

ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ ПОЗИТРОНОВ В МОНОКРИСТАЛЛАХ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ 100 ГэВ

В. А. Маишеев^a, Ю. А. Чесноков^{a}, П. Н. Чирков^a, И. А. Язынин^a,
Д. Болонини^{b**}, С. Хасан^{b**}, М. Прест^{b**}, Е. Валлацца^{c**}*

^a *Институт физики высоких энергий, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
142281, Протвино, Россия*

^b *Università dell'Insubria
21100, Milano, Italy*

^c *Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
00044, Trieste, Italy*

Поступила в редакцию 15 октября 2015 г.

Рассмотрен процесс излучения 120 ГэВ позитронов в режиме каналирования в (011) плоскости монокристалла кремния. На основе теории нелинейных колебаний рассчитаны траектории движущихся позитронов при разных начальных условиях. С учетом нелинейности движения найдена функция распределения каналирующих частиц по их амплитудам. С помощью двух различных методов рассчитана интенсивность излучения при разных начальных условиях. Эти результаты могут быть полезны для сравнения с экспериментальными данными при энергиях позитронов начиная с 100 ГэВ и более.

DOI: 10.7868/S0044451016050023

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени большое количество экспериментальных и теоретических работ посвящено исследованию излучения при плоскостном каналировании высокоэнергетичных позитронов в монокристаллах (см. [1–3] и цитируемую там литературу). Это излучение возникает при движении заряженной частицы под малым углом по отношению к кристаллографической плоскости, характеризуется высокой интенсивностью (в случае ультррелятивистских позитронов с энергиями до 20 ГэВ) и является достаточно монохроматичным. При энергиях позитронов более 20 ГэВ монохроматичность излучения сильно ухудшается. Большинство экспериментов по исследованию излучения при каналировании релятивистских позитронов выполнено при энергиях от нескольких сотен МэВ и до десятков ГэВ, где в интенсивности излучения домини-

рует отчетливый пик, который при энергиях, больших 20 ГэВ, постепенно размывается [3] из-за возрастания интенсивности излучения высоких гармоник. Конкретное теоретическое рассмотрение процесса также в основном сосредоточено на указанном диапазоне энергий. Много интересных данных было получено в эксперименте [4], где исследовалось излучение лептонов с энергией 150 ГэВ в прямых кристаллах.

Недавно в ЦЕРН стартовал новый эксперимент INSURAD, посвященный исследованию излучения позитронов с энергией 120 ГэВ в слабо изогнутых кристаллах [5]. Наличие небольшого изгиба кристалла и современная трековая система на микростриповых детекторах позволили осуществить чистое выделение частиц, прошедших в режиме каналирования вдоль всего кристалла. Таким образом, впервые в области высоких энергий получены чистые спектры излучения каналированных частиц, без примеси излучения надбарьерных и деканалированных частиц. Появилась возможность прецизионного сравнения с точными экспериментальными данными, и данная работа посвящена теоретическому описанию процесса излучения позитронов с энерги-

* E-mail: Yury.Chesnokov@ihep.ru

** D. Bolognini, S. Hasan, M. Prest, E. Vallazza

ей 120 ГэВ, каналированных в кристаллах, для такого сравнения.

Характеристики излучения релятивистской частицы с заданной энергией определяются ее движением в электрическом поле монокристалла. Поэтому, прежде всего, следует описать это движение. Для этого необходимо знать электрическое поле или распределение потенциала кристаллографической плоскости. Такое поле (потенциал) находится аналитически на основе соотношений для поля атома в модели Мольер или, более точно, на основе аппроксимации соответствующих данных, полученных в результате рентгеновских измерений. Часто вместо точного представления электрического поля (или потенциала) используют их упрощения (так называемые модельные потенциалы) с помощью достаточно простых функций. Недостаток такого рассмотрения заключается в том, что невозможно описать достаточно хорошо простыми функциями плоскостные поля в согласии с расчетами по модели Мольер или другой реалистичной модели атома. Другой подход использован в работе [6], где поле представлялось в виде ряда Фурье и было показано, что плоскостные потенциалы поля монокристаллов можно описать полиномами достаточно высокой степени, которые практически (ошибка около 1% для полинома 14-й степени) не отличаются от исходных точных представлений.

Очевидно, что потенциал в центральной части между кристаллическими плоскостями имеет параболическую форму, но вблизи плоскостей он сильно нелинеен, так как должен обеспечивать нулевое электрическое поле на кристаллических плоскостях в силу одинаковости плоскостных ячеек и в силу физической непрерывности. Кроме того, для каналированных частиц, которые совершают периодическое движение в такой нелинейной межплоскостной потенциальной яме с большими амплитудами и замкнутые фазовые траектории которых близки к сепаратрисе, отделяющей каналированные частицы от надбарьерных, нахождение точного решения уравнений движения с помощью асимптотических методов нелинейных колебаний [7] (и использованных в [6, 8]) затруднительно. Более того, даже незначительные возмущения, такие как нерегулярные смещения плоскостей, будут приводить к образованию на ветвях сепаратрисы так называемых гомоклинических структур [9–13] и образованию около сепаратрисы стохастического слоя. В этом случае необычайная сложность движения в окрестности сепаратрисы была известна еще А. Пуанкаре [12–14]: «... Сложность этой картины движения настолько

поражает, что я даже не пытаюсь изобразить ее». Строгую оценку ширины стохастического слоя до сих пор получить не удалось, а приводимые обычно результаты основаны на приближенном описании движения в окрестности сепаратрисы при наличии возмущений. Поэтому в данной работе мы постарались максимально обойтись без поиска точного решения уравнений движения в таком нелинейном потенциале (без возмущений) для всех каналированных частиц и ограничились использованием гамильтонова формализма для описания движения и нахождения характерных параметров (точнее, функций) движения. Среди них такие, как зависимость частоты и параметра мультипольности ρ от амплитуды периодического движения, распределение каналированных позитронов по амплитудам. Использование такого формализма позволило преодолеть некоторые трудности в определении излучения, имевшие место при достаточно больших амплитудах (см. [6, 8]).

Тип излучения релятивистской частицы зависит от значения параметра мультипольности ρ . Когда $\rho \ll 1$, это соответствует интерференционному характеру (дипольное приближение) излучения, формируемому на достаточно большой длине кристалла. Случай с $\rho \gg 1$ близок к магнитотормозному (синхротронному) излучению. При $\rho \sim 1$ имеем промежуточный случай. При анализе процесса излучения следует рассматривать весь ансамбль каналированных частиц в соответствующем фазовом пространстве, поскольку параметры движения (например, амплитуда колебаний) в нетолстом монокристалле определяются начальными условиями на его входе. И как будет показано, в рассматриваемом процессе могут реализовываться различные типы излучения частицами с разными начальными условиями.

