

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ НА ОСНОВЕ ВЗАИМНО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. И. Богданов<sup>a,b,c\*</sup>, Г. В. Авосоянц<sup>a,c</sup>, Л. В. Белинский<sup>a,c</sup>,  
К. Г. Катамадзе<sup>a,d</sup>, С. П. Кулик<sup>d</sup>, В. Ф. Лукичев<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Физико-технологический институт Российской академии наук  
117218, Москва, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

<sup>c</sup> Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»  
124498, Москва, Россия

<sup>d</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 декабря 2015 г.

Описывается новый метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно дополнительных оптических квадратурных измерений. В основе описываемого метода лежит корневой подход и использование в качестве базиса сдвинутых сжатых фоковских состояний. Теоретический анализ и выполненные численные эксперименты демонстрируют существенное превосходство разработанных средств по сравнению с описанными в литературе.

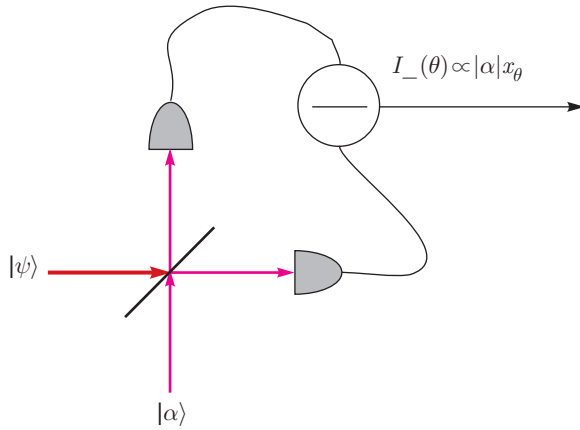
DOI: 10.7868/S0044451016080058

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Принцип дополнительности Нильса Бора является одним из краеугольных камней квантовой механики и квантовых информационных технологий. Согласно этому принципу, “данные, получаемые при разных условиях опыта, не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны, скорее, рассматриваться как дополнительные в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта” [1]. Принцип дополнительности настолько важен для описания квантовых явлений, что, например, согласно В. Паули, “по аналогии с термином «теория относительности» современную квантовую теорию можно было бы назвать «теорией дополнительности»” [2]. Формальное описание кван-

тового состояния, основанное на понятиях вектора состояния и матрицы плотности, не сводится к какому-либо одному распределению вероятностей. Со статистической точки зрения квантовое состояние можно рассматривать как естественное обобщение понятия распределения вероятностей [3]. Квантовая механика обеспечивает более глубокое и полное понимание вероятностных и статистических закономерностей по сравнению с классическими представлениями [4,5]. Согласно принципу дополнительности, экспериментальное изучение квантового состояния должно базироваться на измерениях совокупности взаимно дополнительных распределений. Например, экспериментальное исследование квантовой системы будет более полным, если данные, полученные при изучении квантового ансамбля в координатном пространстве, дополнить изучением того же ансамбля в канонически сопряженном (импульсном) пространстве. Известная задача Паули (Pauli Problem) как раз и состоит в том, чтобы реконструировать пси-функцию на основе координатного и им-

\* E-mail: bogdanov\_yurii@inbox.ru



**Рис. 1.** Схема гомодинных измерений. Неизвестное состояние  $|\psi\rangle$  совмещается на 50/50 светоделителе с когерентным состоянием гомодина  $|\alpha\rangle$ . Тогда разностный фототок  $I_-$ , регистрируемый при фазе гомодина  $\theta$  будет пропорционален  $|\alpha|x_\theta$ , где  $x_\theta$  — значение квадратурной компоненты

пульсного распределений [2]. Благодаря развитию техники гомодинирования в современной квантовой оптике [6, 7], задача об измерении квантового состояния перешла из сугубо теоретической области в область реальных квантовых информационных технологий, причем в более полной постановке, чем это первоначально предполагал В. Паули.

