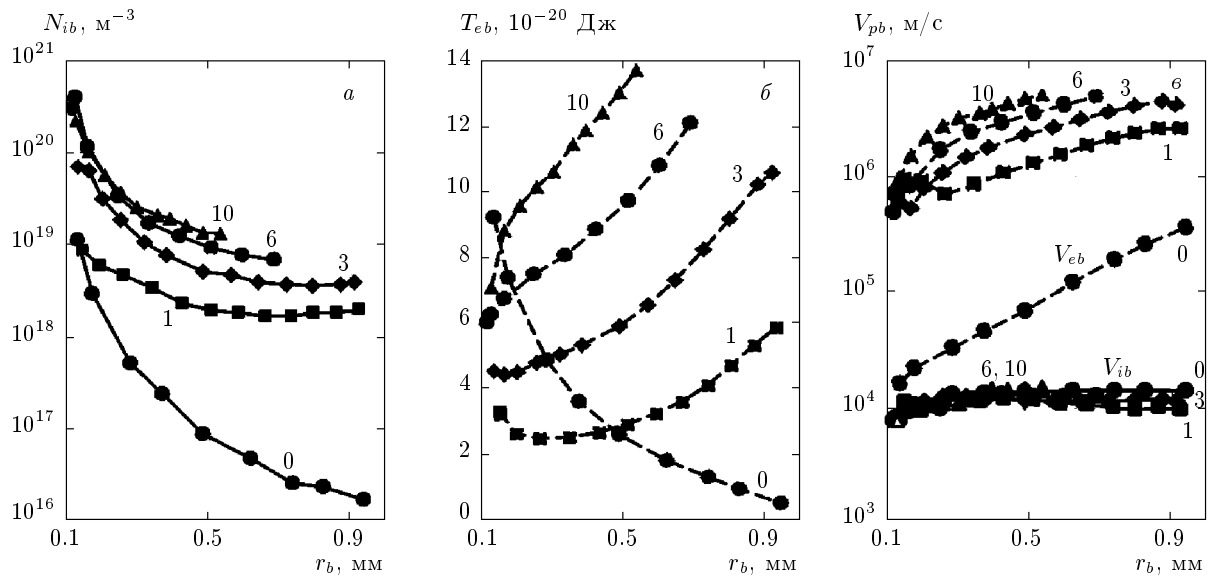


Рис. 3. Зависимости параметров плазменной границы от ее радиуса при различных напряжениях на промежутке: концентрации ионов (*а*), температуры электронов (*б*), скорости электронов (штриховые линии) и ионов (сплошные линии) (*в*). Числа на графиках соответствуют напряжению источника питания в киловольтах

тером, имеет радиус, равный текущему радиусу плазменной границы r_b . Это значение находилось из нелинейного уравнения, составленного на основе теории [20]:

$$I = \frac{4\pi P(U - IR)^{3/2}}{\alpha^2 \ln(r_a/r_b)}, \quad (12)$$

где

$$P = \frac{4\epsilon_0}{9} \left(\frac{2q_0}{m_e} \right)^{1/2} = 2.334 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2},$$

$$\alpha(y) \approx y - 0.3y^2 + 0.075y^3 - 0.0143182y^4 + 0.0021609y^5 - 0.00026791y^6 + \dots$$

— специальная функция.

Оказалось, что оба значения практически совпадают при любых параметрах задачи (включая U) для любого текущего положения плазменной границы. Таким образом, следует признать, что общим признаком устойчивого расширения плазмы является условие «неограниченной» электронной эмиссии из границы плазмы, что ранее отмечалось в работе [21] (режим, соответствующий закону степени 3/2).