Параметр ρ становится порядка единицы при плоскостном каналировании позитронов (по крайней мере для заметной доли частиц) начиная с энергий в несколько ГэВ. При энергиях позитронов в десятки ГэВ большая доля позитронов характеризуется параметром ρ от единицы до нескольких единиц. В этом случае расчеты должны принимать во внимание недипольный характер излучения. Соответствующий математический аппарат для излучения при периодическом движении можно найти в монографии [1] (квантовый и классический случаи в вакууме) и статье [15] для прозрачной среды (классический случай). При энергиях позитронов в 100 ГэВ и более параметр ρ может превышать 20 единиц для значительной доли частиц. При этом можно ожи-

дать усложнения процедуры расчетов по соотношениям [1] для плоскостного движения, поскольку начинает излучаться большое число гармоник. С другой стороны, авторы [1] утверждают, что в этом случае излучение носит практически магнитотормозной характер и рекомендуют использовать соответствующие соотношения для расчетов.

Принимая во внимание все сказанное выше, в данной работе мы хотим получить следующие результаты:

1) на основе гамильтонова формализма рассмотреть движение ультрарелятивистской частицы в реальном плоскостном потенциале монокристалла и изучить влияние нелинейностей на ансамбль частиц, захваченных в режим каналирования;

2) исследовать и сравнить различные методы расчета интенсивности излучения позитронами с энергиями порядка 100 ГэВ при их разных начальных условиях на входе в монокристалл;

3) получить спектры рождения фотонов для расчета интенсивности излучения каналированными позитронами, которые измерялись в эксперименте INSURAD.

2. МЕЖПЛОСКОСТНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ КАНАЛИРОВАННЫХ ПОЗИТРОНОВ

Движение заряженной ультрарелятивистской частицы в межплоскостном электрическом поле D монокристалла можно описать с помощью системы уравнений

$$\frac{E}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2} = eD(x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{ds}{dt} = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) \right),$$

где x, y, s — декартовы координаты частицы (электрическое поле D направлено вдоль оси x); E, e, γ — соответственно энергия, заряд и гамма-фактор частицы; t — время, c — скорость света. При определенных начальных условиях эти уравнения описывают движение частицы в режиме каналирования. В этом случае первое уравнение описывает периодическое движение вдоль координаты x , в то время как третье уравнение отражает влияние поперечного движения частицы на продольное. Несмотря на относительно малую величину, это изменение продольной скорости частицы учитывается при расчетах интенсивности излучения. Из приведенных уравнений

видно, что задача о нахождении траектории частицы в трехмерном пространстве сводится к нахождению функции $x(t)$.

В этом разделе мы рассмотрим периодическое (в общем случае негармоническое) движение позитронов с энергией $E = 120$ ГэВ в межплоскостном потенциале прямого кристалла Si с ориентацией (011). Определим основные характеристики этого движения, которые наиболее существенны для спектра излучения позитронов с указанной энергией при их прохождении через кристалл. К таким характеристикам, прежде всего, относится зависимость частоты, параметра мультипольности ρ и плотность распределения позитронов от амплитуды движения.

Межплоскостной потенциал рассчитан при комнатной температуре для кремния, как описано в работе [6]. Сначала было получено точное выражение для плоскостного электрического поля монокристалла (в данном случае на основе рентгеновских измерений атомных формфакторов кремния) в виде ряда Фурье. Затем это поле было разложено в ряд по ортогональным полиномам Лежандра, что и позволило представить его в виде полинома по межплоскостной координате x . Очевидно, что такой метод позволяет получить представление электрического потенциала поля, сколь угодно близкое к точному значению. Мы ограничились его описанием с точностью около 1%, что соответствует полиному 14-й степени. Таким образом, межплоскостной потенциал взаимодействия позитрона в прямом кристалле определяется выражением

$$U(\xi) = -\frac{d}{2} \sum_{k=1}^7 \frac{\alpha_k}{2^k} \xi^{2k}, \quad (1)$$

где $\xi = x/(d/2)$ — нормированная межплоскостная координата, $\xi \in [-1, +1]$; $d = 1.92 \text{ \AA}$ — межплоскостное расстояние в канале (011);

$$\alpha = (-32.21 \ 13.86 \ -443.78 \ 2340.52$$

$$\ -5315.05 \ 4811.79 \ -1375.13)$$

в единицах эВ/Å; такие значения α_k обеспечивают равенство $dU/d\xi = 0$ при $\xi = \pm 1$. Зависимость $U(\xi)$ приведена на рис. 1, где $U_0 = 21.873$ эВ — уровень потенциального барьера. На рис. 2 показана зависимость нормированной частоты $\Omega(\xi_m)$ от амплитуды периодического движения

$$\Omega(\xi_m) = \omega(\xi_m)/\omega_0,$$

где

$$\omega_0 \equiv \omega(0) = \sqrt{2|\alpha_1|c^2/Ed} \approx 5.013 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$$

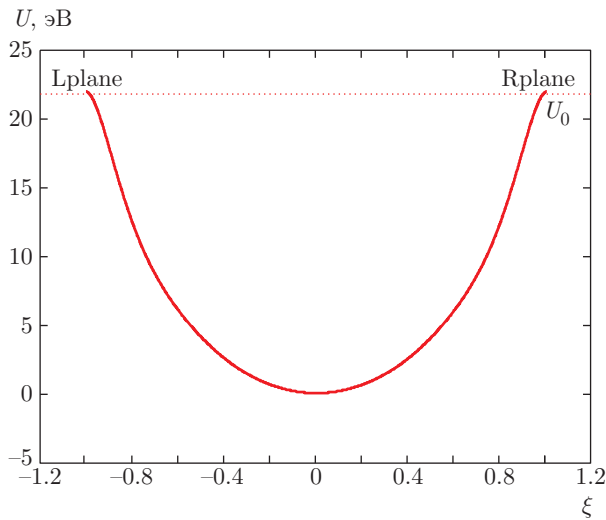


Рис. 1. Межплоскостной потенциал в прямом кристалле Si (плоскость (011))

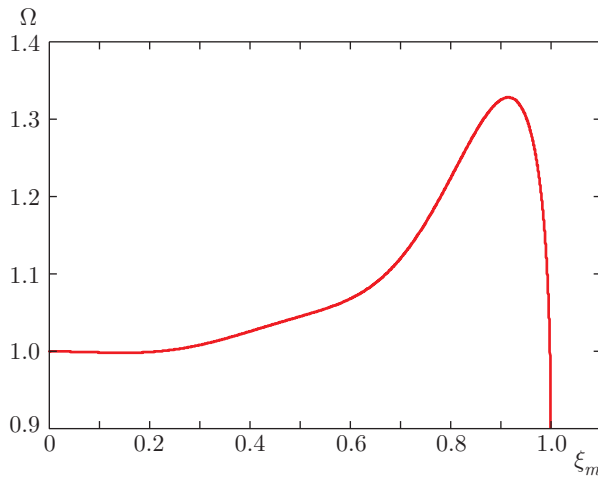


Рис. 2. Зависимость нормированной частоты от амплитуды ξ_m периодического движения каналированной частицы

— частота колебаний с малыми (нулевыми) амплитудами в приведенной выше потенциальной яме $U(\xi)$. Под амплитудой ξ_m подразумевается максимальное смещение периодического движения. Методика получения этой зависимости делалась стандартным образом (см., например, [9]). Движение позитрона в нормированной потенциальной яме $\tilde{U}(\xi)$, определяемой соотношением

$$\tilde{U}(\xi) = -\frac{1}{|\alpha_1|} \sum_{k=1}^7 \frac{\alpha_k}{2k} \xi^{2k},$$

описывается каноническими уравнениями

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{d\tilde{U}(\xi)}{d\xi}, \quad (2)$$

где $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время (фаза),

$$H(\xi, p) = \frac{p^2}{2} + \tilde{U}(\xi) = \varepsilon \quad (3)$$

— гамильтониан.

