

## СПИРАЛЬНОСТЬ ТОРОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ С ЗАКРУТКОЙ

Е. Ю. Банникова<sup>a,b\*</sup>, В. М. Конторович<sup>a,b</sup>, С. А. Пославский<sup>b</sup><sup>a</sup> Радиоастрономический институт национальной академии наук Украины  
61002, Харьков, Украина<sup>b</sup> Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина  
61002, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 7 октября 2015 г.

На основе решений уравнения Брэгга–Хоторна обсуждается спиральность тонкого тороидального вихря при наличии закрутки — орбитального движения вдоль направляющей тора. Показано, что связь спиральности с циркуляциями вдоль малой и большой зацепленных окружностей — направляющей и образующей тора — зависит от распределения азимутальной скорости в ядре закрученного кольцевого вихря. В случае неоднородной закрутки эта связь отличается от известного соотношения Моффата — удвоенного произведения таких циркуляций, умноженного на число зацеплений. Результаты могут найти применение при исследовании вихрей в атмосферах планет и движений в окрестности ядер активных галактик.

DOI: 10.7868/S0044451016040179

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В природе тороидальные вихри часто обладают «закруткой» [1] — орбитальным движением вдоль направляющей тора. Такими, по-видимому, являются присоединенные кольцевые вихри тропических циклонов, ураганов и торнадо [2], а также солнечные тороидальные вихри [3], ответственные за 11-летний цикл активности, и многие другие (см., например, работу [4]). При наличии закрутки возникает топологический интеграл спиральности [5]. Это может увеличивать устойчивость вихря, что подтверждается в лабораторных экспериментах [6].

Как известно, для двух зацепленных вихревых контуров спиральность должна быть равна произведению циркуляций, умноженному на удвоенное число зацеплений [1, 5, 7, 8]. Мы покажем на допускающем гидродинамическое решение примере, что для тороидального вихря с закруткой это соотношение имеет несколько другой вид, отражающий пространственное распределение завихренности.

## 2. УРАВНЕНИЕ БРЭГГА – ХОТОРНА И ЕГО РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ

Рассмотрим осесимметричное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla p/\rho.$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \text{grad}(V^2/2) - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V},$$

перепишем его следующим образом:

$$\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right), \quad (2.1)$$

где в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{V} = \left( -\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \mathbf{i}_r, \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\varphi, \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \mathbf{i}_z \right). \quad (2.2)$$

Введем функцию тока Стокса  $\psi$ , определенную согласно соотношениям

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.3)$$

\* E-mail: bannikova@astron.kharkov.ua

При этом уравнение неразрывности  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  удовлетворяется тождественно. Орбитальную компоненту скорости теперь можно представить в виде

$$V_\varphi = \frac{f(\psi)}{r}, \quad (2.4)$$

где  $f(\psi)$  — известная функция. Подставляя выражения (2.3) и (2.4) в (2.2), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \left( -\frac{1}{r} f' \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{i}_r, -\frac{\tilde{\Delta} \psi}{r} \mathbf{i}_\varphi, \frac{1}{r} f' \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_z \right), \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{\Delta} \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad f' \equiv \frac{df}{d\psi}.$$

Подставляя (2.5) в уравнение Эйлера (2.1), для  $\varphi$ -й компоненты завихренности после несложных преобразований получаем

$$\operatorname{rot}_\varphi \mathbf{V} = -\frac{f f'}{r} + \frac{r}{\psi'_r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad (2.6)$$

где  $\Pi = p/\rho + V^2/2$  — интеграл Бернулли. Приведя выражения (2.5) и (2.6) для азимутальной составляющей завихренности, получаем для  $\psi$  уравнение Брэга–Хотгорна [1, 9] (или, что то же, Грэда–Шафранова в МГД-случае [10]) при заданных  $\Pi$  и  $f$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \frac{d\Pi}{d\psi} - f \frac{df}{d\psi}. \quad (2.7)$$

Решения уравнения (2.7) при  $f \neq 0$  описывают стационарные осесимметричные течения с закруткой. Одно из таких решений можно получить для случая

