

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ НЕЙТРОНОВ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ РЕШЕТКЕ

В. А. Бушув^{a*}, *А. И. Франк*^b, *Г. В. Кулин*^b

^a *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

^b *Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 июня 2015 г.

В рамках приближения связанных медленно меняющихся амплитуд волновых функций развита многоволновая динамическая теория дифракции ультрахолодных нейтронов на движущейся фазовой решетке. Проанализировано влияние скорости движения решетки, ее периода, высоты штрихов и спектрально-углового распределения интенсивности падающих нейтронов на дискретный энергетический спектр и интенсивности дифракционных отражений различных порядков.

DOI: 10.7868/S0044451016010041

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты, в которых впервые наблюдалась дифракция тепловых нейтронов в кристаллах [1–4], явились первыми прямыми свидетельствами предсказанного в [5] наличия у нейтрона волновых свойств. Много позже были осуществлены классические эксперименты по наблюдению дифракции тепловых нейтронов на оптической дифракционной нарезной решетке при скользящем падении [6]. Впоследствии дифракционное отражение от гравированной решетки наблюдалось также и для холодных нейтронов [7].

С появлением источников длинноволновых нейтронов — от холодных ($\lambda \approx 20 \text{ \AA}$) до ультрахолодных нейтронов (УХН, $\lambda \approx 10^3 \text{ \AA}$), экспериментальные возможности существенно расширились. В работе [8] наблюдалась дифракция квазимонохроматических нейтронов с длинами волн порядка 20 \AA при нормальном падении на амплитудную дифракционную решетку с периодом 60 мкм , причем удалось зарегистрировать дифракционные пики вплоть до третьего порядка.

Специально для нейтронно-оптических экспериментов с УХН был создан гравитационный дифрактометр, в котором использовалась отражательная

гравированная решетка с блеском в первом порядке дифракции с соизмеримым для длины волны нейтронов 1500 \AA периодом, приблизительно равным 8300 \AA [9, 10].

В начале 1980 гг. появилась идея о создании нейтронного интерферометра, действие которого основано на разделении и последующем совмещении нейтронных пучков при дифракции на решетках. В работе [11] обсуждалась схема интерферометра для тепловых нейтронов с решетками в геометрии на отражение. Позднее такой прибор был создан для нейтронов с $\lambda = 3.15 \text{ \AA}$ [12], однако величина пространственного разведения пучков ($\approx 0.8 \text{ мм}$) оказалась слишком малой для практического применения. Более перспективными оказались схемы интерферометров типа Маха–Цендера с тремя параллельно расположенными фазовыми решетками в геометрии на пропускание. Об опыте создания и исследовании таких интерферометров для очень холодных нейтронов на основе решеток с периодом $1\text{--}2 \text{ мкм}$ сообщалось в работах [13–15]. Использование специальных полимерных структур позволило создать нейтронные интерферометры на основе голографических решеток с дифракционными эффективностями $\approx 70\%$ на длине волны 15 \AA [16] и $\approx 90\%$ при $\lambda = 41 \text{ \AA}$ [17], что почти на порядок превосходит эффективности решеток в работах [11, 12].

Долгое время дифракция нейтронных волн, как и большинство иных нейтронно-оптических явлений, рассматривалась под углом зрения demonstra-

* E-mail: vabushuev@yandex.ru

ции волновых свойств нейтрона и проверки предсказаний стационарной квантовой механики. Вместе с тем нейтронная оптика приобретает существенно новые качества в тех случаях, когда какие-либо параметры, описывающие взаимодействие нейтронного пучка с объектами, начинают зависеть от времени. Нестационарные воздействия на нейтронную волну позволяют существенным образом менять такие ее характеристики, как энергетический спектр, спин, интенсивность, фаза, направление распространения и т. п. Помимо самостоятельного фундаментального интереса эти исследования привели к появлению новых экспериментальных методов и квантовых устройств.

Теоретический анализ нестационарных явлений в оптике массивной частицы впервые был проведен, по-видимому, в работе [18], в которой исследовалась эволюция волновой функции массивной частицы при мгновенном удалении поглощающего затвора из монохроматического пучка. С использованием формальной аналогии с пространственной дифракцией Френеля на краю экрана в работе [18] был введен термин «дифракция во времени». В работе [19] рассматривалась возможность наблюдения нестационарных явлений при прохождении УХН через зависящий от времени потенциальный барьер и при взаимодействии со слабым осциллирующим потенциалом. Более детально временная зависимость интенсивности нейтронов различных энергий и их энергетические спектры при прохождении через различного рода квантовые прерыватели исследовались в ряде последующих теоретических работ [20–28] и в эксперименте [29].

В работе [30] наблюдалось квантование энергетического спектра поляризованных нейтронов при взаимодействии с осциллирующим во времени магнитным полем. В работах [31, 32] рассмотрен ряд нестационарных нейтронно-оптических явлений, возникающих при отражении и преломлении нейтронов на границах вещества с переменной магнитной индукцией. Отражение очень холодных нейтронов от вибрирующей поверхности наблюдалось в работе [33]. При малых частотах колебаний это явление может рассматриваться как классическое. В то же время, при большой частоте и малой амплитуде оно становится существенно квантовым.

В определенных условиях дифракция нейтронов также может рассматриваться в качестве нестационарного явления. Так, в работе [34] дифракция УХН на поверхностных рэлеевских волнах рассматривалась в качестве причины неупругого рассеяния нейтронов, приводящего к уменьшению времени хра-

нения УХН в ловушках. Это явление может трактоваться и как доплеровский сдвиг частоты нейтронной волны. Спустя примерно десять лет в работе [35] наблюдалась дифракция холодных нейтронов ($\lambda \approx 11 \text{ \AA}$ и $\lambda \approx 17 \text{ \AA}$) на поверхностной акустической волне, которая возбуждалась на поверхности кварцевой пластины. Из теоретического анализа следовало, что сдвиг энергии нейтронов, соответствующий первым порядкам дифракции, составлял примерно 10^{-7} эВ по отношению к исходной. Такое изменение энергии было почти на три порядка меньше самой энергии и, строго говоря, в опыте не измерялось. Однако угловое распределение дифрагированных волн хорошо совпадало с результатами квантового расчета, в котором скорость поверхностной волны являлась важным параметром. В работе [36] наблюдалась брэгговская дифракция нейтронов на кристалле, на поверхности которого возбуждалась ультразвуковая волна.

Воздействие ультразвука на дифракцию нейтронов в мозаичных кристаллах исследовалось в работе [37]. В работах [38, 39] теоретически исследовалась дифракция УХН на поверхностных волнах вязкой жидкости, что представляет значительный интерес для задачи долговременного хранения нейтронов, особенно после открытия так называемого малого нагрева УХН.

Спустя почти двадцать лет после появления работы [34] эффект изменения энергии нейтронов при дифракции на движущейся решетке фактически был заново предсказан в работе [40]. Было показано, что в случае движения поглощающей или фазовой решетки поперек пучка УХН решетка может действовать в качестве квантового модулятора прошедшей волны, дискретным образом изменяющего спектр проходящих через нее нейтронов. Вскоре появилось предложение [41] об использовании движущихся решеток в нейтронном интерферометре, что может увеличить его чувствительность.