Гамильтониан в данном случае является интегралом движения. Для нахождения частоты (обратной периоду движения) удобно от канонических переменных (ξ, p) перейти с помощью канонического преобразования к новому гамильтониану с каноническими переменными «угол–действие» (θ, J) . Использование таких новых переменных представляет собой удобный способ получения частот периодического движения, не требующий выяснения деталей самого движения.

Действие J в зависимости от поперечной «энергии» ε движения в яме $\tilde{U}(\xi)$ определяется как интеграл по фазовой траектории с фиксированной ε

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \oint p(\xi, \varepsilon) d\xi = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\xi_m(\varepsilon)} \sqrt{2(\varepsilon - \tilde{U}(\xi))} d\xi,$$

где $\xi_m(\varepsilon)$ — максимальное отклонение (амплитуда), которое определяется из уравнения

$$\tilde{U}(\xi_m) = \varepsilon. \quad (4)$$

В силу однозначности зависимости $J(\varepsilon)$ для позитронов, попавших в межплоскостной канал, в принципе знаем (хотя бы численно) обратную функцию $\varepsilon = \varepsilon(J)$. Частицы с $\varepsilon \in [0, \tilde{U}_0]$ — каналированные частицы, совершающие ограниченное движение в пределах канала, а с $\varepsilon > \tilde{U}_0$ — надбарьерные частицы, движение которых не ограничено по ξ . Новый гамильтониан, где в качестве канонического импульса выбрано действие J , являющееся еще и адиабатическим инвариантом, для каналированных частиц равен

$$\overline{H}(\theta, J) = \overline{H}(J) = \varepsilon(J).$$

Отсюда имеем

$$\frac{dJ}{d\tau} = -\frac{\partial \varepsilon(J)}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \Omega(J) = \frac{\partial \varepsilon(J)}{\partial J}$$

— нормированная частота, т. е.

$$\Omega^{-1}(\xi_m) = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}}.$$

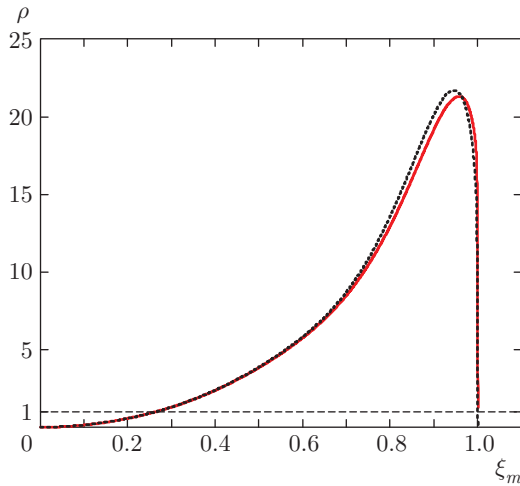


Рис. 3. Зависимости параметра мультипольности от амплитуды ξ_m периодического движения каналированной частицы: точная (сплошная кривая), гармоническая аппроксимация (пунктирная кривая) (см. ниже)

Зависимость нормированной частоты Ω от амплитуды ξ_m для потенциала (1) приведена на рис. 2.

Параметр мультипольности ρ существенным образом определяет характер излучения колеблющегося каналированного позитрона и выражается через параметры плоскостного периодического движения частицы следующим образом [1]:

$$\rho = 2\gamma^2 \langle (v_x/c)^2 \rangle,$$

где усреднение проводится по периоду движения. Для каналированного позитрона с заданной амплитудой движения ξ_m имеем

$$\begin{aligned} \rho(\xi_m) &= 2\gamma^2 \kappa^2 \langle p^2 \rangle = 2\gamma^2 \kappa^2 \Omega(\xi_m) J(\xi_m) = \\ &= \gamma^2 \kappa^2 \Omega(\xi_m) \frac{4}{\pi} \int_0^{\xi_m} \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} d\xi, \end{aligned}$$

где $\kappa \approx d\omega_0/2c$. Для потенциала (1) $\kappa \approx 16.052 \cdot 10^{-6}$ при определенной выше частоте ω_0 . На рис. 3 сплошной линией показана точная зависимость параметра мультипольности от амплитуды ξ_m . Таким образом, при данном потенциале могут реализовываться как дипольный, так и магнитотормозной типы излучения.

Полученные частоты соответствуют нелинейным (не гармоническим) колебаниям. Чем ближе ξ_m к 1, тем сильнее будет отличие периодического движения от гармонического. Сравнение при заданном значении ξ_m точного численного решения уравнения

движения с аппроксимирующим гармоническим колебанием с той же амплитудой ξ_m и нормированной частотой $\Omega(\xi_m)$,

$$\xi = \xi_m \cos(\Omega(\xi_m)\tau), \tag{5}$$

показано на рис. 4. На рис. 4 приведены зависимости ξ от $\tau/2\pi$: сплошные линии соответствуют точному численному решению уравнений движения, а штриховые — гармонической аппроксимации. Таким образом, практически во всем диапазоне $0 \leq \xi_m \leq 0.980$ движение каналированных позитронов можно считать гармоническим с рассчитанными величинами частот $\Omega(\xi_m)$.

Если периодическое движение позитрона рассматривать в гармоническом приближении (5), то выражение для параметра мультипольности упрощается до

$$\rho(\xi_m) = 2\gamma^2 \kappa^2 \langle p^2 \rangle = (\gamma\kappa\Omega(\xi_m)\xi_m)^2.$$

На рис. 3 показана зависимость параметра мультипольности (пунктирная линия), рассчитанная по этой формуле. Отсюда видно, что гармоническое приближение периодического движения позитронов с энергией $E = 120$ ГэВ является вполне приемлемым для расчета спектра излучения каналированных частиц.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ КАНАЛИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПО АМПЛИТУДАМ ДВИЖЕНИЯ

Помимо зависимости частоты от амплитуды периодического движения, для определения полного спектра излучения от всех захваченных в каналирование позитронов необходимо знать:

- N , относительную долю частиц пучка, захваченных в каналирование;

- $f(\xi_m)$, распределение плотности каналированных позитронов по амплитудам ξ_m . Полагаем, что на входе в прямой кристалл позитроны распределены равномерно по поперечной координате x , а следовательно, и по ξ , и с угловым распределением $g(\vartheta)$. В нормированных канонических переменных (ξ, p) согласно (2) имеем следующую связь между ϑ и p :

$$p = \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{v_s}{\omega_0(d/2)} \frac{dx}{ds} \approx \frac{2c}{\omega_0 d} \vartheta = \frac{\vartheta}{\kappa}, \tag{6}$$