На основе усредненного по коммутационному периоду значения полного тока \bar{I} можно оценить значение удельной ионной эрозии по формуле

$$\gamma = 4\pi r_0^2 N_{0i} V_{0i} M_i / \bar{I}. \quad (13)$$

Для скоростей инжекции $V_{i0} = 400\text{--}2000$ м/с и пределов варьирования значений напряжения на промежутке (3–10 кВ) формула (13) приводит к диапазону значений $\gamma \sim (10^{-8}\text{--}10^{-7})$ кг/Кл, что соответствует как теоретическим оценкам [1, 2, 17], так и экспериментальным данным [22, 23] ($4 \cdot 10^{-8}\text{--}1.2 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл).

Скорость движения плазменной границы является предметом многочисленных исследований, поскольку этот параметр определяет время коммутации при пробое вакуумного промежутка. На рис. 3 показаны зависимости от текущего радиуса плазменного облака r_b (начиная от $r_b = 0.1$ мм) различных величин в области границы: концентрации ионов N_{ib} , температуры электронов T_{eb} , а также скорости электронов V_{eb} и ионов V_{ib} . Характеристики даны для различных значений U . Из рис. 3 следует, что при расширении плазмы скорость движения ее границы V_{ib} является относительно стабильной, в то время как остальные параметры границы испытывают значительные изменения во времени. Напряжение источника питания, как видно из рис. 3, не оказывает сильного влияния на характеристики $V_{ib}(r_b)$. При увеличении напряжения от 1 до 10 кВ значение V_{ib} возрастает от 10 до 15 км/с. В области малых напряжений монотонность этой зависимости нарушается — при $U = 0$ скорость границы плазмы становится равной $1.3 \cdot 10^4$ м/с, т. е. соответствующей напряжению $U = 6$ кВ.

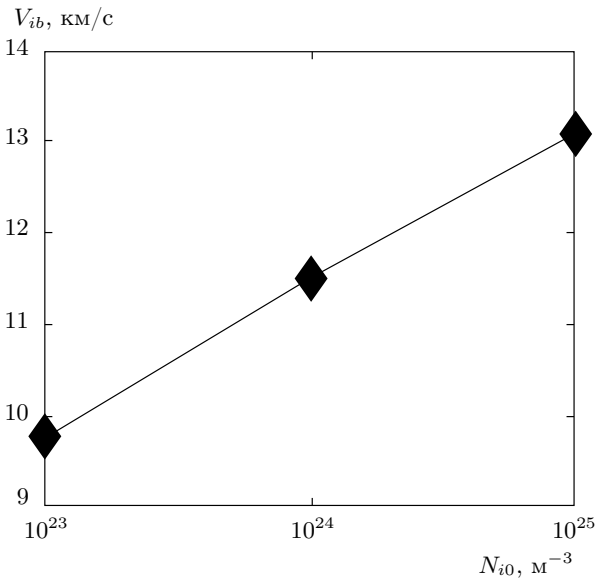


Рис. 4. Зависимость скорости движения плазменной границы от концентрации инжектируемых ионов

Как видно из рис. 3, параметры границы плазмы для случая $U = 0$ имеют существенно индивидуальные характеристики. В частности, температура электронов на границе в ходе расширения облака не возрастает, а убывает, поскольку сила трения между компонентами плазмы мала, и значительную часть промежутка электроны движутся «совместно» с ионами. Концентрация частиц на границе плазмы при $U = 0$ значительно меньше, чем концентрация при наличии напряжения. Некоторое повышение V_{ib} при $U = 0$ (по отношению к случаю $U = 1$ кВ), вероятно, обусловлено нивелированием эффекта убегания электронов относительно ионов, из-за чего увлечение ионов «электронным ветром» становится более эффективным.