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \text{const} = \alpha \phi_0, \quad f \frac{df}{d\psi} = \text{const} = -\beta R^2 \phi_0 \quad (2.8)$$

( $\alpha$  и  $\beta$  — безразмерные константы,  $\phi_0$  — размерный нормировочный множитель). Тогда решение уравнения (2.7) для функции тока Стокса имеет вид [10]<sup>1)</sup>

$$\psi = \phi_0 \left[ \frac{1}{2} (\beta R^2 + r^2) z^2 + \frac{\alpha - 1}{8} (r^2 - R^2)^2 \right]. \quad (2.9)$$

По нему с помощью соотношений (2.3) находим  $V_r$  и  $V_z$ , а с помощью уравнений (2.8) задаем скорость закрутки  $V_\varphi$  (и давление  $p$ ). Вблизи от окружности

$r = R, z = 0$  (т.е. при  $|r - R|/R \ll 1$  и малых  $z$ ) выражение (2.9) для функции тока переходит в следующее:

$$\psi \approx \frac{1}{2} \phi_0 R^2 [(\beta + 1) z^2 + (\alpha - 1)(r - R)^2]. \quad (2.10)$$

В данном решении при  $\beta + 1 > 0$  и  $\alpha > 1$  поверхности  $\psi(r, z) = \text{const}$  представляют собой вложенные торы с общей круговой осью — направляющей  $r = R, z = 0$ , а их меридиональные сечения представляют собой эллипсы. Из уравнений (2.8), получаем

$$\Pi = \alpha \phi_0 \psi + \Pi_0, \quad f^2 = f_0^2 - 2\beta R^2 \phi_0 \psi, \quad (2.11)$$

где  $\Pi_0$  и  $f_0$  — постоянные интегрирования, параметризующие данное решение.

### 3. СПИРАЛЬНОСТЬ

Ниже мы найдем для решения (2.10) интеграл спиральности [5]

$$S = \int \mathbf{V} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V} dV. \quad (3.1)$$

Ограничимся частным случаем  $\beta + 1 = \alpha - 1$ , когда сечениями поверхностей тока меридиональной плоскостью являются окружности

$$\psi \approx \frac{1}{2} \phi_0 R^2 (\alpha - 1) [z^2 + (r - R)^2]. \quad (3.2)$$

Любой из торов  $\psi(r, z) = \text{const}$  может быть принят за границу области, занятую закрученным вихревым течением. Будем считать его поперечное меридиональное сечение окружностью радиуса  $a$  (рис. 1). Вне тора течение будем считать потенциальным.

Учитывая соотношения (2.3), для компонент скорости получаем

$$\begin{aligned} V_r &= -R^2 \phi_0 (\alpha - 1) \frac{z}{r}, \\ V_z &= -R^2 \phi_0 (\alpha - 1) \frac{r - R}{r}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В случае тонкого кольцевого вихря это движение в меридиональной плоскости имеет характер «твердотельного вращения», поскольку линейная скорость вращения пропорциональна расстоянию до круговой направляющей вихревого кольца. Для этого случая, учитывая (3.3), получаем

$$V_r \approx -R \phi_0 (\alpha - 1) z, \quad V_z \approx R \phi_0 (\alpha - 1) (r - R).$$

При этом азимутальная компонента завихренности в тонком кольце практически постоянна,

$$\omega_\varphi \approx -2R \phi_0 (\alpha - 1).$$

<sup>1)</sup> Другие примеры решений, главным образом в связи с исследованием МГД-конфигураций, можно найти в монографии [11] и в сборниках обзоров «Вопросы теории плазмы» под ред. М. А. Леонтовича (Атомиздат, Энергоатомиздат, Москва (1963–1982)).