где $s = v_s t \approx ct$ — продольная координата вдоль канала и $1/\kappa \approx 6.230 \cdot 10^4$. Отсюда распределение частиц на входе в кристалл по величине p принимает вид

$$\tilde{g}(p) = \kappa g(\kappa p).$$

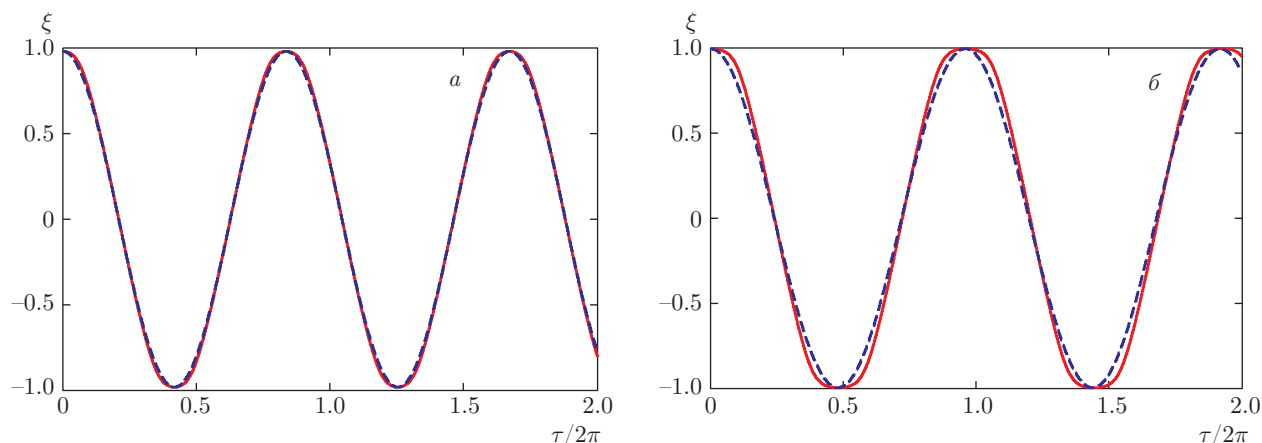


Рис. 4. Сравнение решений при $\xi_m = 0.980$ (а), 0.995 (б)

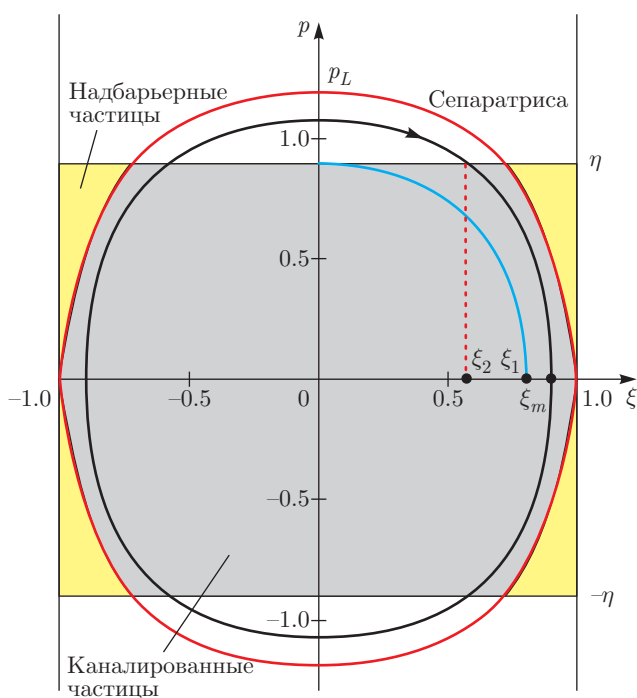


Рис. 5. Фазовый портрет захвата частиц в каналирование

Замкнутая фазовая кривая $p = p(\xi, \xi_m)$ с фиксированной ξ_m на плоскости $\{\xi, p\}$ для каналированной частицы (см. рис. 5) согласно (3), (4) определяется выражением

$$p(\xi, \xi_m) = \pm \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}, \quad (7)$$

$$\xi \in [-\xi_m, \xi_m], \quad 0 \leq \xi_m \leq 1.$$

Сепаратриса — фазовая кривая, разделяющая каналированные и надбарьерные частицы, — описывается выражением $p_c(\xi) = p(\xi, 1)$. Максимальное значение

p_L соответствует углу Линдхарда ϑ_L , достигается при $\xi = 0$ и равно $p_L = |p_c(0)| = \sqrt{2\tilde{U}(1)}$. При рассматриваемых параметрах прямого кристалла и величине энергии позитронов согласно (6) имеем $p_L \approx 1.189$ и $\vartheta_L \approx 19.093 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, доля частиц N , захваченных в режим каналирования, т. е. попавших внутрь сепаратрисы, определяется выражением

$$N = \int_0^1 d\xi \int_{-|p_c(\xi)|}^{|p_c(\xi)|} \tilde{g}(p) dp. \quad (8)$$

Найдем теперь функцию плотности $f(\xi_m)$ распределения частиц по амплитудам только для частиц, попавших в каналирование. Далее под $p(\xi, \xi_m)$ будем подразумевать положительную ветвь определения (7). Относительное число частиц из каналированных N , имеющих амплитуды $\xi \leq \xi_m$, равно

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N} \int_0^{\xi_m} d\xi \int_{-p(\xi, \xi_m)}^{p(\xi, \xi_m)} \tilde{g}(p) dp, \quad (9)$$

т. е. $F(1) = 1$.

Тогда для функции плотности распределения (для N частиц, попавших в каналирование) получаем выражение

$$f(\xi_m) \equiv \frac{dF(\xi_m)}{d\xi_m} = \frac{1}{N} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \times$$

$$\times \int_0^{\xi_m} d\xi \frac{\tilde{g}(p(\xi, \xi_m)) + \tilde{g}(-p(\xi, \xi_m))}{p(\xi, \xi_m)}. \quad (10)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением простейшего случая равномерного и симметричного относительно нуля распределения частиц пучка по углам ϑ , т. е.

$$g(\vartheta) = \frac{1}{2\vartheta_0} \begin{cases} 1, & \text{если } \vartheta \in [-\vartheta_0, \vartheta_0], \\ 0, & \text{если } \vartheta \notin [-\vartheta_0, \vartheta_0]. \end{cases}$$

Отсюда согласно (6) на плоскости нормированных переменных имеем

$$\tilde{g}(p) = \frac{1}{2\eta} \begin{cases} 1, & \text{если } p \in [-\eta, \eta], \\ 0, & \text{если } p \notin [-\eta, \eta], \end{cases}$$

где граница пучка по переменной p равна $\eta = \vartheta_0/\kappa$.