Предсказанный в работе [40] эффект квантового расщепления спектра был обнаружен в эксперименте [42] и более детально исследован в работе [43]. Позже это явление нашло свое применение в экспериментах [44–46] по проверке слабого принципа эквивалентности для нейтрона. Аперiodическая движущаяся решетка может служить нейтронной временной линзой, с помощью которой можно фокусировать нейтроны во времени. Возможность такой фокусировки была предложена в статье [47] и впоследствии была продемонстрирована экспериментально в [48, 49]. В относительно недавней работе [50] обсуждалась возможность замедления и

ускорения нейтронов с помощью решетки с блеском в первом порядке. Был продемонстрирован плавный переход от квантового рассмотрения проблемы к классическому при постепенном увеличении размеров решетки, превращающем ее в систему макроскопических призм. Укажем еще на теоретическую работу [51], посвященную дифракции нейтронов и электромагнитных волн на движущейся решетке. В ней авторы ограничились лишь анализом возможных направлений дифрагированных волн в случае простейшей гармонической решетки, причем в кинематическом приближении.

Остановимся несколько подробнее на теоретических аспектах проблемы дифракции нейтронов на решетках. В работах [40, 42, 43] дифракция УХН на движущейся решетке рассматривалась в рамках кинематического приближения, в котором решетка фактически полагается плоским объектом. В целом это приближение удовлетворительно объясняло полученные экспериментальные результаты, однако не вполне правильно описывало интенсивности разных порядков дифракции и их зависимости от скорости движения решетки, от высоты и периода штрихов. Хотя в работе [52] обращалось внимание на то обстоятельство, что трехмерный характер структуры движущейся решетки должен приводить к отличиям от количественных предсказаний [40], последняя долгое время оставалась основой для планирования экспериментов. Практическое использование явления дифракции УХН на движущейся дифракционной решетке требует создания как более корректной теории, так и новых экспериментальных исследований. Очень важно получить информацию об интенсивностях линий всех низших дифракционных порядков, их взаимосвязи и возможностях оптимизации интенсивностей заданных линий.

Строгая, т. е. без каких-либо приближений, теория дифракции на решетках достаточно полно развита для оптического диапазона электромагнитных волн (см., например, [53–58]). Необходимость в таком строгом рассмотрении обусловлена тем, что показатель преломления оптического излучения заметно больше единицы, поэтому принципиально следует учитывать отражения от границ раздела и многократные переотражения внутри трехмерной решетки, что, помимо зеркального отражения, приводит к появлению различных порядков дифракции в верхнем и нижнем полупространствах.

Существуют два основных подхода, полностью эквивалентных с точки зрения физической постановки задачи, но различающиеся методами решения уравнений Максвелла в оптике или уравне-

ния Шредингера в оптике массивных частиц. Это метод связанных волн (the coupled-wave approach) [53–57, 57] и фурье-модальный метод (the modal approach) [55, 58]. Решение задачи сводится к решению бесконечных систем дифференциальных или алгебраических уравнений. Рассматривались гармонические слоистые среды с произвольным наклоном слоев к поверхности [53–55], решетки с прямоугольным [57] и произвольным профилями [56, 58]. Следует также отметить недавнюю публикацию [59], в которой модальный подход был применен для описания динамической дифракции нейтронов на решетке с прямоугольным профилем при падении нейтронов с углами скольжения вблизи угла полного внешнего отражения практически вдоль направления каналов решетки. Показано, что при этом может реализоваться режим каналирования нейтронов вдоль этих каналов. В работе [55] содержится доказательство эквивалентности двух названных выше подходов, а также приведен краткий анализ как минимум шести различных приближений, используемых при решении задачи о дифракции света на решетке, основным из которых является пренебрежение вторыми производными от амплитуд полей по глубине решетки.

В настоящей работе задача о дифракции УХН на фазовой решетке анализируется, как и ранее [34, 40, 42, 43, 52], в движущейся системе координат, в которой решетка покоится. Для перехода в лабораторную систему координат достаточно выполнить галилеевское преобразование волновой функции нейтронов. В работе приводятся результаты по развитию многоволновой динамической теории дифракции нейтронов на движущейся решетке, которая основана на решении уравнения Шредингера с трехмерным потенциалом взаимодействия нейтронов с веществом методом медленно меняющихся связанных амплитуд. Такой подход естественным образом учитывает взаимное влияние волн разных порядков по мере прохождения нейтронов в глубь трехмерной фазовой решетки и приводит к лучшему согласию с экспериментами. Проанализировано влияние скорости движения решетки, ее периода, высоты штрихов и спектрально-углового распределения интенсивности падающих нейтронов на дискретный энергетический спектр и интенсивности различных дифракционных порядков. Используемое в теории приближение заключается в пренебрежении вторыми производными от медленно меняющихся амплитуд волновых функций нейтронов по глубине. Это приближение оправдано тем, что в экспериментах [42–46, 52] вертикальная составляющая

щая скорости нейтронов заметно превышает критическую скорость полного внешнего отражения, поэтому можно пренебречь слабым зеркальным отражением нейтронов и волнами, дифрагированными в верхнее полупространство.

2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Прежде чем переходить к изложению динамической теории дифракции нейтронов на движущейся фазовой решетке, обратимся, следуя [42–44], к простейшему кинематическому приближению и рассмотрим основные особенности формирования движущейся решеткой квантового состояния нейтронов с дискретным энергетическим спектром.

В лабораторной системе координат волновая функция плоской нейтронной волны, падающей с единичной амплитудой на решетку, имеет следующий вид:

$$\Psi_{in}(x, z, t) = \exp[i(k_{0x}x + k_{0z}z - \omega_0 t)], \quad (1)$$

где $k_{0x} = MV_{0x}/\hbar$, $k_{0z} = MV_{0z}/\hbar$, V_{0x} и V_{0z} — тангенциальная и нормальная компоненты скорости нейтронов, M — масса нейтрона, \hbar — постоянная Планка, $\omega_0 = \hbar k_0^2/2M$ — частота, $k_0 = (k_{0x}^2 + k_{0z}^2)^{1/2}$ — модуль волнового вектора. В отличие от цитированных выше работ, здесь изначально рассмотрен более общий случай наклонного падения нейтронов на решетку. Полагая, что штрихи решетки ориентированы вдоль оси y , мы исключили из рассмотрения компоненту волнового вектора k_{0y} , наличие которой не влияет на результат. Везде ниже будем рассматривать только прошедшие волны.

Дифракция нейтронов на неподвижной решетке приводит к появлению плоских волн разных порядков с x -проекциями волновых векторов $k_{mx} = k_{0x} +$

$+ g_m$, где $g_m = mg_0$, $g_0 = 2\pi/d$ — величина вектора обратной решетки, d — пространственный период решетки, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целые числа (рис. 1а). В силу упругости процесса дифракционного рассеяния нейтронов волновые числа и частоты всех дифрагированных волн одинаковы: $k_m = k_0$, $\omega_m = \omega_0$.