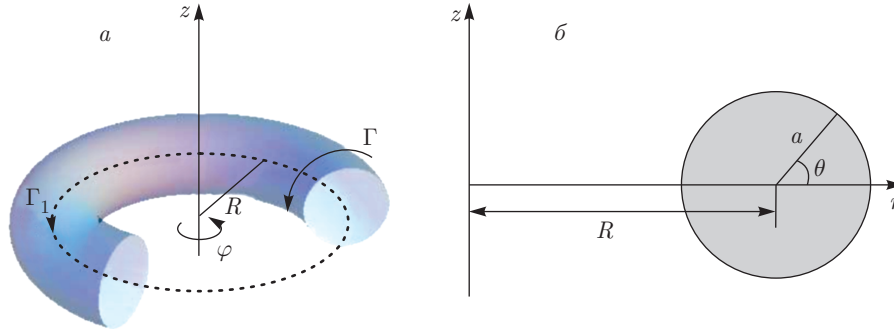


Рис. 1. Схема тороидального вихря (а) и сечение в меридиональной плоскости (б)

4. СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАКРУТКИ КОЛЬЦЕВОГО ВИХРЯ

Рассмотрим сначала случай  $\beta = 0, \alpha = 2$ . При этом  $f(\psi) \equiv f_0 = \text{const}$ . Это означает, что закрутка внутри тора распределена однородно:  $V_\varphi = f_0/r \approx f_0/R$ . Две другие компоненты скорости и азимутальная компонента ротора записываются в виде

$$\begin{aligned} V_r &\approx -R\phi_0 z, & V_z &\approx -R\phi_0(r - R), \\ \omega_\varphi &\approx -2R\phi_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Перейдем в полярную систему координат в меридиональной плоскости с началом в точке  $r = R, z = 0$ :

$$r - R = \eta \cos \theta, \quad z = \eta \sin \theta$$

( $\eta$  — координата, отсчитываемая от круговой оси тора вдоль радиуса его поперечного сечения, см. рис. 1). На границе  $\eta = a$  имеем вихревой слой  $\omega_\theta = -V_\varphi \delta(\eta - a)$ , поскольку азимутальная скорость здесь претерпевает разрыв (считаем, что вне тора она обращается в нуль<sup>2)</sup>).

При наличии внутри тора закрутки — орбитального движения (по углу  $\varphi$ ) и вихревого движения в меридиональном сечении вдоль малого контура (по углу  $\theta$ ) — спиральность (3.1) удобно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\begin{aligned} S &= S_\varphi + S_\theta, & S_\varphi &= \int V_\varphi \omega_\varphi dV, \\ S_\theta &= \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Вычисляя составляющие  $S_\varphi, S_\theta$  спиральности (4.2) с учетом выражений (4.1) и  $V_\theta^2 = V_r^2 + V_z^2$ , имеем

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \int V_\varphi \omega_\varphi dV \approx -4\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0, \\ S_\theta &= \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV = \int V_\theta \omega_\theta dV = \\ &= - \int_\Sigma V_\theta V_\varphi dS. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В последнем выражении в (4.3) интегрирование ведется по поверхности  $\Sigma$  вихревого кольца. Поскольку на этой поверхности  $V_\theta \approx R a \phi_0$  и  $V_\varphi \approx f_0/R$ , имеем  $S_\theta \approx -4\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0$ . Отсюда следует, что  $S_\theta = S_\varphi$  и, соответственно, для данного решения  $S = 2S_\varphi$ . (Ниже увидим, что соотношение  $S = 2S_\varphi$  является весьма общим.) Таким образом, для спиральности получаем

$$S = -8\pi^2 R a^2 f_0 \phi_0. \tag{4.4}$$

Свяжем полученное значение спиральности со значениями циркуляции скорости  $\Gamma$  по малому контуру, охватывающему вихревое кольцо один раз, и  $\Gamma_1$  по большому контуру, совпадающему с круговой направляющей тора:

$$\begin{aligned} \Gamma &= a \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \approx 2\pi a^2 R \phi_0, \\ \Gamma_1 &= R \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi f_0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Тогда для спиральности (4.4), учитывая (4.5), получаем привычное выражение

$$S = -2\Gamma\Gamma_1.$$

<sup>2)</sup>  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

**5. СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАКРУТКИ  
(С МАКСИМУМОМ СКОРОСТИ НА  
КРУГОВОЙ ОСИ)**

Рассмотрим теперь случай неоднородной закрутки. Поначалу ограничимся изучением специального случая, когда максимум азимутальной скорости достигается на круговой направляющей вихревого кольца:  $\beta = \alpha - 2 > 0$ , а на поверхности кольца закрутка исчезает. Из выражения (3.2) для функции тока получаем на границе тора