а) Для случая, когда полуширина углового разброса больше угла Линдхарда, т. е. $\vartheta_0 > \vartheta_L$ и, следовательно, $\eta > p_L$, согласно предыдущим выкладкам, имеем

$$N = \frac{1}{\eta} \int_0^1 |p_c(\xi)| d\xi = \frac{1}{\eta} \int_0^1 d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(1) - \tilde{U}(\xi))},$$

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi p(\xi, \xi_m) = \frac{1}{N\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))},$$

$$f(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}}.$$

Таким образом, при $\vartheta_0 > \vartheta_L$ функции $F(\xi_m)$ и $f(\xi_m)$ не зависят от ϑ_0 .

Рассмотрим приближение параболического потенциала, когда приведенные выше формулы интегрируются до конца в аналитическом виде. Для этого ограничимся в представлении потенциала $\tilde{U}(\xi)$ только первым членом разложения, т. е. $\tilde{U}(\xi) = \xi^2/2$. Тогда

$$\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} \rightarrow \sqrt{\xi_m^2 - \xi^2}.$$

Отсюда получаем

$$N = \frac{\pi}{4\eta}, \quad F(\xi_m) = \xi_m^2, \quad f(\xi_m) = 2\xi_m.$$

б) Для случая, когда полуширина углового разброса пучка меньше угла Линдхарда, т. е. $\vartheta_0 < \vartheta_L$ и, следовательно, $\eta < p_L$ (см. рис. 5), введем амплитуду ξ_1 , фазовая кривая для которой имеет максимум $p(0, \xi_1) = \eta$, т. е. определяется из уравнения $\sqrt{2\tilde{U}(\xi_1)} = \eta$. Кроме того, для любой фазовой кривой с амплитудой $\xi_1 < \xi_m \leq 1$ определяем значение ξ_2 , зависящее от ξ_m . Зависимость $\xi_2(\xi_m)$ задается уравнением $\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi_2))} = \eta$. Заметим, что $\xi_2(\xi_1) = 0$. Согласно формулам общего вида (8)–(10) для рассматриваемого случая углового разброса в пучке позитронов получаем

$$N = \xi_2(1) + \frac{1}{\eta} \int_{\xi_2(1)}^1 d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(1) - \tilde{U}(\xi))}, \quad (11)$$

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N} \begin{cases} \frac{1}{\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}, & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \xi_1, \\ \frac{1}{\eta} \int_{\xi_2(\xi_m)}^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} + \xi_2(\xi_m), & \text{если } \xi_1 \leq \xi_m \leq 1, \end{cases}$$

$$f(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \begin{cases} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}}, & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \xi_1, \\ \int_{\xi_2(\xi_m)}^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}}, & \text{если } \xi_1 \leq \xi_m \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

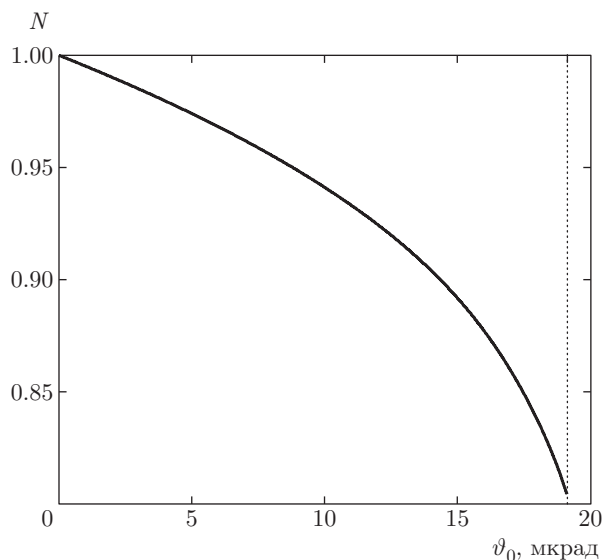


Рис. 6. Зависимость захвата в канал от углового разброса ϑ_0

Таким образом, при $\vartheta_0 < \vartheta_L$ в параболическом приближении получаем $\xi_1 = \eta$ и $\xi_2(\xi_m) = \sqrt{\xi_m^2 - \eta^2}$, а предыдущие формулы сводятся к следующим:

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \arcsin \eta,$$

$$F(\xi_m) = \frac{1}{2N\eta} \times \begin{cases} \pi \xi_m^2 / 2, & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \eta, \\ \eta \sqrt{\xi_m^2 - \eta^2} + \xi_m^2 \arcsin(\eta / \xi_m), & \text{если } \eta \leq \xi_m \leq 1, \end{cases}$$

$$f(\xi_m) = \frac{\xi_m}{N\eta} \begin{cases} \pi/2, & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \eta, \\ \arcsin(\eta / \xi_m), & \text{если } \eta \leq \xi_m \leq 1. \end{cases}$$

Рассчитанная по формуле (11) зависимость относительного захвата N в режим каналирования от величины полуширины углового разброса пучка ϑ_0 при $0 < \vartheta_0 \leq \vartheta_L$ для потенциала (1) показана на рис. 6. Рассчитанные согласно (12) функции плотности $f(\xi_m)$ для некоторых значений $\vartheta_0 \cdot 10^6$ показаны на рис. 7.

Из проведенного анализа следует важный для дальнейшего вывод: в потенциале (1), где $d\tilde{U}/d\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm 1$, плотность распределения $f(\xi_m) \rightarrow 0$ при $\xi_m \rightarrow 1$.

Таким образом, показана малая (практически нулевая) плотность каналированных частиц для колебаний с амплитудами близкими к единице. Это лишний раз делает приближение о гармоническом

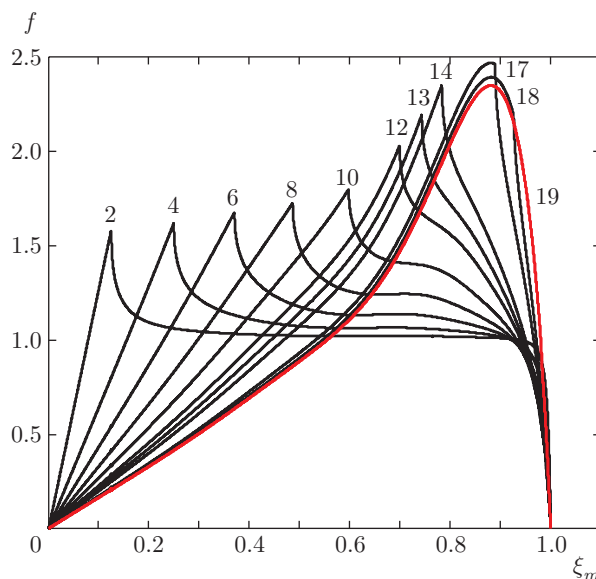


Рис. 7. Функции распределения каналированных частиц по амплитудам ξ_m для различных значений ϑ_0 [мкрад] (числа над кривыми)