Оказалось, что для измерения квадратурных наблюдаемых электрического поля достаточно совместить на сбалансированном светоделителе (50/50) изучаемое поле с более мощным оптическим излучением (рис. 1). Тогда в выходных каналах такого светоделителя будет наблюдаться интерференционный сигнал, который может быть измерен фотодетекторами. Для того чтобы выделить зависящие от фазы гомодина флуктуации фототока на фоне постоянной компоненты, следует усилить и измерить разностный фототок.

В рассматриваемой схеме измеренные при разных значениях фазы гомодина  $\theta$  значения разностного фототока соответствуют собственным значениям  $x_\theta$  квадратурного оператора. При этом координата и импульс являются только двумя частными случаями, отвечающими фазам гомодина соответственно 0 и  $\pi/2$  [8–10]. С использованием рассматриваемой технологии были измерены однофотонные, двухфотонные, сжатые, смещенные когерентные и некоторые другие состояния света [11].

Квадратурная наблюдаемая в квантовой механике определяется как следующая линейная комбинация операторов координаты  $X$  и импульса  $P$  [9]:

$$X_\theta = X \cos \theta + P \sin \theta. \tag{1}$$

Заметим, что случай нулевого угла ( $\theta = 0$ ) отвечает оператору координаты, а случай  $\theta = \pi/2$  — оператору импульса.

Выразим операторы координаты и импульса через операторы рождения  $a^\dagger$  и уничтожения  $a$  квантованного электромагнитного поля:

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad P = -i \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Тогда квадратурный оператор может быть представлен следующей формулой:

$$X_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} [a \exp(-i\theta) + a^\dagger \exp(i\theta)]. \tag{3}$$

Рассмотрим собственные векторы  $|x, \theta\rangle$  и собственные значения  $x_\theta$  для квадратурного оператора  $X_\theta$ :

$$X_\theta |x, \theta\rangle = x_\theta |x, \theta\rangle. \tag{4}$$

Заметим, что квадратурная наблюдаемая  $X_\theta$  имеет непрерывный спектр ( $-\infty < x_\theta < \infty$ ).

Будем называть квадратурной волновой функцией некоторого квантового состояния  $|\psi\rangle$  проекцию  $\psi(x_\theta) \equiv \langle x, \theta | \psi \rangle$ . Заметим, что переход от исходной волновой функции по обобщенной координате  $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle \equiv \langle x, 0 | \psi \rangle$  к квадратурной волновой функции  $\tilde{\psi}(x_\theta)$  осуществляется посредством преобразования

$$\tilde{\psi}(x_\theta) = \int \psi(x') \langle x, \theta | x' \rangle dx',$$

которое в точности соответствует дробному преобразованию Фурье (FRFT) [12, 13]. Соответственно, обратный переход осуществляется при помощи обратного дробного преобразования Фурье (IFRFT):

$$\tilde{\psi}(x_\theta) = \text{FRFT}_\theta[\psi(x)], \quad \psi(x) = \text{IFRFT}_\theta[\tilde{\psi}(x_\theta)]. \tag{5}$$

В случае  $\theta = \pi/2$ , когда  $x_\theta = p$ , дробное преобразование Фурье превращается в обычное преобразование Фурье. Заметим, что ядра прямого и обратного преобразований являются комплексно-сопряженными друг другу.

В основе томографии оптических квантовых состояний лежит следующее важное свойство дробного преобразования Фурье. Пусть  $\psi_k(x)$  — собственные функции гармонического осциллятора, задающие базисный набор функций Чебышева – Эрмита:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{6}$$

где  $H_k(x)$  — полином Чебышева–Эрмита  $k$ -го порядка. Оказывается, что эти функции сохраняют свой вид под действием дробного преобразования Фурье, приобретая при этом фазу  $\exp(ik\theta)$ , которая зависит от номера базисной функции  $k$ :

$$\text{FRFT}[\psi_k(x)] = \exp(ik\theta)\psi_k(x_\theta). \quad (7)$$

С формальной точки зрения можно считать, что базисные функции Чебышева–Эрмита являются собственными функциями унитарного оператора, задающего дробное преобразование Фурье. В соответствии с унитарным характером преобразования, собственные значения равны по модулю единице (в нашем случае это  $\exp(ik\theta)$ ).