$$\psi \approx (\alpha - 1)\phi_0 R^2 a^2 / 2,$$

где  $a$  — малый радиус тороидального вихря (радиус меридионального сечения). Полагая на этой границе  $V_\varphi = 0$ , т.е.  $f|_a = 0$ , находим постоянную интегрирования  $f_0$  в выражении (2.11):

$$f_0 = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \phi_0 R^2 a.$$

Тогда внутри вихревого кольца  $a^2 \geq z^2 + (r - R)^2$  азимутальная скорость равна

$$V_\varphi = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \phi_0 R^2 \frac{\sqrt{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}}{r},$$

а азимутальная компонента завихренности имеет вид

$$\omega_\varphi = -\phi_0(\alpha - 1)R^2(r + R)/r^2 \approx -2\phi_0 R(\alpha - 1). \quad (5.1)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении  $|r - R|/R \ll 1$  для тонкого вихря получаем

$$V_\varphi \omega_\varphi \approx -2\phi_0^2 \sqrt{(\alpha - 1)^3(\alpha - 2)} \times R^2 \sqrt{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}. \quad (5.2)$$

Для нахождения  $\varphi$ -й составляющей спиральности интегрируем (5.2) по объему тора:

$$S_\varphi = -2\phi_0^2 \sqrt{(\alpha - 1)^3(\alpha - 2)} \times R^2 \cdot 2\pi R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a d\eta \sqrt{a^2 - \eta^2}.$$

Окончательно получаем

$$S_\varphi = -\frac{8}{3} \pi^2 a^3 R^3 \phi_0^2 (\alpha - 1) \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (5.3)$$

Чтобы вывести выражение для  $S_\theta$ , найдем соответствующие компоненты скорости и завихренности:

$$V_r \approx -(\alpha - 1)R\phi_0 z, \quad V_z \approx (\alpha - 1)R\phi_0(r - R),$$

$$\omega_r \approx \phi_0 R z \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}}$$

$$\omega_z \approx -\phi_0 R(r - R) \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}}$$

Интегрируя по объему кольцевого вихря, находим

$$S_\theta = \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV = -(\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2)^{1/2} \times \phi_0^2 R^2 \int \frac{z^2 + (r - R)^2}{\sqrt{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}} dV.$$

Используя ту же, что и ранее, замену переменных, получаем

$$S_\theta = -(\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2)^{1/2} \cdot 4\pi^2 \phi_0^2 R^3 \int_0^a \frac{\eta^3}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} d\eta = -\frac{8}{3} \pi^2 a^3 R^3 \phi_0^2 (\alpha - 1) \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}.$$

Сравнивая это выражение с (5.3), видим, что, как и выше,  $S_\theta = S_\varphi$  и  $S = 2S_\varphi$ .

Выразим спиральность через циркуляции скорости по малому ( $\Gamma$ ) и большому ( $\Gamma_1$ ) контурам (см. рис. 1). Для циркуляции по малому контуру (окружности радиуса  $a$ ), используя формулу Стокса, получаем

$$\Gamma = a \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \approx -\pi a^2 \omega_\varphi = 2\pi a^2 R \phi_0 (\alpha - 1). \quad (5.4)$$

Циркуляция по большому контуру (по круговой направляющей тора) равна

$$\Gamma_1 = R \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi R^2 a \phi_0 \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (5.5)$$

Выражая спиральность через циркуляции (4.5), для рассматриваемого случая неоднородной закрутки с максимумом ее скорости на круговой оси и нулем на границе получаем

$$S = -\frac{4}{3} \Gamma \Gamma_1.$$

Мы видим, что в случае неоднородной закрутки модуль коэффициента  $k$  при произведении циркуляций в выражении для спиральности  $S = -k\Gamma\Gamma_1$  может отличаться от двойки.