Пусть теперь решетка движется с постоянной скоростью V_{gr} в положительном направлении вдоль оси x (рис. 1б). Перейдем в движущуюся систему координат (x', z) , в которой решетка покоится. В этой системе нейтроны падают на решетку уже под другим углом, а также с другим волновым числом и с другой энергией:

$$\Psi'_{in}(x', z, t) = A_{in}(x') \exp[i(k_{0z}z - \omega' t)], \quad (2)$$

где

$$A_{in}(x') = \exp(ik'_{0x}x'), \quad (3)$$

$$k'_{0x} = k_{0x} - k_V, \quad k_V = \frac{MV_{gr}}{\hbar},$$

$$\omega' = \frac{\hbar k_0'^2}{2M}, \quad k_0' = (k_{0x}'^2 + k_{0z}^2)^{1/2}.$$

Волновую функцию нейтронов, прошедших через решетку, в движущейся системе координат в области $z > h$, где h — толщина решетки, можно представить в виде стандартного разложения по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \Psi'(x', z, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(q) \exp[iqx' + ik_z(z - h) - i\omega' t] dq, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_z = (k_0'^2 - q^2)^{1/2}$, $F(q)$ — угловой спектр функции $F(x) = A_{in}(x)T(x)$, $T(x)$ — функция пропускания решетки. В случае периодической решетки функцию $T(x)$ можно представить в виде ряда

$$T(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(igmx), \quad (5)$$

где

$$a_m = \frac{1}{d} \int_0^d T(x) \exp(-igmx) dx. \quad (6)$$

С учетом (3) и (5) для углового спектра $F(q)$ в (4) получим выражение

$$F(q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \delta(q - k_{mx} + k_V). \quad (7)$$

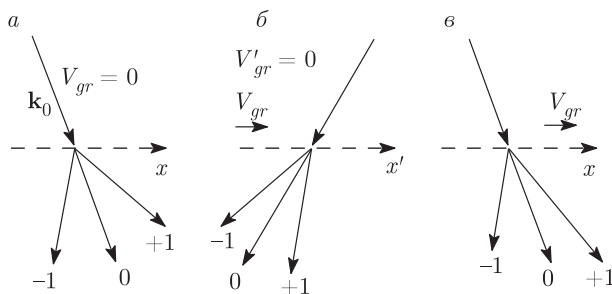


Рис. 1. Схемы дифракции УХН на решетке: а — неподвижная решетка, $\omega_m = \omega_0$; б — система координат движется вместе с решеткой, $\omega_m = \omega'$; в — движущаяся решетка в лабораторной системе координат, $\omega_m = \omega_0 + m\Omega$

Подстановка соотношения (7) в интеграл (4) приводит к следующему выражению для волновой функции дифрагированных нейтронов (4):

$$\Psi'(x', z, t) = \sum_m a_m \exp [i(k'_{mx}x' + k_{mz}(z - h) - \omega't)], \quad (8)$$

где $k'_{mx} = k_{mx} - k_V$,

$$\begin{aligned} k_{mx} &= k_{0x} + g_m, \\ k_{mz} &= [k_{0z}^2 + 2(k_V - k_{0x})g_m - g_m^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь, как и в случае неподвижной решетки, волновые числа $k'_m = k'_0$ и частоты ω' волн различных порядков дифракции одинаковы, но из-за движения решетки они отличаются, соответственно, от k_0 и от ω_0 (рис. 1б). Относительные интенсивности порядков дифракции определяются выражениями $I_m = |a_m|^2$. Отметим также, что для произвольной периодической фазовой (т.е. не поглощающей) решетки выполняется условие сохранения потока $\sum_m I_m = 1$.

Переходя теперь в выражении (8) в лабораторную систему координат $x = x' + V_{gr}t$, получим волновую функцию дифрагированных нейтронов в виде суперпозиции плоских волн с амплитудами A_m , дискретными частотами ω_m и волновыми векторами $\mathbf{k}_m = (k_{mx}, k_{mz})$ (рис. 1в):

$$\Psi(x, z, t) = \sum_m A_m \exp [i(k_{mx}x + k_{mz}z - \omega_m t)], \quad (10)$$

где проекции k_{mx} и k_{mz} определены в (9), а частоты $\omega_m = \omega_0 + m\Omega$. Для величины спектрального расщепления Ω справедливы следующие эквивалентные выражения:

$$\Omega = 2\pi/\tau = g_0 V_{gr}, \quad (11)$$

где $\tau = d/V_{gr}$. Подчеркнем, что волны с разными порядками m в (10) никак не связаны и не влияют друг на друга.

Остающееся справедливое соотношение $\sum_m |a_m|^2 = 1$ теперь не является демонстрацией сохранения потока, поскольку волновые числа k_m для волн разных дифракционных порядков различаются. Амплитуды волн A_m в (10) в лабораторной системе определяются из условия сохранения потока $\mathbf{j}(z < 0) = \mathbf{j}(z > h)$, где $\mathbf{j} = (i\hbar/2M)(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$:

$$A_m = a_m \left(\frac{k_{0x}^2 + k_{0z}^2}{k_{mx}^2 + k_{mz}^2} \right)^{1/4}. \quad (12)$$

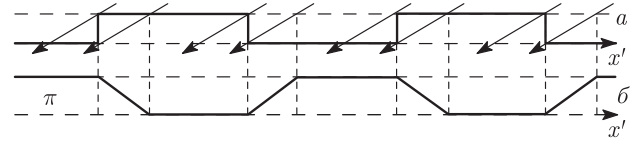


Рис. 2. а — Профиль решетки. б — Профиль фазы

Рассмотрим прямоугольную решетку с шириной штрихов $d/2$ и высотой h такой, что разность фаз $\Delta\varphi = k_{0z}(1 - n)h = \pi$, где n — показатель преломления нейтронов. Из формулы (6) следует, что при нормальном падении нейтронов для амплитуд четных порядков, включая нулевой, выполняется равенство $a_m = 0$, а амплитуды нечетных порядков равны $a_m = 2i/\pi m$ и монотонно уменьшаются с увеличением номера порядка m . В рассматриваемом приближении они не зависят от скорости движения решетки.

Из соотношений (11) видно, что для увеличения спектрального расщепления $\Omega = 2\pi V_{gr}/d$ необходимо увеличивать скорость движения решетки V_{gr} и (или) уменьшать величину периода d . Однако из-за наклонного падения нейтронов при увеличении скорости V_{gr} профиль фазы меняется и принимает вид трапеций [52] (рис. 2). Поэтому движение решетки приводит к появлению краевого эффекта и, как следствие, к иным выражениям для амплитуд дифракционных порядков. С использованием соотношения (6) можно показать, что для четных порядков $a_m = cB_m$, а для нечетных $a_m = -B_m/m$, где

$$B_m = \frac{1 + \exp(-i\pi m c)}{i\pi(1 - m^2 c^2)}. \quad (13)$$

Здесь, как и в работе [52], введен безразмерный параметр

$$c = 2h(V_{gr} - V_{0x})/dV_{0z}.$$

При $c \ll 1$ краевой эффект достаточно мал и амплитуды a_m близки к приведенным выше выражениям для случая нормального падения. При величине параметра $c = 1$ профиль фазы принимает треугольный вид. В случае движущейся решетки ($c \neq 0$) амплитуды нулевого и четных порядков уже не равны нулю, интенсивности соответствующих волн I_m увеличиваются с увеличением параметра c , тогда как интенсивности волн нечетных порядков, напротив, уменьшаются (см. также рис. 3). В эксперименте [44] действительно наблюдалось уменьшение интенсивности минус первого порядка с увеличением скорости решетки (см. рис. 3 в работе [44]).