Для восстановления квадратурных состояний используются разные подходы, обзор которых можно найти в работах [11, 14–17]. Традиционные способы основаны на восстановлении функции Вигнера из исходных распределений квадратур путем обратного преобразования Радона [6, 7], а также с помощью использования специальных модельных функций (pattern functions) [14, 18]. Более современный подход, который используется и в настоящей работе, основан на восстановлении квантовых состояний методом максимального правдоподобия [3–5, 19].

В настоящем исследовании мы опираемся на так называемый корневой подход к рассматриваемой проблематике, развитый в наших работах [3–5, 20–24]. Томография на основе корневого подхода предполагает, что мы оцениваем не непосредственно матрицу плотности квантового состояния  $\rho$ , а квадратный корень из нее  $c = \sqrt{\rho}$  (отсюда и название метода). Рассматриваемая величина есть амплитуда вероятности очищенного состояния. Понятно, что очищенное состояние определено неоднозначно; например, если  $U$  — произвольная унитарная матрица соответствующей размерности, то  $\sqrt{\rho}$  и  $\sqrt{\rho}U$  эквивалентны. Такая неоднозначность, однако, не создает каких-либо трудностей, поскольку рассматриваемые очищенные состояния отвечают одной и той же матрице плотности  $\rho$ .

Заметим, что непосредственное описание матрицы плотности как объекта в многомерном пространстве является простым только в случае двумерного ( $s = 2$ ) состояния кубита (в этом случае геометрия квантового состояния непосредственно задается сферой Блоха). Однако, по мере роста размерности гильбертова пространства, геометрия пространства состояний становится очень сложной [25].

В нашем подходе квантовое состояние — это просто произвольная комплексная матрица  $c$ , удовлетворяющая условию нормировки  $\text{Tr}(cc^\dagger) = 1$ .

Размерность матрицы  $c$  равна  $s \times r$ , где  $s$  — размерность гильбертова пространства,  $r$  — ранг квантового состояния (число компонентов в смеси),  $1 \leq r \leq s$ . Фактически, очищенное квантовое состояние «живет» в расширенном гильбертовом пространстве размерности  $s \times r$ . Простота описания пространства возможных состояний обеспечивает простоту итерационных процедур реконструкции, а также возможность описания состояний различного ранга от чистых ( $r = 1$ ) до максимально смешанных ( $r = s$ ). Еще одним преимуществом развиваемого подхода является возможность измерения информации о параметрах квантового состояния, которая содержится в том или ином протоколе квантовых измерений [10, 19, 21].

## 2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Возможные квадратурные состояния обладают бесконечным разнообразием, однако в настоящий момент существует очень ограниченный набор классов состояний, доступных в эксперименте и представляющих интерес для задач квантовой оптики и квантовой информатики. Среди них — суперпозиции фоковских состояний, когерентные состояния, суперпозиция когерентных состояний (в частности, состояние кота Шредингера), сдвинутые и сжатые фоковские состояния [11]. Часто в процессе томографии исследуемое состояние представляется в фоковском базисе, при этом для полноценного представления нередко необходимо учитывать несколько десятков или сотен фоковских состояний, что приводит к большому числу восстанавливаемых действительных коэффициентов, а значит, к малой точности восстановления.