**6. СПИРАЛЬНОСТЬ КОЛЬЦЕВОГО ВИХРЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ**

Вернемся к общему представлению (4.2) спиральности в виде суммы двух продольной  $S_\varphi$  и поперечной  $S_\theta$  составляющих. В случае осевой симметрии течения компоненты завихренности представляем в виде

$$\omega_\theta = \text{rot } \mathbf{V}_\varphi \equiv [\nabla, \mathbf{V}_\varphi], \quad \omega_\varphi = \text{rot}_\varphi \mathbf{V}_\theta.$$

Рассмотрим разность

$$S_\theta - S_\varphi = \int (\mathbf{V}_\theta \cdot \omega_\theta - \mathbf{V}_\varphi \cdot \omega_\varphi) dV = \int (\mathbf{V}_\theta \cdot [\nabla, \mathbf{V}_\varphi] - \mathbf{V}_\varphi \cdot [\nabla, \mathbf{V}_\theta]) dV$$

и воспользуемся тождеством

$$\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \nabla \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \cdot [\nabla, \mathbf{a}] - \mathbf{a} \cdot [\nabla, \mathbf{b}]$$

применительно к векторам  $\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta$ . Тогда получим

$$S_\theta - S_\varphi = \int \nabla \cdot [\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta] dV = \int_\Sigma [\mathbf{V}_\varphi, \mathbf{V}_\theta] \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

если на границе  $\Sigma$  области интегрирования азимутальная составляющая скорости обращается в нуль. Таким образом, и в общем случае осесимметричного течения в кольцевом вихре

$$S_\theta = S_\varphi, \quad S = 2S_\varphi. \tag{6.1}$$

В то же время выражение спиральности через циркуляции,

$$S = -k\Gamma\Gamma_1, \tag{6.2}$$

для тороидального вихря не носит универсального характера: коэффициент  $k$  при произведении циркуляций может быть отличен от двойки. Действительно, рассмотрим тонкий кольцевой вихрь с закруткой некоего общего вида  $rV_\varphi = f(\psi) \neq \text{const}$ . На рассматриваемом решении (3.2)  $\psi = \psi(\eta)$  и  $f = g(\eta)$ , где

$$g(\eta) \approx \sqrt{f_0^2 - (\alpha - 1)(\alpha - 2)\phi_0^2 R^4 \eta^2}.$$

Тогда с учетом (4.2), (5.1) и (6.1) для спиральности получим

$$S = 2S_\varphi = -16\pi^2(\alpha - 1)R\phi_0 \int_0^a \eta g(\eta) d\eta,$$

или

$$S = -\Gamma\Gamma',$$

где  $\Gamma$  определяется в соответствии с (5.4), а

$$\Gamma' = \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a \eta g(\eta) d\eta.$$

Если закрутка однородна ( $\alpha = 2$ ), то  $g(\eta) \equiv f_0$ , что дает  $\Gamma' = 2\Gamma_1$ , и в соответствии с (6.2) получаем  $k = 2$ . Для случая неоднородной закрутки имеем

$$\Gamma' = k\Gamma_1,$$

где

$$k = \frac{4}{f_0 a^2} \int_0^a \eta g(\eta) d\eta.$$

Отличие от значения  $k = 2$  связано с тем, что в случае закрученного вихря зацепленные контуры принадлежат одному и тому же тороидальному вихрю и не являются независимыми. По-прежнему существует топологический интеграл спиральности, который может быть выражен через произведения циркуляций двух зацепленных контуров. Но коэффициент  $k$  здесь является функционалом распределения закрутки по сечению тора, а также зависит от выбора контуров, по которым вычисляется циркуляция скорости.