Как показали расчеты, на величину V_{ib} слабое влияние оказывает также интенсивность источника ионов как при варьировании концентрации N_{i0} в пределах 10^{23} – 10^{25} m^{-3} (рис. 4), так и при варьировании скорости инжекции ионов V_{i0} в пределах 20–2000 м/с (рис. 5). Лишь при чрезмерно завышенных значениях $V_{i0} > 10^4$ м/с зависимость $V_{ib}(V_{i0})$ стремится в пределе больших скоростей к равенству $V_{ib} = V_{i0}$ (рис. 5). Последний факт можно объяснить тем, что скорость V_{ib} приблизительно определяется суммой скорости V_{i0} и некоторой скорости $V_F \approx 10$ – 12 км/с, приобретаемой за счет внутренних сил, созданных совместным действием градиента давления и электрического поля. Если скорость V_{i0}

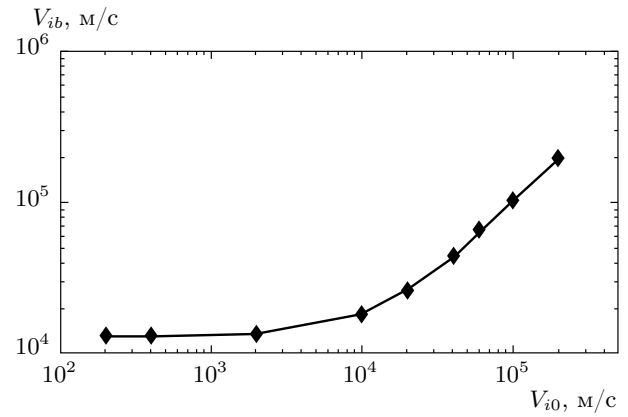


Рис. 5. Зависимость скорости движения плазменной границы от скорости инжекции ионов

сравнивается по порядку величины с V_F , то она начинает в большей степени определять значение V_{ib} . В пользу выполнения соотношения $V_{i0} \ll V_F$ в условиях функционирования взрывоэмиссионного центра говорят следующие факты. Во-первых, экспериментально измеряемые скорости расширения катодных плазменных факелов заключены в относительно узком диапазоне $\sim (1-2) \cdot 10^4$ м/с и слабо зависят от условий эксперимента [1]. Во-вторых, обратное соотношение $V_{i0} \gg V_F$ приводит к значениям удельной эрозии, значительно меньшим, чем те, которые соответствуют экспериментальным данным. В-третьих, основываясь на законах механики, трудно объяснить появление начальных скоростей ионов плазмы, значительно превышающих характерные скорости смещения тех же ионов в твердом теле в обратном направлении. Вероятно, V_{i0} не должна превышать скорости звука в твердых телах (порядка 10^3 м/с) [24].

Значительное влияние на скорость движения границы плазмы оказывают вариации параметров иона — его заряда и массы (рис. 6). Зависимость $V_{ib}(Z_i)$ в значительной мере является формальной, поскольку в реальности определенному материалу катода отвечает определенный зарядовый состав [13], управлять которым практически невозможно. В то же время эта зависимость (в достаточной мере согласующаяся с данными [3]) свидетельствует о том, что влияние материала катода на скорость расширения катодной плазмы связана не только с инерционными свойствами иона, подгоняемого «электронным ветром», но и с коллективным электростатическим взаимодействием ионов и электронов, обусловленным разделением заряда.

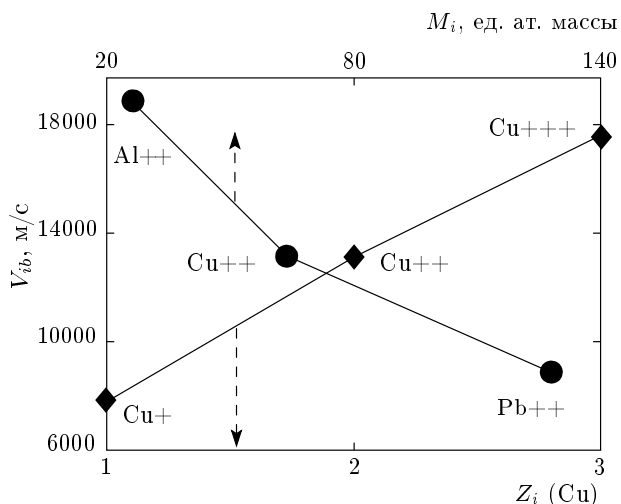


Рис. 6. Зависимости скорости движения плазменной границы от массы и зарядности ионов