характере движения каналированных позитронов в кристалле достаточно справедливым.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ КАНАЛИРОВАННЫХ ПОЗИТРОНОВ ПРИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Для нахождения спектра излучения каналированного позитрона, колеблющегося в межплоскостном потенциале (1), используем формулу, полученную в книге [1] (см. с. 303), для квазипериодического движения частицы при любых значениях параметра мультипольности ρ , с учетом квантового эффекта отдачи при излучении фотона. Эта формула справедлива для расчетов систем, в которых частица совершает достаточно большое (десять и более) число колебаний вдоль прямой линии. При выводе формулы учитывалась связь поперечного и продольного движений. Необходимость рассмотрения спектра излучения в таком самом общем виде связано с тем, что в потенциале (1) параметр мультипольности (см. рис. 3) перекрывает достаточно широкий диапазон значений ρ , обеспечивающий разные типы излучения (см. Введение). Спектр излучения одного позитрона на единице длины короткого кристалла определяется следующим выражением:

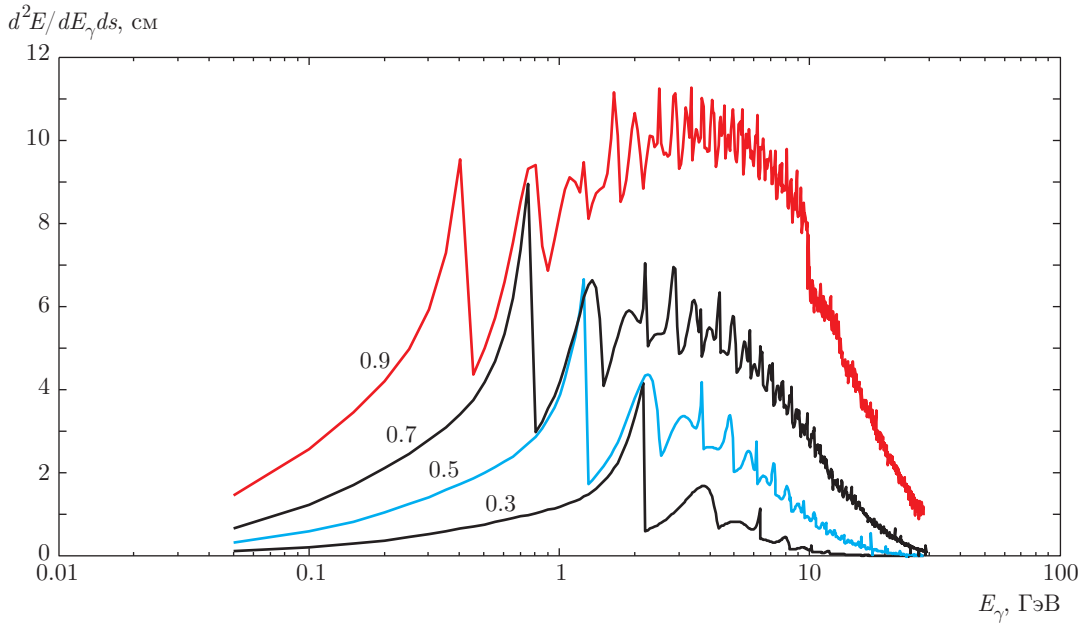


Рис. 8. Спектральные зависимости $d^2E/dE_\gamma ds$ от E_γ , полученные методом [1] с учетом отдачи при излучении для значений ξ_m , отмеченных на каждой кривой

$$\begin{aligned} \frac{d^2E}{dE_\gamma ds} &= -\frac{\alpha E_\gamma}{c(2\pi\gamma)^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(1 - \zeta(1 + \rho/2)) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \times \\ &\times J_0 \left(2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \mu(\varphi) \sqrt{\zeta(n - \zeta(1 + \rho/2))} \right) \times \\ &\times \left[1 + \frac{A(E_\gamma)}{2} (\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2))^2 \right] \times \\ &\times \cos \left\{ (n - \zeta\rho/2)(\varphi_1 - \varphi_2) + \zeta \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \mu^2(\varphi) \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\alpha = 1/137.04$, E_γ — энергия испускаемого фотона, ступенчатая функция $\Phi(y) = 1$ при $y \geq 0$ и $\Phi(y) = 0$ при $y < 0$, J_0 — функция Бесселя, $\mu(\varphi) = \gamma(v_x(\varphi) - \langle v_x \rangle)/c$ (в потенциале (1) для каналированного позитрона $\langle v_x \rangle = 0$),

$$\begin{aligned} \zeta(E_\gamma, \xi_m) &= \frac{E_\gamma E}{2\gamma^2(\hbar\omega)(E - E_\gamma)}, \quad \omega = \omega_0\Omega(\xi_m), \\ A(E_\gamma) &= 1 + \frac{E_\gamma^2}{2E(E - E_\gamma)}. \end{aligned}$$

Согласно сделанному ранее анализу, движение позитрона в потенциальной яме (1) представляем в виде гармонического колебания (5) с частотой, зависящей от амплитуды ξ_m . Для такой аппроксимации

рассчитаны по предыдущей формуле и показаны на рис. 8 спектральные зависимости $d^2E/dE_\gamma ds$ от E_γ одного каналированного позитрона со следующими значениями: $\xi_m = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

При расчете величины спектра для каждого значения E_γ суммирование по n в (13) заканчивалось на $n_{max}(E_\gamma)$, когда добавка следующего члена с $n = n_{max}(E_\gamma) + 1$ относительно накопленной суммы становилась меньше 1%. Интегрирование проводилось с точностью 10^{-3} .

Полное спектральное излучение всеми захваченными в канал позитронами $(d^2E/dE_\gamma ds)_{tot}$ будет определяться выражением

$$\left(\frac{d^2E}{dE_\gamma ds} \right)_{tot} = N_0 \int_0^1 f(\xi_m) \Psi(E_\gamma, \xi_m) d\xi_m, \quad (14)$$

где $\Psi(E_\gamma, \xi_m)$ — функция спектральной интенсивности одного позитрона с амплитудой ξ_m , т. е. правая часть выражения (13). Рассчитанная по формуле (14) зависимость $(d^2E/dE_\gamma ds)_{tot}$ от E_γ для двух случаев начальной полуширины углового разброса пучка позитронов $\vartheta_0 \cdot 10^6 = 4$ и $\vartheta_0 \cdot 10^6 = 19$ показана на рис. 9. Максимальный уровень полного спектра излучения и соответствующее ему значение энергии фотона E_γ приведены в таблице.