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Необходимость более строгого описания картины, возникающей при дифракции нейтронов на движущейся решетке, диктуется не только теоретическим интересом к явлению, но и потребностями конкретных экспериментов с ультрахолодными нейтронами. Как уже отмечалось во Введении, квантовая модуляция нейтронной волны движущейся решеткой является методической основой экспериментов по проверке принципа эквивалентности для нейтрона [44–46]. В настоящем разделе излагаются результаты динамической теории дифракции нейтронов на движущейся фазовой решетке. Они получены в рамках определенных допущений, оправданных условиями этих экспериментов. Теория основана на методе связанных медленно меняющихся амплитуд волновых функций и учитывает взаимное влияние волн разных порядков по мере прохождения нейтронов в глубь трехмерной фазовой решетки.

Распространение нейтронов в среде описывается уравнением Шредингера

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + [k^2 - \chi(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (14)$$

где Δ — оператор Лапласа, k — волновое число нейтронов в вакууме, $\chi(\mathbf{r}) = 4\pi N(\mathbf{r})b(\mathbf{r})$, $N(\mathbf{r})$ — плотность ядер, $b(\mathbf{r})$ — длина когерентного рассеяния нейтронов в среде. Представим периодическую в области $0 \leq z \leq h$ функцию $\chi(x)$ в виде ряда

$$\chi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n \exp(ig_n x), \quad (15)$$

где, как и ранее, $g_n = ng_0$, $g_0 = 2\pi/d$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целые числа, а

$$\chi_n = \frac{1}{d} \int_0^d \chi(x) \exp(-ig_n x) dx. \quad (16)$$

Нулевая фурье-амплитуда χ_0 определяет величину среднего показателя преломления решетки $n_e = (1 - \chi_0/k^2)^{1/2}$ в слое толщиной h .

Как и ранее, решение дифракционной задачи будем искать в движущейся системе координат. Волновую функцию нейтронов в области $0 \leq z \leq h$ запишем, с учетом (2) и (3), в виде суммы блоховских функций с амплитудами $\Psi_m(z)$, зависящими от вертикальной координаты z :

$$\Psi'(x', z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi_m(z) \exp[i(q_{mx}x' + q_{0z}z)], \quad (17)$$

где проекции волновых векторов

$$q_{mx} = k_{0x} - k_V + g_m, \quad q_{0z} = (k_{0z}^2 - \chi_0)^{1/2}. \quad (18)$$

Здесь при получении выражения для q_{0z} в (17) учтено, что волновое число падающих нейтронов

$$k' = [(k_{0x} - k_V)^2 + k_{0z}^2]^{1/2}$$

и в усредненной решетке $q_0 = k'n_e$.

Подставим (15) и (17) в (14) и приравняем члены с одинаковыми экспонентами. В итоге получим следующую бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2\Psi_m}{dz^2} + 2iq_{0z} \frac{d\Psi_m}{dz} - \alpha_m \Psi_m - \sum_{n \neq 0} \chi_n \Psi_{m-n} = 0, \quad (19)$$

где

$$\alpha_m = g_m [g_m - 2(k_V - k_{0x})]. \quad (20)$$

Система (19) получена без каких-либо приближений. Ее решение в общем случае представляет собой достаточно трудоемкую задачу и осуществляется численными методами в рамках строгого метода связанных волн [54–57] или эквивалентного ему по строгости фурье-модального подхода [55, 58, 59].

Задача существенно упрощается, если в системе (19) пренебречь вторыми производными. Можно показать, что условием малости их вклада является соотношение $\chi_1 \ll 4q_{0z}^2$. В экспериментальных условиях [42–46] оно с разумной точностью выполняется ($\chi_1/4q_{0z}^2 \approx 0.06$). Известно, что пренебрежение вторыми производными автоматически означает пренебрежение зеркальным отражением волн и дифракционным рассеянием в область отрицательных z , а также многократными переотражениями от границ раздела решетки в области $0 \leq z \leq h$. В условиях указанных выше экспериментов, когда френелевский коэффициент отражения составляет примерно 0.6%, это не должно привести к серьезным ошибкам.

В итоге получим следующую систему укороченных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Psi_m}{dz} = -i\gamma_m \Psi_m - i \sum_{n \neq 0} \beta_n \Psi_{m-n}, \quad (21)$$

где $\gamma_m = \alpha_m/2q_{0z}$, $\beta_n = \chi_n/2q_{0z}$. Систему (21) необходимо дополнить следующими граничными условиями: $\Psi_0(z=0) = 1$, $\Psi_{m \neq 0}(z=0) = 0$.

Система укороченных уравнений вида (21) широко используется в оптике слоистых сред [53]. Аналогичные уравнения были получены Такаги [60] для описания динамической дифракции электронов и рентгеновских лучей в кристаллах с малыми искажениями кристаллической структуры. Некоторые

отличия явного вида входящих в (21) коэффициентов от соответствующих выражений в других публикациях обусловлены спецификой законов дисперсии $q(\omega)$ для электромагнитных волн, электронов и нейтронов.

Если, как это сделано, например, в работе [53], умножить систему (21) для амплитуд $\Psi_m(z)$ и $\Psi_m^*(z)$ на комплексно-сопряженные амплитуды, просуммировать их по всем m и вычесть из одной суммы другую, то с учетом граничных условий в случае непоглощающей среды получим закон сохранения

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\Psi_m(z)|^2 = 1. \quad (22)$$

Это соотношение выполняется в любой произвольной плоскости z , хотя по мере увеличения координаты происходит перекачка потока из одних порядков дифракции в другие.

Отметим, что задание в (17) выражения для q_{0z} в виде (18) приводит к правильному результату по сравнению с выражением $q_{0z} \approx k_{0z} - \chi_0/2k_0$, которое обычно следует из решения укороченных уравнений (21) при часто используемом начальном приближении $q_{0z} = k_{0z}$.

Из уравнений (21) видно, что, в отличие от изложенной выше простой кинематической модели, амплитуды волн произвольного m -го порядка зависят от амплитуд других порядков. Коэффициенты связи β_n , помимо номера рефлекса, определяются также материалом и формой профиля решетки и увеличиваются с уменьшением вертикальной скорости нейтронов V_{0z} . В случае прямоугольной решетки с периодом $d = d_1 + d_2$, где d_1 и d_2 — ширины соответственно выступов и канавок фурье-компоненты,

$$\chi_n = k_b^2 \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n}, \quad (23)$$

где $\xi = d_1/d$ — параметр заполнения (или скважность). Из формулы (23) следует, что $\chi_0 = \xi k_b^2$, а при $\xi = 0.5$, т. е. при равенстве $d_1 = d_2$, для четных значений n величины $\chi_n = 0$. Соотношение (23) при произвольных значениях скважности ξ представляет интерес при расчетах дифракционного отражения от решеток с регулярными или статистическими отклонениями ширин d_1 и d_2 от заданных технологических значений.

Коэффициенты γ_m в (21), а вместе с ними и функции $\Psi_m(z)$, зависят от скорости движения решетки V_{gr} , горизонтальной проекции скорости нейтронов V_{0x} , периода решетки d и порядка дифракции m . Они равны нулю как при $m = 0$, так и при условии Брэгга $2(k_V - k_{0x}) = g_m$. Система (21) ре-

шается численно, например, методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Эффективность дифракции существенным образом зависит как от величин входящих в (21) параметров, так и от толщины решетки. Подробный анализ возможных режимов дифракции содержится в работах [61, 62]. Следуя этим работам, можно ввести так называемый толщинный параметр $Q = g_0^2 h / q_{0z}$ и модуляционный параметр $\eta = \chi_1 h / 2q_{0z}$.