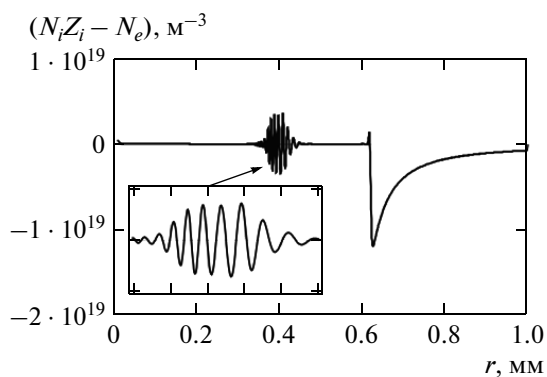


Рис. 7. Флуктуации распределения плотности объемного заряда (в единицах элементарного заряда на 1 м³) в момент времени 52 нс

Чем меньше напряжение на межэлектродном промежутке, при прочих равных условиях, тем ближе к аноду приближается граница плазмы без нарушения устойчивости. Эта тенденция согласуется с данными экспериментальных исследований, обобщенных в работе [25]. Согласно расчетам, при напряжении $U = 10$ кВ, до возникновения неустойчивости фронт плазмы успевает пройти половину промежутка, а при $U = 6$ кВ — три четверти промежутка (рис. 3). При $U = 3$ кВ плазма успевает перекрыть промежуток до того, как появится неустойчивость. В последнем случае удается также получить стационарные профили величин перекрытого плазмой промежутка.

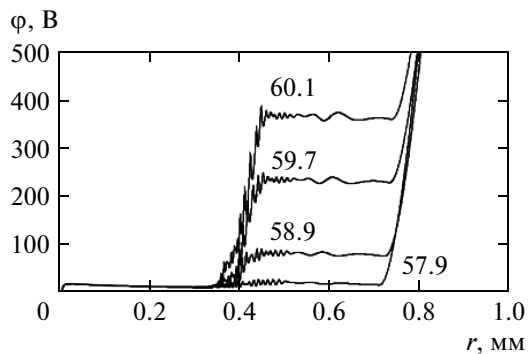


Рис. 8. Рост ступени на распределении потенциала. Числа указывают соответствующие моменты времени в наносекундах

Нарушение устойчивости инициируется внутри плазменного облака и протекает в два этапа. Первый этап длится порядка 10 нс, что также согласуется с данными [25]. Для него характерно появление волн плотности частиц на уровне, меньшем или соизмеримом с плотностью отрицательного объемного заряда, движущегося с плазменной границей, порядка 10^{-19} м⁻³ (рис. 7). Соответствующие немонотонности в виде мелкой ряби появляются также на профилях потенциала и скорости ионов. Частота колебаний является промежуточной по отношению к электронной и ионной плазменным частотам (для данной локальной концентрации и температуры). Началу зарождения колебаний соответствуют, в частности, последние 48 нс профили, представленные на рис. 1. На этом этапе колебания практически не влияют на форму и динамику всех профилей.

Второй этап развития неустойчивости существенно более динамичный. Он характеризуется резким возрастанием амплитуд колебаний на всех профилях ионов и электронов, а также ростом высоковольтной ступени на распределении потенциала со скоростью приблизительно 1 кВ/нс (рис. 8). Участок снижения проводимости плазмы (ширина подъема ступени) составляет около 50 мкм. На этом этапе начинает теряться точность расчета, что выражается в нарушении непрерывности вычисляемой суммы тока проводимости и тока смещения, а также в появлении счетных неустойчивостей, приводящих в конечном итоге к аварийному завершению расчета.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты дали несколько заниженные значения скорости движения плазменной границы по срав-