В настоящей работе мы используем базисный набор функций, который получается из набора фоковских состояний  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) путем последовательного применения операций сдвига  $D(\alpha)$  и сжатия  $S(\xi)$ :

$$|\alpha, \xi, k\rangle = S(\xi)D(\alpha)|k\rangle, \quad (8)$$

где

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a),$$

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right).$$

Здесь  $\alpha$  и  $\xi$  — комплексные параметры, а  $a^\dagger$  и  $a$  — операторы рождения и уничтожения фотонов.

Полученный набор функций  $|\alpha, \xi, k\rangle$ , так же как исходный набор  $|k\rangle$ , является полным.

Частными случаями рассматриваемого описания являются обычные фоковские состояния  $|k\rangle = |0, 0, k\rangle$  (когда  $\alpha = 0, \xi = 0$ ), когерентные состояния  $|\alpha\rangle = |\alpha, 0, 0\rangle$  (когда  $\xi = 0, k = 0$ ), сжатые вакуумные состояния  $|\xi\rangle = |0, \xi, 0\rangle$  (когда  $\alpha = 0, k = 0$ ), сжатые фоковские состояния  $|\xi, k\rangle = |0, \xi, k\rangle$  (когда  $\alpha = 0, k \neq 0$ ), сжатые когерентные состояния  $|\alpha, \xi\rangle = |\alpha, \xi, 0\rangle$  (когда  $k = 0$ ) и др. Во всех этих случаях в рассматриваемом базисе в разложении будет только одно ненулевое слагаемое. Таким образом, широкий набор важных, широко используемых квантовых состояний представляется в простейшей из возможных форм. В других важных случаях в новом базисе интересующие исследователя состояния представляются в виде суперпозиции из достаточно малого количества (часто двух–трех) базисных состояний, что кардинально увеличивает точность их восстановления.

Для восстановления квадратурного состояния поля в настоящей работе используется метод максимального правдоподобия, который заключается в поиске максимума функции логарифмического правдоподобия

$$S = \ln L, \tag{9}$$

где

$$L = \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta_k | c).$$

Здесь  $\{x_k, \theta_k\}$  — набор из  $n$  экспериментально измеренных значений квадратур  $x_k$  при соответствующих значениях фазы  $\theta_k$ . Плотность вероятности в точке  $(x_k, \theta_k)$  для состояния  $\rho \equiv cc^\dagger$  имеет вид

$$p(x_k, \theta_k | c) = \langle x_k, \theta_k | \rho | x_k, \theta_k \rangle = \sum_{j,l,m} (c^\dagger)_{ml} \varphi_l^*(x_k, \theta_k) \varphi_j(x_k, \theta_k) c_{jm}, \tag{10}$$

где  $\varphi_j(x, \theta)$  — набор базисных функций сдвинутых сжатых фоковских состояний (8):

$$\varphi_j(x, \theta) \equiv \langle x, \theta | \alpha, \xi, j \rangle = \sum_{k,l} \psi_k(x) \exp(ik\theta) S_{kl} D_{lj}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1. \tag{11}$$

Здесь  $S_{kl}$  и  $D_{lj}$  — матричные элементы операторов сжатия и сдвига в фоковском базисе, а  $\psi_k(x)$  — базисная функция гармонического осциллятора (6).

В настоящей работе при решении задачи максимизации (9) варьировались не только значения элементов матрицы  $c$ , но и параметры базиса  $\alpha$  и  $\xi$ . Таким образом определялись не только оптимальные

амплитуды вероятностей, но и оптимальный вид базисных функций.

Формально верхняя граница суммирования в (11) по индексам фоковских состояний  $k, l$  простирается до бесконечности, но в реальных вычислениях полагают  $k, l = 0, 1, \dots, N$ , ограничиваясь таким достаточно большим числом фотонов  $N$ , при котором вклад всех состояний с более высоким числом фотонов оказывается пренебрежимо малым.