Как отмечалось выше, формула (13) описывает излучение при любых значениях параметра мульти-

Таблица

$\vartheta_0 \cdot 10^6$	η	N	$\max(d^2E/dE_\gamma ds)_{tot}$	E_γ , ГэВ
4	0.249	97.96 %	≈ 4.2 см	$\approx (1.95-2.30)$
19	1.184	80.79 %	≈ 5.1 см	$\approx (2.27-2.96)$

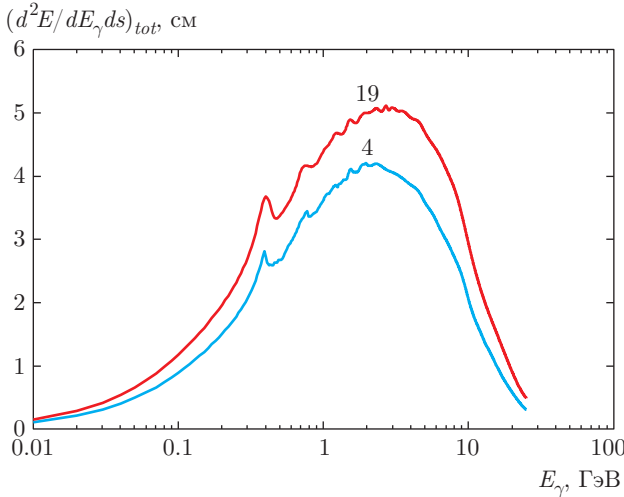


Рис. 9. Полная спектральная интенсивность в зависимости от энергии излучаемых фотонов E_γ , полученная методом [1] с учетом отдачи при излучении

польности ρ , включая и квантовую область, когда необходимо учитывать отдачу при излучении фотона. Если пренебречь этой отдачей, то функции $\zeta(E_\gamma, \xi_m)$ и $A(E_\gamma)$ в (13) принимают вид

$$\zeta(E_\gamma, \xi_m) = \frac{E_\gamma}{2\gamma^2(\hbar\omega)}, \quad A(E_\gamma) = 1 + \frac{E_\gamma^2}{2E^2}.$$

Для этого случая на рис. 12 показана спектральная зависимость (пунктирная линия b) для всех каналированных позитронов при $\vartheta_0 \cdot 10^6 = 19$.

5. РАСЧЕТ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МАГНИТОТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Кроме расчета излучения методом [1] (формула (13)), рассмотрим процесс излучения при каналировании позитронов другим методом, основанным на уравнениях классической электродинамики. Этот метод справедлив, когда направление движения частицы при ее движении в поле изменяется на угол, значительно превосходящий характерный угол излучения $\sim 1/\gamma$. Суть метода состоит

в том, что учитывается только поперечное движение и пренебрегается интерференцией от далеких участков траектории, как это реализуется в случае магнитотормозного излучения. Тогда согласно [16] (см. с. 258) полное спектральное излучение по частоте фотонов $\tilde{\omega}$ (или энергии $E_\gamma = \hbar\tilde{\omega}$) на единице длины s , генерируемое ультррелятивистским каналированным позитроном, совершающим гармонические поперечные колебания с частотой $\omega(\xi_m)$, определяется выражением

$$\frac{d^2E}{dE_\gamma ds} = -M(\xi_m) \frac{2e^2}{\gamma^2 c \hbar} n \times 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{Ai}'(u)}{u} + \frac{1}{2} \int_u^\infty \text{Ai}(s) ds \right\} d\varphi, \quad (15)$$

где $E_\gamma = \hbar\tilde{\omega}$ — постоянная Планка, $M(\xi_m) = \omega(\xi_m)/2\pi c$ — число колебаний частицы при прохождении единицы длины кристалла, $n = \tilde{\omega}/\omega(\xi_m)$,

$$\text{Ai}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{y^3}{3} + uy\right) dy$$

— функция Эйри,

$$\text{Ai}'(u) = \frac{d}{du} \text{Ai}(u),$$

$$u = u(\xi_m, \varphi) = \chi(\xi_m) \left(\frac{n}{\cos \varphi} \right)^{2/3},$$

$$\chi(\xi_m) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{c}{\omega(\xi_m)} \frac{2}{\xi_m d} \right)^{2/3}.$$

Движение позитрона, как и раньше, в потенциальной яме (1) представляется в виде гармонического колебания (5) с частотой, зависящей от амплитуды ξ_m . Для такой аппроксимации рассчитаны по предыдущей формуле (15) и показаны на рис. 10 (аналогично рис. 8) спектральные зависимости $d^2E/dE_\gamma ds$ от E_γ одного каналированного позитрона со следующими значениями амплитуды $\xi_m = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.940, 0.995, 0.999$. Таким образом, теперь полное излучение всех захваченных в канал частиц определяется выражением

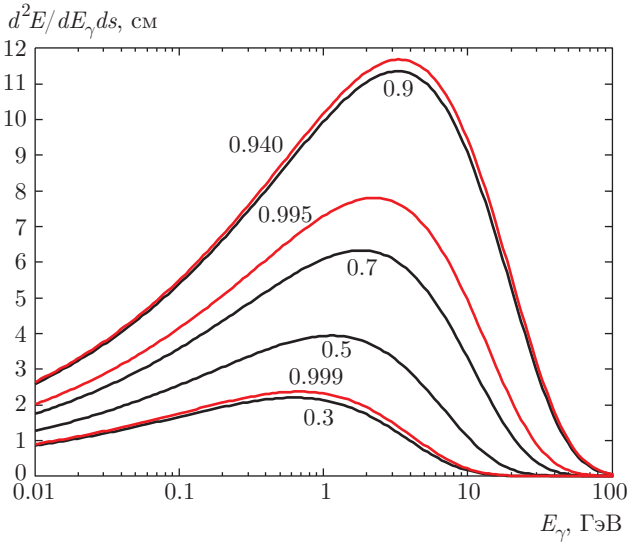


Рис. 10. Спектральная зависимость $d^2E/dE_\gamma ds$ от E_γ , полученная методом классической электродинамики [16] для значений ξ_m , отмеченных на каждой кривой

$$\left(\frac{d^2E}{dE_\gamma ds}\right)_{tot} = N \int_0^1 f(\xi_m) L(E_\gamma, \xi_m) d\xi_m, \quad (16)$$

где $L(E_\gamma, \xi_m)$ — функция спектральной интенсивности одного позитрона с амплитудой ξ_m , т.е. правая часть выражения (15). Рассчитанная по формуле (16) зависимость $(d^2E/dE_\gamma ds)_{tot}$ от E_γ для двух случаев начальной полуширины углового разброса пучка позитронов $\vartheta_0 = 4, 19$ мкрад показана на рис. 11.

На рис. 12 представлены спектральные зависимости, полученные для случая $\vartheta_0 = 19$ мкрад с помощью двух методов из [1] с учетом и без учета отдачи и с помощью классической электродинамики [16]. Сравнение этих зависимостей показывает их удовлетворительное согласие: максимум спектра излучения по классической электродинамике превышает максимум с учетом отдачи менее чем на 10%.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе было достаточно подробно рассмотрено планарное периодическое движение каналированного позитрона в прямом кристалле с ориентацией (011): найдены зависимости частоты колебаний и параметра мультипольности от амплитуды. Широкий диапазон значений параметра мультипольности в рассмотренном потенциале указывает на реализацию различных типов излучения: интерференционного — частицами в основном с малыми амплитуда-