нению с экспериментально определяемыми [1]. Возможной причиной этого является сделанное предположение о наличии в потоке плазмы лишь ионов с основной зарядностью +2. На самом деле, усредненные по различным экспериментальным работам данные показывают, что в потоке ионов меди из вакуумной дуги присутствует в среднем 16% Cu^{+1} , 63% Cu^{+2} , 20% Cu^{+3} и 1% Cu^{+4} [13]. Согласно же работе [26], при малых плотностях плазмы может возникнуть эффект убегания ионов разного заряда друг относительно друга. Учитывая то, что граничная концентрация частиц относительно мала, $N_{ib} \sim 10^{-6} N_{i0}$, можно ожидать, что скорость V_{ib} в условиях высокого приложенного напряжения со значительным весом определяется более быстрыми ионами (например, Cu^{+3}) (рис. 6). Для получения более достоверных значений V_{ib} следует решать более сложную систему уравнений, описывающую многозарядный состав плазмы.

Другой причиной пониженных значений V_{ib} , полученных при расчете, может быть преувеличенный размер источника плазмы $r_0 = 10$ мкм и, соответственно, приуменьшенная концентрация на его выходе $N_{i0} = 10^{25} \text{ м}^{-3}$, несмотря на то что эти значения согласованы по величине экспериментально наблюдаемой удельной ионной эрозии. Действительно, реальный размер взрывоэмиссионного центра в самом начале расширения плазмы может быть на порядок меньшим, а плотность плазмы — соответственно на два порядка большей [1]. Если экстраполировать кривую, приведенную на рис. 4, в область высоких концентраций, порядка 10^{27} м^{-3} , можно получить значение V_{ib} , в большей степени отвечающее экспериментальному. Следуя выводам о том, что прикатодное падение напряжения имеет омическую природу [6, 19], вероятно, можно сделать уточнения значений максимальной температуры электронов и высоты горба потенциала в рамках двухкомпонентной модели, формально распространив ее в область малых масштабов с катодной границей $r_0 \approx 1$ мкм.

В целом результаты расчетов показали, что скорость V_{ib} наиболее чувствительна к параметрам иона — его заряду и массе. Остальные параметры задачи в диапазоне физически обоснованных значений оказывают на нее весьма слабое влияние. Среди них (в скобках показаны диапазоны варьирования) — напряжение источника питания U (0–10 кВ), температура катодной поверхности T_0 (3000–8000 К), время «включения» взрывоэмиссионного центра τ_N (0.5–5 нс), его размер (10^{-4} – 10^{-5} м) и его эффективность. Последняя, в свою очередь, определяется скоростью инжекции V_{i0} и граничной концентраци-

ей N_{i0} . Слабая зависимость V_{ib} от V_{i0} (20–2000 м/с) и N_{i0} (10^{23} – 10^{25} м^{-3}) указывает также на то, что количество взрывоэмиссионных центров на катодной поверхности, которое может изменяться в ходе расширения плазменного факела, не сильно влияет на установление скоростного режима «передних» ионов.

Слабая зависимость формы стационарных профилей плазмы от условий на поверхности центрального плазменного источника и от его размеров при сверхзвуковом разгоне ионов доказана в теории солнечного ветра [27]. Эти закономерности свойственны и стационарной катодной плазме [4]. В настоящей работе показано, что характерное время формирования стационарного профиля при коммутации миллиметрового промежутка может оказаться значительно большим, чем само время коммутации, однако при этом параметры источника ионов также слабо влияют и на динамические свойства расширяющегося облака.

Область значений начальных скоростей $V_{i0} \gg \gg 1000$ м/с, выходящих за рамки условия разгона ионов от дозвуковых до сверхзвуковых скоростей, согласно работе [28], не соответствует физическим условиям во взрывоэмиссионном центре. В то же время в случае лазерной абляции, как показано в работе [29], скорость V_{ib} оказывается существенно зависимой от мощности лазерного излучения, начиная уже от пороговых значений. Вероятно, в этом случае плазменный источник обладает существенно иными характеристиками, чем те, которыми обладает взрывоэмиссионный центр.