Заметим, что в случае, когда  $s \ll N$ , имеет место радикальное снижение размерности задачи. В этом случае исходная задача в гильбертовом пространстве размерности  $N + 1$  сводится к рассмотрению задачи в гильбертовом пространстве существенно более низкой размерности  $s$ . Это, в свою очередь, приводит к существенному упрощению процедуры нахождения решения и радикальному увеличению точности восстановления квантовых состояний.

При заданных  $x$  и  $\theta$  формула (11) определяет отдельную строку длины  $s$  аппаратной матрицы протокола квантовых измерений. Скалярное произведение  $\sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j(x, \theta) c_{jl}$  определяет  $r$  амплитуд вероятности по числу компонент в смеси ( $l = 1, \dots, r$ ). Сумма квадратов модулей амплитуд определяет плотность  $p(x, \theta | c)$  (10), как уже отмечалось выше. При фиксированном  $\theta$  и различных  $x$  возникает набор строк, который определяет отдельное квадратурное распределение  $P_\theta(x | c)$ . Весь протокол квантовых измерений определяет совокупность взаимно дополнительных распределений  $P_\theta(x | c)$  при различных  $\theta$ .

Технически, для нахождения максимума функции  $S$  (9) решается уравнение правдоподобия, определяющее точку экстремума. В рамках корневого подхода оно имеет следующий вид [3]:

$$Rc = nc. \tag{12}$$

Здесь  $R$  — матрица размерности  $s \times s$ ,  $c$  — очищенная амплитуда вероятности, представляющая собой матрицу размерности  $s \times r$  для квантового состояния ранга  $r$ ,  $n$  — объем выборки. Матричные элементы матрицы  $R$  даются следующим выражением:

$$R_{jl} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_j^*(x_k, \theta_k) \varphi_l(x_k, \theta_k)}{p(x_k, \theta_k | c)}, \quad j, l = 0, 1, \dots, s-1. \tag{13}$$

Рассматриваемая задача является линейной по форме, однако сама матрица  $R$  зависит от неизвестной квадратурной плотности  $p(x, \theta | c)$ , поэтому, по существу, рассматриваемая задача является нелинейной и должна, вообще говоря, решаться методом итераций [3, 5].

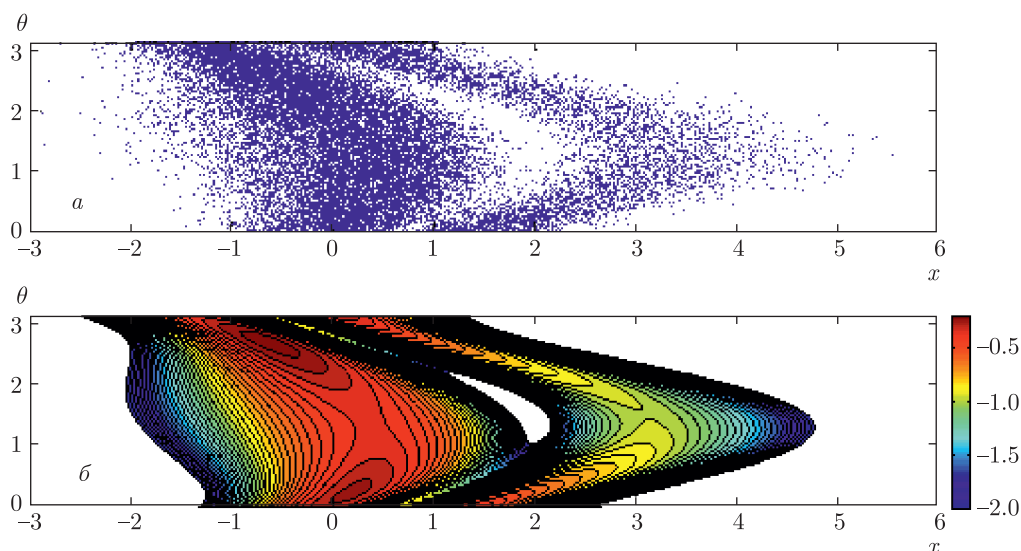


Рис. 2. Восстановление состояния в сжатом сдвинутом базисе Фока. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б) (представлен десятичный логарифм плотности)

### 3. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для тестирования разработанных методов, алгоритмов и программ анализа квадратурных квантовых измерений выполнялись численные эксперименты. Точность восстановления квантовых состояний, достигнутая в численных экспериментах, сравнивалась с полученной теоретически [20, 22].