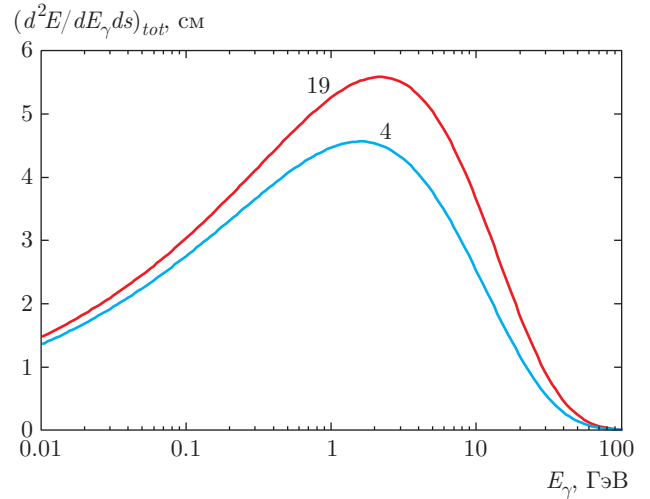


Рис. 11. Полная спектральная интенсивность в зависимости от энергии излучаемых фотонов E_γ , полученная методом классической электродинамики [16]

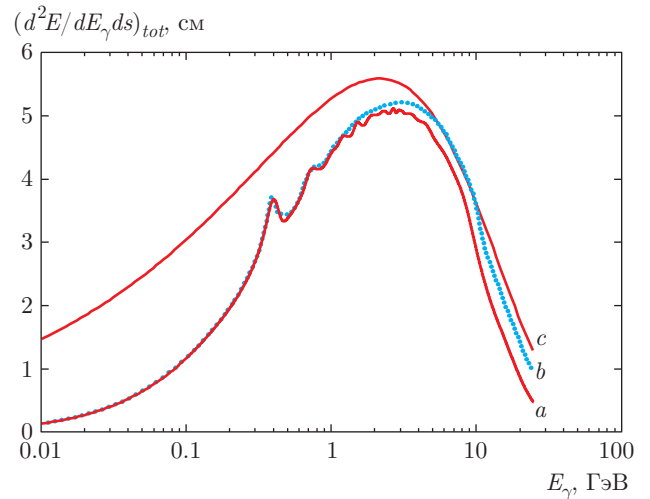


Рис. 12. Полные спектральные интенсивности в зависимости от энергии излучаемых фотонов E_γ при $\vartheta_0 = 19$ мкрад, рассчитанные методом [1] с учетом отдачи (кривая *a*) и без учета отдачи (кривая *b*), а также методом классической электродинамики [16] (кривая *c*)

ми — и магнитотормозного — с относительно большими амплитудами. Показано, что в таком потенциале плотность распределения каналированных частиц по амплитудам колебаний ξ_m стремится к нулю при $\xi_m \rightarrow 1$. Это как раз те частицы, которые при своем движении близко приближаются к кристаллическим плоскостям. Таких частиц мало и, кроме того, эти частицы из-за взаимодействия с ядрами кристаллической решетки с большей вероятностью могут выходить из режима каналирования, т.е. быть деканалированными.

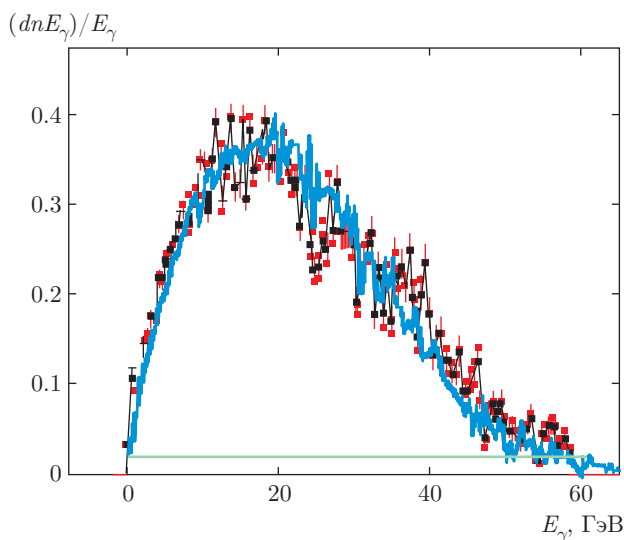


Рис. 13. (В цвете онлайн) Сравнение между расчетными (голубая линия) и измеренными (точки) спектрами потерь энергии каналированных позитронов в кристалле кремния (110) длиной 2 мм. Зеленая линия отражает потери в аморфном состоянии

Показано, что для основной массы каналированных частиц с амплитудами, меньшими 0.98, их движение представляет собой гармонические колебания с рассчитанными частотами, зависящими от их амплитуд. В таком гармоническом приближении существенно упрощается расчет спектра излучения всех каналированных частиц двумя способами: методом [1] с учетом и без учета квантовой отдачи и методом классической электродинамики [16]. Сравнение полученных результатов показывает их удовлетворительное согласие: максимум спектра излучения по классической электродинамике превышает такой максимум с учетом отдачи менее чем на 10%.

Таким образом, с учетом того, что метод [1] применим только для прямого кристалла, метод классической электродинамики [16] может послужить основой для дальнейшего рассмотрения процесса излучения в изогнутых монокристаллах.

Приведенное выше рассмотрение процесса излучения фотонов в кристалле использовалось для сравнения с измеренными радиационными потерями в эксперименте INSURAD [5], и было достигнуто замечательно хорошее согласие (см. рис. 13). При этом для учета множественности рождения фотонов в протяженном кристалле использовался метод Монте-Карло, где вероятность рождения фотонов на единицу длины описывалась полученными выше спектрами.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты доказывают перспективы применения монокристаллов для создания мощных источников направленного излучения на ускорителях и могут быть использованы при планировании новых исследований в ЦЕРН и ГНЦ ИФВЭ.

Работа поддержана дирекцией ГНЦ ИФВЭ и грантом № 09-02-92431-КЭ_а совместного проекта РФФИ–Консорциум EINSTEIN (Италия).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, *Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах*, Наука, Новосибирск (1989).
2. J. Bak, J. A. Ellison, B. Marsh, F. E. Meyer, O. Pedersen, J. B. Petersen, E. Uggerhøj, K. Østergaard, S. P. Møller, A. H. Sørensen, and M. Suffert, *Nucl. Phys. B* **254**, 491 (1985).
3. Э. Н. Цыганов, *ЭЧАЯ* **20**(1), 5 (1989).
4. A. Aryan, R. O. Avakian, B. Badelek et al., *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **11**, 041001 (2008).
5. D. Lietti, E. Bagli, S. Baricordi et al., *Nucl. Instr. Meth. B* **283**, 84 (2012).
6. V. A. Maishev, *Nucl. Instr. Meth. B* **119**, 42 (1996).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
8. S. Bellucci and V. A. Maishev, *Nucl. Instr. Meth. B* **252**, 339 (2006).
9. A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York (1983) [А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984)].
10. А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович, в кн. *Физика XX века. Развитие и перспективы*, Наука, Москва (1984), с. 219.
11. F. Vivaldi, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 737 (1984).
12. Б. В. Чириков, *Природа* № 4 (1982).
13. В. А. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1972).
14. А. Пуанкаре, *Новые методы небесной механики, Избранные труды*, Наука, Москва (1972), т. 2, гл. 33.
15. S. Bellucci and V. A. Maishev, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, S2083 (2006).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, Москва (1960).