Расчеты, проведенные в настоящей работе при отсутствии напряжения на промежутке, в большей степени соответствуют условиям экспериментов в «открытом» пространстве [14, 30], где плазма производится поджиганием дуги на коротком зазоре. Однако это соответствие не совсем точное, несмотря на то что рассчитанная скорость движения плазменной границы оказалась близкой к данным [14]. Электронное облако, формирующееся в вакууме за границей плазмы, создает яму потенциала и, соответственно, небольшое ускоряющее поле в сторону внешнего электрода. По мере расширения плазмы это поле усиливается, а длина экранирования увеличивается, что приводит к «растягиванию» электронного облака. В результате граница электронного облака движется ускоренно. После того как она достигает анода, в замкнутой (через сопротивление 50 Ом) цепи возникает ток, и потенциал внешнего электрода снижается.

Из экспериментов известно, что коммутацион-

ная стадия вакуумного пробоя может протекать устойчиво в условиях монотонно возрастающего тока, но при определенных условиях коммутационные процессы становятся неустойчивыми [1, 25]. При этом они сопровождаются всплесками тока, эмиссией сверхэнергичных ионов [31], резким изменением динамики роста яркости катодного пятна до окончания коммутационного периода [32] и разрывом проводимости внутри катодной плазмы [1, 31]. Настоящие расчеты показали возможность зарождения неустойчивостей внутри плазмы при стабильных граничных условиях после некоторого периода ее стабильного расширения. При этом такие неустойчивости не связаны с ограничением поставки электронов из плазмы к плазменной границе, что вызвало бы переход проводимости виртуального сферического диода к режиму насыщения. Более того, в ходе раскачки неустойчивости, по крайней мере в течение первых 10 нс, параметры границы плазмы и ее динамика не претерпевают каких-либо существенных изменений. Установленные факты подтверждают выводы работы [31], где наблюдаемые неустойчивости объяснялись коллективными взаимодействиями электронов и ионов. В то же время эти факты не опровергают точку зрения авторов [33], согласно которой появление неустойчивостей может быть связано с неравномерностью поступления материала катода в промежуток в ходе взрывных процессов. Эффективность такого механизма в дальнейшем предполагается проверить в рамках изложенной модели при наложении нестационарных условий инжекции ионов.

Нарушение режима устойчивого расширения катодного факела, вероятно, следует отнести к категории пучковых неустойчивостей [34], поскольку направленная скорость электронов намного превышает скорость ионов. Раскрытие механизма появления неустойчивостей представляет собой самостоятельную задачу и находится за пределами данного теоретического исследования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовалась коммутационная стадия пробоя в пространстве миллиметрового вакуумного промежутка с позиции модели двухжидкостной гидродинамики. Есть основания предполагать принципиальную возможность расширения модели (1)–(4) от двухкомпонентной до многокомпонентной и включения в нее процессов ионизации, рекомбинации и перезарядки атомных частиц.