**7. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАКРУТКА (С МАКСИМУМОМ СКОРОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВИХРЯ)**

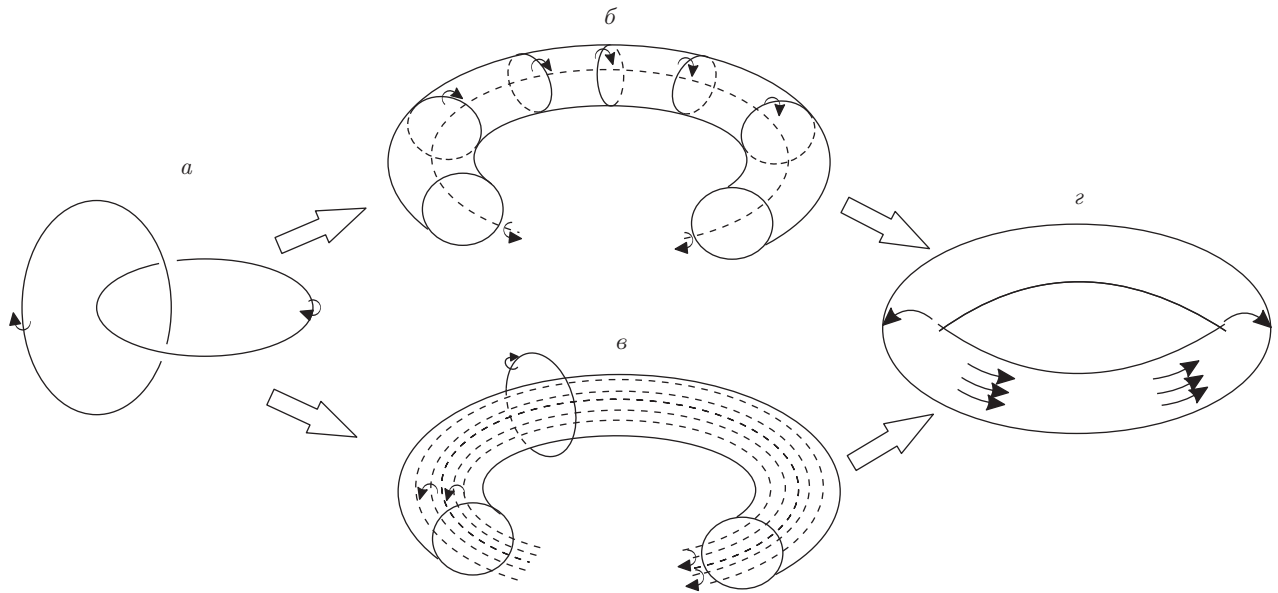
Рассмотрим теперь случай отрицательных значений  $\beta = \alpha - 2 < 0$  (при  $\alpha > 1$ ). Ему отвечает такая закрутка, при которой максимум азимутальной составляющей скорости достигается на поверхности кольцевого вихря. При этом по-прежнему решение уравнения (2.7) задается формулой (3.2), а значение циркуляции скорости  $\Gamma$  по малому контуру совпадает с выражением (5.4). Для скорости закрутки внутри тонкого кольца получаем выражение

$$rV_\varphi = f \approx \sqrt{f_0^2 + (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4 [z^2 + (r - R)^2]}.$$

Отсюда следует

$$S_\varphi = \int V_\varphi \omega_\varphi dV \approx -8\pi^2 \phi_0 R (\alpha - 1) \times \int_0^a \eta \sqrt{f_0^2 + (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4 \eta^2} d\eta,$$

$$S = 2S_\varphi \approx -\frac{16\pi^2}{3\phi_0 R^3 (2 - \alpha)} \times \left\{ [f_0^2 + (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4 a^2]^{3/2} - f_0^3 \right\}.$$



**Рис. 2.** *а)* Две сцепленные вихревые нити. Маленькие круговые стрелки на всех рисунках указывают направление вращательного движения возле каждой из нитей. *б)* Окружности в меридиональных плоскостях изображают семейство вихревых нитей (вихревую пелену), полученное «размазыванием» вертикально расположенной вихревой нити по поверхности тора. *в)* Окружности в горизонтальных плоскостях изображают семейство вихревых нитей, полученное «размазыванием» горизонтально расположенной вихревой нити по объему тора. *г)* Кольцевой вихрь с однородной закруткой. Здесь закругленные стрелки указывают направление движения в меридиональных сечениях и в горизонтальных сечениях (в последнем случае стрелки имеют одинаковую длину, так как закрутка однородна)