Ранее считалось, что приближение тонкой решетки, или область дифракции Рамана – Ната [63], реализуется при условии $Q \leq \pi/12$ [53]. Такой режим был впервые изучен в работе [63] при дифракции света на решетке, образованной в результате достаточно слабой акустооптической модуляции показателя преломления. В случае гармонической решетки отличны от нуля лишь фурье-амплитуды χ_0 и $\chi_{\pm 1}$. При этом из (21) можно получить, что интенсивности многоволновой дифракции определяются соотношением $J_m = J_{Bm}^2(2\eta)$, где J_{Bm} — функции Бесселя первого рода.

В другом предельном случае (приближение толстой решетки), когда Q достаточно велико (например, $Q > 4\pi$ [53]), передача энергии в высшие порядки дифракции затруднена и реализуется так называемый брэгговский режим. В двухволновом приближении при выполнении условия Брэгга $\alpha_{-1} = 0$ из (21) следует, что $J_0 = \cos^2 \eta$ и $J_{-1} = \sin^2 \eta$. Это так называемое маятниковое решение с полной перекачкой интенсивности из проходящей волны в дифрагированную и наоборот на глубинах z , кратных длине экстинкции $\Lambda = \pi q_{0z} / \chi_1$.

Позднее было показано [61, 62], что для характеристики перечисленных выше режимов дифракции более адекватными являются критерии, которые одновременно учитывают параметры Q и η . Это обусловлено тем, что решетка может быть, например, геометрически толстой, но с малой модуляцией потенциала, или, наоборот, тонкой, но с большой модуляцией, и т. п. Критерием режима Рамана – Ната является условие $Q\eta \leq 1$ [62], тогда как сильная брэгговская дифракция реализуется при $Q \geq 20\eta$ [61].

В следующем разделе будет показано, что при параметрах, используемых в экспериментах [42–46], произведение $Q\eta \ll 1$, т. е. выполняется условие тонкой решетки.

Что касается волновой функции нейтронов в лабораторной системе координат, то в области наблюдения $z > h$ она также определяется соотношениями (10) и (12), в которых следует заменить амплитуды a_m на величины $\Psi_m(z = h)$, полученные из решения системы уравнений (21). Условие $\text{Re}(k_{mz}) > 0$ неза-

тующего распространения волн, где z -проекции волновых векторов k_{mz} определены в (9), накладывают определенные ограничения на допустимые значения скорости движения решетки и порядков дифракции. Из сопоставления соотношений (9) и (20) следует, что это условие имеет вид $\alpha_m < k_{0z}^2$. Если, например, $k_{0x} = 0$ и $|g_m| \ll k_V$, то для положительных порядков это условие выполняется всегда, а для отрицательных — при $|m| < k_{0z}^2/2k_V g_0$. Одновременно с этим последнее условие означает, что энергия дифрагированных нейтронов неотрицательна, т. е. $|m|\Omega < \omega_0$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Перейдем к обсуждению результатов, полученных в рамках кинематического приближения и динамической теории. Вместо линейно движущейся решетки в экспериментах [42–46] использовалась вращающаяся решетка, изготовленная методом фотолитографии на поверхности кремниевого диска. На периферической области диска, имевшей форму кольца со средним радиусом R_0 и шириной ΔR , были приготовлены канавки с прямоугольным сечением и стенками, направленными вдоль радиусов. Угловой период структуры равен $\Delta\vartheta = 2\pi/N$, где N — полное число канавок. Ширина канавок равнялась половине периода. Если R — расстояние от центра диска, а f — частота его вращения, то как пространственный период $d = 2\pi R/N$, так и линейная скорость движения решетки $V_{gr} = 2\pi Rf$ пропорциональны радиусу. Отсюда следует, что спектральное расщепление соседних порядков дифракции $\Omega = 2\pi Nf$ не зависит от расстояния R и линейно увеличивается с увеличением частоты вращения диска f . Глубина канавок выбиралась таким образом, чтобы разность фаз нейтронных волн, проходящих через выступы и канавки решетки, удовлетворяла условию $\Delta\varphi = \pi$.

На рис. 3 представлены результаты расчета интенсивностей волн трех дифракционных порядков $m = 0, -1, -2$ в зависимости от безразмерного параметра $c = 2hV_{gr}/dV_{0z}$ при нормальном падении нейтронов на решетку ($V_{0x} = 0$). Расчеты интенсивностей $I_m = |a_m|^2$ проводились в рамках кинематического приближения, где амплитуды a_m определены в (13), а интенсивностей $J_m = |\Psi_m(h)|^2$ — в рамках динамической теории, где амплитуды $\Psi_m(h)$ находились в результате численного решения системы связанных уравнений (21). Следует отметить, что потоки, соответствующие разным дифракционным порядкам, разнонаправлены, и рассчитанные

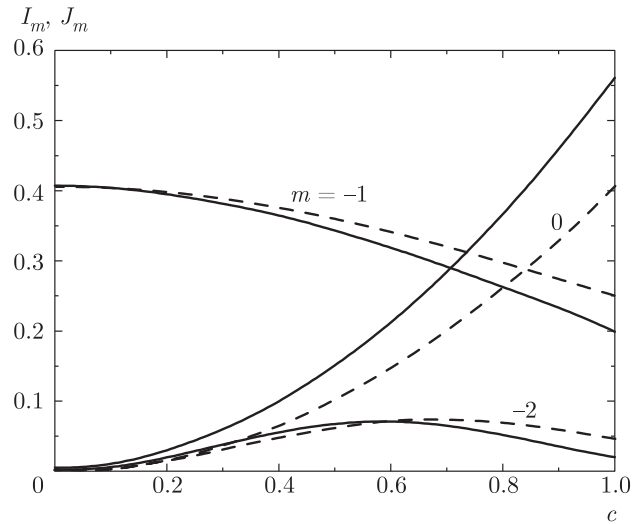


Рис. 3. Интенсивности дифракционных порядков I_m , рассчитанные в кинематическом приближении (штриховые кривые), и интенсивности J_m в рамках динамической теории (сплошные кривые) в зависимости от параметра c

таким образом интенсивности соответствуют потокам вдоль различающихся направлений.

Из рис. 3 видно, что с увеличением параметра c , т. е. с увеличением скорости решетки V_{gr} , интенсивность нулевого порядка J_0 увеличивается быстрее, чем I_0 в кинематическом приближении. Интенсивность минус первого порядка дифракции J_{-1} , рассчитанная в рамках динамической теории, убывает быстрее, чем I_{-1} . При расчетах использовались следующие данные [44]: $V_{0z} = 4.52$ м/с ($E_0 = 107$ нэВ), $h = 0.14$ мкм, $R = 6$ см, $d \approx 5$ мкм, $\xi = 0.5$. При максимальной частоте вращения диска $f = 105$ Гц скорость решетки $V_{gr} = 39.6$ м/с, что соответствует величине $c_{max} = 0.49$ и углу скольжения 6.5° по отношению к поверхности решетки в движущейся системе координат.