Каждый численный эксперимент включает в себя следующие основные этапы: выбор квантового состояния, генерация данных квадратурных измерений, выбор модели для реконструкции квантового состояния, решение уравнения правдоподобия, оценка адекватности модельной реконструкции по отношению к данным численного эксперимента, уточнение модели в случае необходимости, расчет вероятности совпадения (fidelity) между реконструированным и точным состояниями, многократное повторение эксперимента (набор статистики), сравнение точности численных экспериментов с теоретическим предсказанием.

В качестве примера рассмотрим чистое состояние  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , где

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|\xi, \alpha, 0\rangle + 2i|\xi, \alpha, 1\rangle)$$

— суперпозиция сдвинутых сжатых фоковских состояний с параметром сдвига  $\alpha = 0.5 - 0.7i$  и параметром сжатия  $\xi = 0.3 + 0.1i$ . Объем выборки  $n$  случайных квадратурных данных  $\{x_k, \theta_k\}$  в рассматри-

ваемом примере составил 50 тысяч точек (рис. 2а). Данные генерировались методом Метрополиса в соответствии с рассчитанным квадратурным распределением  $p(x, \theta|\rho) = \langle x, \theta|\rho|x, \theta\rangle$ . Алгоритм Метрополиса [26, 27] основан на случайном блуждании точек, распределение которых асимптотически стремится к заданному распределению.

В рассматриваемом примере для построения адекватной модели в рамках набора сдвинутых сжатых состояний Фока (8) достаточно взять только две первые базисные функции ( $s = 2$ ) и ограничиться рассмотрением только чистых состояний ( $r = 1$ ). Заметим, что адекватность построенной таким образом модели может быть проверена в рамках критерия хи-квадрат [10, 20]. Соответствующий критерий хи-квадрат оценивает степень соответствия между квадратурным распределением, которое отвечает реконструированному состоянию (рис. 2б), и исходными данными численного эксперимента (рис. 2а). Расчеты показывают, что в рамках стандартного набора фоковских состояний для осуществления успешной реконструкции следует рассмотреть примерно 20 первых состояний ( $s = 20$ ). Заметим также, что стандартный подход предполагает оценку смешанного состояния полного ранга ( $r = s = 20$ ).

Задача максимизации функции логарифмического правдоподобия (9) сводится к итерационному решению уравнения правдоподобия (12). Заметим, что при использовании сдвинутых сжатых фоковских состояний (11) параметры сдвига  $\alpha$  и сжатия

$\xi$  также варьировались в процессе максимизации функции правдоподобия.

В рассматриваемом примере восстановленные модифицированным методом максимального правдоподобия параметры сдвига и сжатия, а также вектор состояния составили соответственно

$$\alpha_{exp} = 0.5023 - 0.6956i, \quad \xi_{exp} = 0.3044 + 0.1003i,$$

$$|\psi_{exp}\rangle = 0.4482|\xi_{exp}, \alpha_{exp}, 0\rangle + (0.0015 + 0.8939i)|\xi_{exp}, \alpha_{exp}, 1\rangle.$$