Так же, как и в рассмотренном выше случае однородной закрутки, на границе тора  $\eta = a$  имеем вихревой слой: азимутальная составляющая скорости при выходе из кольца скачком уменьшается до нуля (вне кольца, по предположению, закрутки нет). Циркуляция на круговой направляющей  $r = R, z = 0$  равна  $\Gamma_1 = 2\pi f_0$ . Соответственно

$$k \equiv -\frac{2S_\varphi}{\Gamma\Gamma_1} \approx \frac{16\pi^2 \left\{ [f_0^2 + (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4 a^2]^{3/2} - f_0^3 \right\}}{2\pi f_0 \cdot 2\pi a^2 R \phi_0 (\alpha - 1) \cdot 3\phi_0 R^3 (2 - \alpha)} = \frac{4 \left\{ [f_0^2 + (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4 a^2]^{3/2} - f_0^3 \right\}}{3f_0 a^2 (\alpha - 1)(2 - \alpha)\phi_0^2 R^4}. \quad (7.1)$$

Предположим теперь, что  $f_0 = f(0) = 0$ . Тогда

$$f = \sqrt{2\phi_0(2 - \alpha)} \sqrt{\psi} R,$$

или, в силу выражения (3.2)

$$f \approx \sqrt{(2 - \alpha)(\alpha - 1)} \sqrt{z^2 + (r - R)^2} \phi_0 R^2.$$

В этом случае внутри кольца скорость закрутки прямо пропорциональна расстоянию до круговой направляющей тора,

$$V_\varphi = \frac{f}{r} \approx \sqrt{(2 - \alpha)(\alpha - 1)} [z^2 + (r - R)^2] \phi_0 R,$$

на круговой направляющей кольцевого вихря азимутальная составляющая скорости обращается в нуль, а циркуляция скорости по этой направляющей  $\Gamma_1 = 0$ . Понятно, что данной ситуации отвечает значение  $k \rightarrow \infty$ , что следует также из выражения (7.1) при  $f_0 \rightarrow 0$ . Определим значение спиральности при  $f_0 = 0$ . Выражение для азимутальной компоненты завихренности  $\omega_\varphi \approx -2\phi_0 R(\alpha - 1)$  совпадает с (5.1) и, соответственно, спиральность равна

$$S_\varphi = \int V_\varphi \omega_\varphi dV \approx -2 \int \phi_0^2 R^2 (\alpha - 1)^{3/2} \times \sqrt{(2 - \alpha)(\alpha - 1)} [z^2 + (r - R)^2] dV,$$

$$S = 2S_\varphi = -\frac{16}{3} \pi^2 (\alpha - 1) \sqrt{(\alpha - 1)(2 - \alpha)} a^3 R^3 \phi_0^2.$$



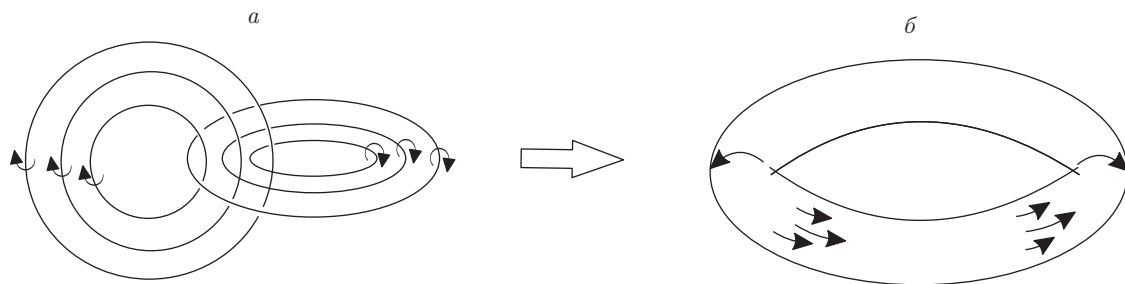


Рис. 3. а) Два семейства сцепленных вихревых нитей с неполным зацеплением вертикально и горизонтально расположенных нитей. б) Кольцевой вихрь с неоднородной закруткой. Закругленные стрелки имеют тот же смысл, что и на рис. 2г

### 8. ОБСУЖДЕНИЕ

Поясним полученные выше результаты следующими рассуждениями на примере неоднородной закрутки с максимумом ее скорости на круговой оси тора (см. разд. 4).