В условиях экспериментов [42–46] определенные в предыдущем разделе параметры равны $Q \approx 0.004$, $\eta \approx 1$, что в целом отвечает режиму дифракции Рамана–Ната. Отличие от классического определения этого режима, введенного для гармонической решетки, состоит в том, что для прямоугольной решетки необходимо учитывать большое число фурье-амплитуд χ_n в разложении (15). Поэтому интенсивности порядков J_m не описываются функциями Бесселя, а должны находиться из строгого решения системы (21). Расчеты показывают, что с увеличением толщины решетки перекачка из волн высоких порядков может приводить периодически к значительному возрастанию интенсивностей низших порядков, тогда как квадраты функций Бесселя и их

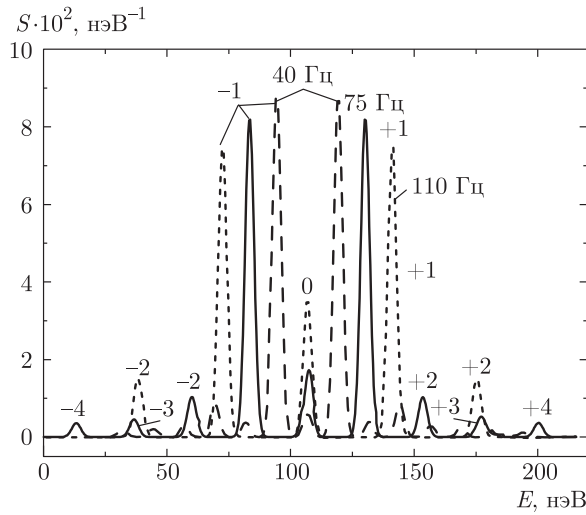


Рис. 4. Энергетические спектры $S(E)$ дифракции нейтронов при частотах вращения решетки $f = 40, 75, 110$ Гц

сумма монотонно затухают. Легко убедиться, что для решения системы уравнений (21) с точностью на уровне 0.01% достаточно ограничиться членами ряда в (15) с $|n| \leq 9$.

Перейдем к обсуждению спектрального распределения интенсивности дифракционных порядков прошедших нейтронов. В экспериментах [42–46] энергетический спектр падающих на решетку нейтронов формируется монохроматором, расположенным на малом расстоянии над решеткой. В качестве такового использовались пятислойные интерференционные фильтры [64,65] с типичной шириной пропускания (FWHM) в вертикальном направлении $\Delta V_{0z}/V_{0z} \approx 0.02$.

На рис. 4 изображены спектры нейтронов, прошедших дифракционную решетку, рассчитанные при различных частотах вращения решетки f . Исходный спектр принимался гауссовым с дисперсией $\sigma_z \approx 1.8$ нэВ, что примерно соответствует указанной выше ширине функции пропускания.

Видно, что с увеличением частоты вращения величины смещений энергетических положений максимумов и спектральное расщепление между порядками дифракции увеличиваются, интенсивности порядков дифракции с $m = \pm 1$ уменьшаются, а с $m = \pm 2$ — увеличиваются. Третий и четвертый порядки дифракции чрезвычайно слабы и начинают проявляться только при очень больших частотах вращения. В соответствии с условием (22) интегральные интенсивности всех спектров (т. е. площади под кривыми на рис. 4) равны единице.

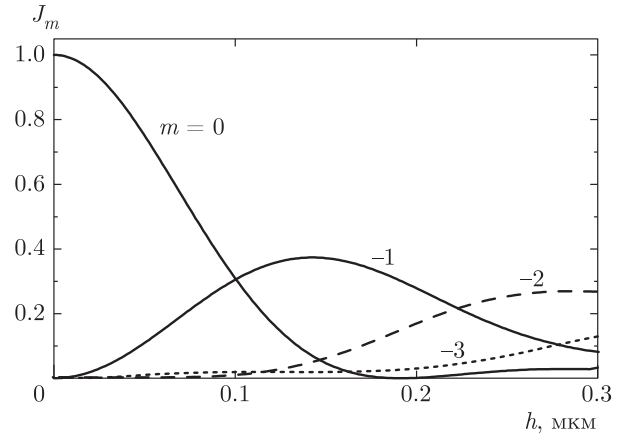


Рис. 5. Зависимости интенсивностей дифракционных порядков J_m от глубины канавок h при частоте вращения решетки $f = 75$ Гц

Следует, однако, отметить, что результаты расчета, представленные на рис. 4, не должны в точности соответствовать результатам измерений, поскольку они относятся к интенсивностям разноразмерных дифракционных пучков, в то время как скорость счета физического детектора пропорциональна проекции потока нейтронов на его ось. В частности, в обсуждаемых здесь экспериментах [42–46] детектор регистрирует z -компоненту потока, и приведенные выше интенсивности дифракционных порядков должны быть, с учетом соотношений (9), поправлены на величины

$$\cos \theta_m = \frac{k_{mz}}{(k_{mx}^2 + k_{mz}^2)^{1/2}} = \left[\frac{k_{0z}^2 + 2(k_V - k_{0x})g_m - g_m^2}{k_0^2 + 2k_V g_m} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

Прямое сравнение с экспериментом затрудняется необходимостью учитывать распределение падающих нейтронов по горизонтальным скоростям $V_{0x} = \hbar k_{0x}/M$, как правило, плохо известным.

Выше мы считали глубину канавок фиксированной ($h = 0.14$ мкм). Интересно проследить, как зависят интенсивности порядков отражения J_m от h . Из рис. 5 видно, например, что при частоте вращения $f = 75$ Гц и глубине $h_1 \approx 0.19$ мкм интенсивность нулевого порядка полностью погашена, а интенсивность минус второго порядка выросла. При значении $h = h_2 \approx 0.22$ мкм интенсивности минус первого и минус второго порядков сравниваются, а при дальнейшем увеличении глубины h главным становится минус второй порядок. Следует отметить, что вид функций $J_m(h)$ и указанные выше особенности их поведения зависят также и от частоты враще-

ния решетки f . Так, с увеличением f величины h_1 и h_2 смещаются в область несколько больших значений. Эти расчеты представляют интерес для выбора параметров решетки с наиболее оптимальными соотношениями между интенсивностями разных порядков, например, для подавления нулевого порядка или усиления минус первого порядка и т. д. Кроме того, имеется еще возможность варьирования коэффициентов связи β_n в системе (21) в результате изменения параметра скважности ξ в соотношении (23).

При рассмотрении дифракции УХН на решетке выше мы считали, что на нее падает плоская, т. е. не расходящаяся волна. В действительности же в типичных экспериментальных условиях [42–46] существует достаточно широкое распределение нейтронов по горизонтальным скоростям V_{0x} . Вид этого распределения $W(V_{0x})$, вообще говоря, неизвестен, а максимальное значение скорости V_{max} может, видимо, превышать вертикальную скорость V_{0z} . Распределение по горизонтальным скоростям может влиять на амплитуды волн $\Psi_m(h)$, поскольку величины k_{0x} входят в коэффициенты α_m (20). Однако при больших скоростях решетки $V_{gr} \gg |V_{0x}|$ этим влиянием можно, по-видимому, пренебречь, поскольку в этих условиях коэффициенты α_m в системе (21) слабо зависят от горизонтальных скоростей нейтронов.