Расчеты показали, что при параметрах источника плазмы, соответствующих экспериментальным, прикатодный участок профиля концентрации, близкий к распределению $N_p \sim r^{-2}$, обладает скоростью расширения, значительно меньшей скорости расширения границы плазмы, формирующейся на уровне концентраций $\sim 10^{18}$ – 10^{19} м⁻³. Скорость границы плазмы слабо зависит от интенсивности поставки ионов из катода, но довольно сильно зависит от зарядового и массового составов плазмы. Расчеты подтвердили возможность зарождения неустойчивостей внутри плазмы даже при условии стабильной поставки ионов из катода и достаточной эффективности границы самой плазмы как эмиттера электронов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ № RFMEFI60714X0008. Авторы благодарны профессорам А. В. Козыреву и Д. И. Проскуровскому за полезные дискуссии и рекомендации в ходе работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, *Импульсный электрический разряд в вакууме*, Наука, Новосибирск (1984).
2. В. В. Лоскутов, А. В. Лучинский, Г. А. Месяц, ДАН СССР **271**, 1120 (1983).
3. D. L. Shmelev and E. A. Litvinov, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. **6**, 441 (1999).
4. И. А. Кринберг, М. П. Луковникова, В. Л. Паперный, ЖЭТФ **97**, 806 (1990).
5. С. А. Баренгольц, Г. А. Месяц, Д. Л. Шмелев, ЖЭТФ **120**, 1227 (2001).
6. D. L. Shmelev and S. A. Barengolts, IEEE Trans. Plasma Sci. **41**, 1964 (2013).
7. A. Anders, in *Proc. XXVI Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum*, Mumbai, India, viii (2014).
8. S. Anders and A. Anders, J. Phys. D **21**, 213 (1988).
9. С. И. Брагинский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 1, под ред. М. А. Леонтовича, Госатомиздат, Москва (1963), с. 183.
10. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, И. Е. Сахаров, *Основы физики плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).

11. H. Dreicer, *Phys. Rev.* **115**, 238 (1959).
12. Б. А. Трубников, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 1, под ред. М. А. Леонтовича, Госатомиздат, Москва (1963), с. 98.
13. A. Anders, *Phys. Rev. E* **55**, 969 (1997).
14. G. Yu. Yushkov, A. Anders, E. M. Oks, and I. G. Brown, *J. Appl. Phys.* **88**, 5618 (2000).
15. S. A. Popov, D. I. Proskurovsky, and A. V. Batrakov, in *Proc. 19th Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum*, Xi'an, China (2000), p. 81.
16. V. A. Ivanov, B. Juttner, and H. Pursch, in *Proc. 19th Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum*, Berlin, GDR (1984), p. 157.
17. Г. А. Месяц, *УФН* **165**, 601 (1995).
18. D. L. Shmelev and S. A. Varengolts, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **41**, 1959 (2013).
19. Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, А. Г. Парфенов, *ДАН СССР* **310**, 344 (1990).
20. I. Langmuir and K. B. Blodgett, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 49 (1924).
21. Е. А. Литвинов, в сб. *Мощные наносекундные импульсные источники ускоренных электронов*, под ред. Г. А. Месяца, Наука, Новосибирск (1974), с. 23.
22. J. E. Daalder, *J. Rhy. D* **9**, 2379 (1976).
23. C. W. Kimblin, *J. Appl. Phys.* **44**, 3074 (1973).
24. Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, А. Г. Парфенов, *ДАН СССР* **320**, 319 (1991).
25. С. П. Бугаев, Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, *УФН* **115**, 101 (1975).
26. Б. Я. Мойжес, В. А. Немчинский, *ЖТФ* **50**, 78 (1980).
27. E. N. Parker, *Space Sci. Rev.* **4**, 666 (1965).
28. И. И. Бейлис, М. П. Зекцер, Г. А. Любимов, *ЖТФ* **58**, 1861 (1988).
29. F. Claeysens, S. J. Henley, and M. N. R. Ashfold, *J. Appl. Phys.* **94**, 2203 (2003).
30. Р. Б. Бакшт, Н. А. Ратахин, Б. А. Каламбаев, *ЖТФ* **50**, 487 (1980).
31. Е. Д. Короп, А. А. Плютто, *ЖТФ* **40**, 2534 (1970).
32. R. Methling, S. A. Popov, A. V. Batrakov et al., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **41**, 1904 (2013).
33. Г. П. Баженов, О. Б. Ладыженский, Е. А. Литвинов, С. М. Чесноков, *ЖТФ* **47**, 2086 (1977).
34. М. В. Незлин, *Динамика пучков в плазме*, Энергоиздат, Москва (1982).