Значение интеграла спиральности для закрученного кольцевого вихря при заданных значениях циркуляции скорости по малому ( $\Gamma$ ) и большому ( $\Gamma_1$ ) контурам зависит от распределения закрутки по малому радиусу тора. В свою очередь, распределение закрутки однозначно связано с распределением меридиональной составляющей завихренности.

Если, не изменяя значения спиральности, заменить непрерывное распределение завихренности дискретным, отделив азимутальную составляющую от полоидальной (меридиональной), то получим картину из двух семейств зацепленных вихревых нитей.

Интеграл спиральности для системы двух зацепленных вихревых нитей, как известно, определяется произведением циркуляций по контурам, охватывающим эти нити:  $S = \pm 2\Gamma\Gamma_1$  (рис. 2а). Чтобы перейти к непрерывному распределению, «размажем» одну из вихревых нитей по поверхности кругового тора, сохранив меридиональность завихренности  $\omega_\varphi = 0$ ,  $\omega_\theta \neq 0$  (рис. 2б), а другую нить — по внутренности того же тора (рис. 2в) так, чтобы завихренность осталась ориентированной по азимуту  $\omega_\varphi \neq 0$ ,  $\omega_\theta = 0$  (с сохранением величин циркуляций  $\Gamma, \Gamma_1$ ). При этом значение интеграла спиральности не изменится.

Если же «размазать» нить с меридиональной завихренностью по объему тора (а не по его поверхности), то результат будет уже другим: не все пары парциальных нитей, принадлежащих разным семействам, окажутся зацепленными (рис. 3). В этом за-

ключается причина того, что коэффициент  $k$  в (6.5) может быть меньше 2.

### 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для вихря с закруткой (орбитальным движением) спиральность отлична от нуля, но связь с произведением циркуляций зацепленных контуров отличается от известной формулы  $S = \pm 2\Gamma\Gamma_1 I$ , где множитель  $I$  — интеграл зацеплений Гаусса, принимающий целочисленные значения [8,12,13]. В нашем случае для тонких кольцевых вихрей с круговым поперечным сечением значение коэффициента  $k$  в (6.5) может изменяться в пределах  $4/3 \leq k < \infty$ , если в качестве контуров, по которым определяются значения  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  циркуляции скорости, брать указанные выше контуры (малую и большую образующие тора). Наглядное объяснение этого отличия предлагается на рис. 2 и 3. Случаю  $k = 2$  отвечает однородная закрутка, а случаям  $4/3 \leq k < 2$  и  $2 < k < \infty$  — неоднородная закрутка соответственно с максимумом и с минимумом азимутальной скорости на круговой направляющей тора. Минимальное возможное значение  $k = 4/3$  отвечает рассмотренному нами параболическому случаю распределения азимутальной скорости (2.8) в отсутствие закрутки на границе вихря.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный мир, Москва (2000).
2. Г. В. Левина, М. Т. Монтгомери, Доклады РАН 434, 401 (2010).
3. V. Bjerknæs, *Astrophys. J.* 6, 93 (1926).

4. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, С. А. Пославский, *ЖЭТФ* **146**, 663 (2014).
5. Н. К. Moffatt and A. Tsinober, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24**, 281 (1992).
6. T. Naitoh, N. Okura, T. Gotoh, and Y. Kato, *Phys. Fluids* **26**, 067101 (2014).
7. Ф. В. Должанский, *Лекции по геофизической гидродинамике*, ИВМ РАН, Москва (2006).
8. А. В. Тур, В. В. Яновский, *Гидродинамические вихревые структуры*, Институт монокристаллов, Харьков (2012).
9. Ю. П. Ладиков-Роев, О. К. Черемных, *Математические модели сплошных сред*, Наукова думка, Киев (2010).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
11. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
12. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
13. В. И. Арнольд, Б. А. Хесин, *Топологические методы*, МЦНМО, Москва (2007).