Кроме того, как видно из формулы (9), распределение по горизонтальным скоростям непосредственно входит в распределение вертикальных скоростей, приводя к спектральному уширению соответствующих дифракционных пиков. Грубую оценку такого уширения можно получить, если аппроксимировать функцию $W(V_{0x})$ гауссовой функцией с некоторой эффективной дисперсией σ_{V_x} . Это приведет к появлению дополнительной энергетической дисперсии σ_x , которая вместе с исходной дисперсией σ_z определяет дисперсию σ_m пиков соответствующих дифракционных порядков и явный вид выражения для спектрального распределения интенсивности нейтронов:

$$S(E) = \sum_m \frac{|\Psi_m(h)|^2}{\sigma_m \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(E - E_m)^2}{2\sigma_m^2} \right], \quad (25)$$

где

$$\sigma_m^2 = \sigma_z^2 + m^2 \sigma_x^2, \quad \sigma_x = \hbar g_0 \sigma_{V_x}. \quad (26)$$

Ширины пиков σ_m в (25) не зависят от скорости решетки и увеличиваются как с увеличением номера дифракционного порядка m , так и с уменьшением периода решетки d . Предположив, что горизонтальная скорость нейтронов может быть по-

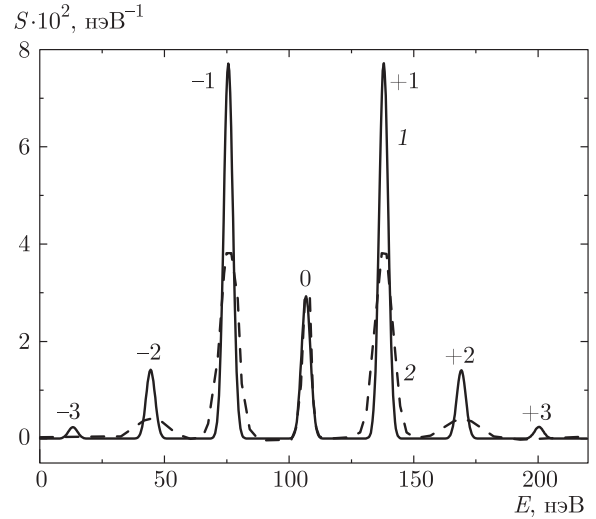


Рис. 6. Влияние величины дисперсии горизонтальной скорости падающих нейтронов на спектральное распределение нейтронов при дифракции на движущейся решетке; $\Delta V_x = 0$ (1), 9 м/с (2). Частота вращения решетки $f = 100$ Гц

рядка вертикальной, положим, что полная ширина гауссова распределения по горизонтальным скоростям (FWHM) составляет величину $\Delta V_x = 9$ м/с, откуда $\sigma_x \approx 3.2$ нэВ. Это приводит к оценке дисперсии линий первого и минус первого порядков $\sigma_{\pm 1} \approx 3.7$ нэВ и к полной ширине (FWHM) $\Delta E_{\pm 1} \approx 8.7$ нэВ, тогда как полная ширина нулевого порядка $\Delta E_0 \approx 4.3$ нэВ. Из рис. 6 видно, что учет горизонтального распределения скоростей нейтронов, падающих на решетку, приводит к некоторому уширению дифракционных пиков и, соответственно, к уменьшению интенсивностей в их максимумах.

Отметим теперь еще одно важное обстоятельство. Известно, что для уверенного наблюдения дифракции нейтронов на неподвижной решетке поток падающих нейтронов необходимо коллимировать так, чтобы их угловая расходимость $\Delta\theta \approx k_{0x}/k_0$ удовлетворяла условию $\Delta\theta \ll \Delta\theta_d$, где $\Delta\theta_d \approx \lambda/2d$ — угловое расстояние между порядками дифракции. В экспериментах [42–46] это условие заведомо не выполнялось ввиду полного отсутствия коллимации. Таким образом, $\Delta\theta \approx 1$, а при используемых значениях длины волны 0.09 мкм и периоде решетки 5 мкм величина $\Delta\theta_d \approx 0.02$. Тем не менее дифракция на движущейся решетке наблюдается вполне отчетливо, что видно также и из рис. 6.

Дело в том, что обсуждаемое явление не является, строго говоря, обычной дифракцией. Скорее всего, здесь следует говорить о нестационарном квантовом процессе, и представление о временной мо-

дуляции потока нейтронов вследствие поперечного движения периодической структуры является более адекватным физике явления. Уместным является и понятие о дифракции во времени [18]. Во всех случаях речь идет о квантовом расщеплении энергетического спектра нейтронов, которое может быть наблюденно, если величина характерного расщепления спектра $\Delta E = \hbar\Omega = \hbar g_0 V_{gr}$, пропорциональная скорости решетки, превышает ширину линии.

Впрочем, кажущийся парадокс может быть объяснен и в терминах обычной дифракции, рассматриваемой в движущейся системе координат. В этой системе уменьшенный в силу большой горизонтальной скорости угловой разброс пучка должен быть меньше угла дифракции при скользящем падении на решетку.

При любой интерпретации ключевым моментом здесь является движение решетки.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в настоящей работе вариант многоволновой динамической теории позволил более строго описать явление дифракции ультрахолодных нейтронов на движущейся фазовой решетке. Проведенный в работе анализ влияния скорости движения решетки, ее периода, материала решетки, высоты и ширины штрихов на интенсивности различных дифракционных порядков представляется полезным в связи с тем, что задача улучшения качества квантовых нейтронных модуляторов становится все более актуальной. Очень важно получить информацию об интенсивностях линий всех низших дифракционных порядков, их взаимосвязи, возможностях оптимизировать интенсивность заданной линии. С привлечением методов и подходов, развитых в статистической оптике и радиофизике, необходимо провести учет влияния на дифракцию пространственной и временной когерентности потоков нейтронов, реализуемых в реальных экспериментальных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 15-02-02367, 15-02-02509).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Halban and P. Preiswerk, *Comptes Rendus, Acad. Sci. (Paris)* **203**, 73 (1936).
2. D. P. Mitchell and P. N. Powers, *Phys. Rev.* **50**, 486 (1936).
3. W. H. Zinn, *Phys. Rev.* **71**, 752 (1947).
4. E. O. Wollan, C. G. Shull, and M. C. Marney, *Phys. Rev.* **73**, 527 (1948).
5. W. M. Elsasser, *Comptes Rendus, Acad. Sci. (Paris)* **202**, 1029 (1936).
6. H. Kurz and H. Rauch, *Z. Phys.* **220**, 419 (1969).
7. A. Graf, H. Rauch, and T. Stern, *Atomkernenergie* **33**, 298 (1979).
8. J. Baumann, J. Kalus, and W. Mampe, *Nucl. Instr. Meth. A* **284**, 184 (1989).
9. H. Schechenhofer and A. Steyerl, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1310 (1977).
10. A. Steyerl, W. Drexel, S. S. Malik, and E. Gutschiedl, *Physica B* **151**, 36 (1988).
11. А. И. Иоффе, Ю. Г. Туркевич, Г. М. Драбкин, Письма в ЖЭТФ **33**, 392 (1981) [A. I. Ioffe, Yu. G. Turkevich, and G. M. Drabkin, *JETP Lett.* **33**, 374 (1981)].
12. A. I. Ioffe, V. S. Zabiyaikin, and G. M. Drabkin, *Phys. Lett. A* **111**, 373 (1985).
13. M. Gruber, K. Eder, A. Zeilinger et al., *Phys. Lett. A* **140**, 363 (1989).
14. K. Eder, M. Gruber, A. Zeilinger et al., *Physica B: Condens. Matter* **172**, 329 (1991).
15. G. van der Zouw, M. Weber, J. Felber et al., *Nucl. Instr. Meth. A* **440**, 568 (2000).
16. U. Schellhorn, R. A. Rupp, S. Breer, and R. P. May, *Physica B* **234–236**, 1068 (1997).
17. J. Klepp, C. Pruner, Y. Tomita et al., *Appl. Phys. Lett.* **100**, 214104 (2012).
18. M. Moshinsky, *Phys. Rev.* **88**, 625 (1952).
19. А. С. Герасимов, М. В. Казарновский, ЖЭТФ **71**, 1700 (1976) [A. S. Gerasimov and M. V. Kazarnovsky, *Sov. Phys. JETP* **44**, 892 (1976)].
20. R. Gähler and R. Golub, *Z. Phys. B* **56**, 5 (1984).
21. J. Felber, R. Gähler, and R. Golub, *Physica B* **151**, 135 (1988).
22. J. Felber, G. Müller, R. Gähler, and R. Golub, *Physica B* **161**, 191 (1990).
23. V. G. Nosov and A. I. Frank, *J. Moscow Phys. Soc.* **1**, 1 (1991).
24. R. Golub and S. K. Lamoreaux, *Phys. Lett. A* **162**, 122 (1992).

25. А. И. Франк, В. Г. Носов, ЯФ **57**, 1029 (1994) [V. G. Nosov and A. I. Frank, Phys. Atom. Nucl. **57**, 968 (1994)].
26. A. I. Frank and V. G. Nosov, Ann. New York Acad. Sci. **755**, 293 (1995).
27. В. Г. Носов, А. И. Франк, ЯФ **62**, 807 (1999) [V. G. Nosov and A. I. Frank, Phys. Atom. Nucl. **62**, 754 (1999)].
28. J. Felber, R. Gähler, R. Golub et al., Found. Phys. **29**, 381 (1999).
29. Th. Hils, J. Felber, R. Gähler et al., Phys. Rev. A **58**, 4784 (1998).
30. J. Summhammer, K. A. Hamacher, H. Kaiser et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3206 (1995).
31. A. I. Frank and D. B. Amandzholova, Ann. New York Acad. Sci. **755**, 858 (1995).
32. А. В. Козлов, А. И. Франк, ЯФ **68**, 1149 (2005) [A. V. Kozlov and A. I. Frank, Phys. Atom. Nucl. **58**, 1104 (2005)].
33. J. Felber, R. Gähler, C. Rausch, and R. Golub, Phys. Rev. A **53**, 319 (1996).
34. И. М. Франк, Сообщения ОИЯИ №Р4-8851 (1975).
35. W. A. Hamilton, A. G. Klein, G. I. Opat, and P. A. Timmins, Phys. Rev. Lett. **58**, 2770 (1987).
36. W. A. Hamilton and M. Yethiraj, Phys. Rev. B **59**, 3388 (1999).
37. E. Iolin, B. Farago, F. Mezei et al., Physica B **241–243**, 1213 (1998).
38. Yu. N. Pokotilovski, Phys. Lett. A **255**, 173 (1999).
39. S. K. Lamoreaux and R. Golub, Phys. Rev. C **66**, 044309 (2002).
40. A. I. Frank and V. G. Nosov, Phys. Lett. A **188**, 120 (1994).
41. A. Ioffe, Physica B **234–236**, 1180 (1997).
42. A. I. Frank, S. N. Balashov, I. V. Bondarenko et al., Phys. Lett. A **311**, 6 (2003).
43. А. И. Франк, П. Гелтенборг, Г. В. Кулин и др., Письма в ЖЭТФ **81**, 541 (2005) [A. I. Frank, P. Geltenbort, G. V. Kulin et al., JETP Lett. **81**, 427 (2005)].
44. А. И. Франк, П. Гелтенборг, М. Жентшель и др., Письма в ЖЭТФ **86**, 255 (2007) [A. I. Frank, P. Geltenbort, M. Jentschel et al., JETP Lett. **86**, 225 (2007)].
45. A. I. Frank, P. Geltenbort, M. Jentschel et al., Nucl. Instr. Meth. A **611**, 314 (2009).
46. G. V. Kulin, A. I. Frank, S. V. Goryunov et al., Nucl. Instr. Meth. A **792**, 38 (2015).
47. А. И. Франк, Р. Гахлер, ЯФ **63**, 605 (2000) [A. I. Frank and R. Gähler, Phys. Atom. Nucl. **63**, 545 (2000)].
48. А. И. Франк, П. Гелтенборг, Г. В. Кулин, А. Н. Стрепетов, Письма в ЖЭТФ **78**, 224 (2003) [A. I. Frank, P. Geltenbort, G. V. Kulin, and A. N. Strepetov, JETP Lett. **78**, 188 (2003)].
49. S. N. Balashov, I. V. Bondarenko, A. I. Frank et al., Physica B **350**, 246 (2004).
50. А. И. Франк, ЯФ **76**, 585 (2013) [A. I. Frank, Phys. Atom. Nucl. **76**, 544 (2013)].
51. B. A. Kowalski and F. V. Kowalski, Phys. Lett. A **352**, 59 (2006).
52. А. И. Франк, П. Гелтенборг, Г. В. Кулин и др., Сообщения ОИЯИ №РЗ-2004-207 (2004).
53. Н. М. Померанцев, УФН **111**, 507 (1973) [N. M. Pomerantsev, Sov. Phys. Uspekhi **16**, 819 (1974)].
54. M. G. Moharam and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Amer. **71**, 811 (1981).
55. T. K. Gaylord and M. G. Moharam, Appl. Phys. B **28**, 1 (1982).
56. M. G. Moharam and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Amer. **72**, 1385 (1982).
57. M. G. Moharam, E. B. Gramm, D. A. Pommet, and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Amer. A **12**, 1068 (1995).
58. M. G. Moharam, D. A. Pommet, E. B. Gramm, and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Amer. A **12**, 1077 (1995).
59. R. Ashkar, P. Stonaha, A. L. Washington et al., Appl. Cryst. **43**, 455 (2010).
60. S. Takagi, Acta Cryst. **15**, 1311 (1962).
61. M. G. Moharam, T. K. Gaylord, and R. Magnusson, Opt. Comm. **32**, 14 (1980).
62. M. G. Moharam, T. K. Gaylord, and R. Magnusson, Opt. Comm. **32**, 19 (1980).
63. C. V. Raman and N. C. N. Nath, Proc. Indian Acad. Sci. **2**, 406 (1935).
64. И. В. Бондаренко, В. И. Боднарчук, С. Н. Балашов и др., ЯФ **62**, 775 (1999) [I. V. Bondarenko, V. I. Bodnarchuk, S. N. Balashov et al., Phys. Atom. Nucl. **62**, 721 (1999)].
65. A. I. Frank, S. V. Balashov, V. I. Bodnarchuk et al., Proc. SPIE **3767**, 360 (1999).