Вероятность совпадения теоретического и экспериментально восстановленного квантовых состояний оказалась равной  $F = |\langle \psi_{exp} | \psi_{theor} \rangle|^2 = 0.999968$ . Для сравнения заметим, что для тех же самых данных численного эксперимента стандартный подход, основанный на наборе фоковских состояний, обеспечил точность реконструкции только на уровне  $F = 0.9970$ . Мы видим, что в рассматриваемом примере предложенный в настоящей работе метод позволяет уменьшить потери точности  $1 - F$  примерно в 94 раза по сравнению со стандартным методом обработки данных (т. е. получить четыре девятки вместо двух для параметра  $F$ ). Заметим, что, получая довольно высокие значения точности, такие как  $F = 0.9970$ , исследователь зачастую может прийти к неверному выводу о том, что точность разработанного им метода реконструкции достаточно велика. В этой связи важно еще до проведения эксперимента иметь адекватную оценку той точности, которую, согласно законам квантовой механики, способен обеспечить тот или иной протокол квантовых измерений. Замечательно, что такие оценки точности квантовых измерений могут быть получены на основе количественного анализа информации о параметрах квантового состояния, которая содержится в протоколе квантовых измерений [10, 21–23].

Сказанное иллюстрирует следующий пример, который отвечает сдвинутому базису Фока с параметром сдвига  $\alpha = (1 + i)/\sqrt{2}$ . В этом базисе было выбрано следующее состояние, представляющее собой суперпозицию нулевого и второго базисных состояний:  $|\psi\rangle = (|\alpha, 0\rangle + i|\alpha, 2\rangle)/\sqrt{2}$ . Объем выборки в каждом численном эксперименте составил  $n = 10000$ . Всего было выполнено 300 экспериментов. Рисунок 3а иллюстрирует хорошее согласие проведенных экспериментов (гистограмма) с теорией (сплошная кривая). Модель реконструкции отвечала набору сдвинутых фоковских состояний с параметрами  $s = 3, r = 1$ . Теоретическая кривая построена в рамках универсального распределения

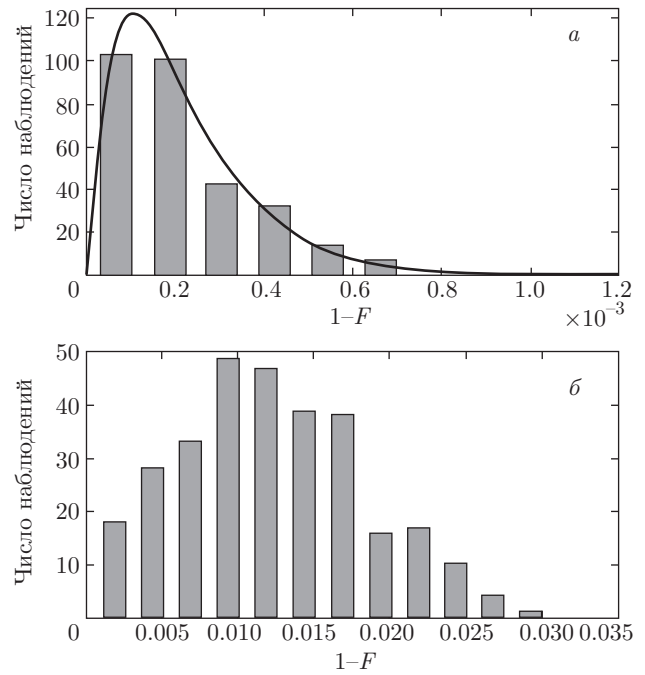


Рис. 3. Распределения потерь точности восстановления квантового состояния в рамках оптимального базисного набора на основе сжатых сдвинутых состояний Фока (а) и в рамках стандартного набора базисных состояний Фока (б). Гистограммы получены по результатам 300 численных экспериментов

для точности квантовых измерений [22]. Вид теоретической кривой точности зависит от исходного состояния  $\rho$ , объема выборки  $n$  и протокола квантовых измерений. Представленная кривая отвечает протоколу квадратурных измерений, включающему 5000 строк, которые определяются равномерной двумерной сеткой, включающей 100 узлов по квадратуре и 50 узлов по углу. Средние потери точности  $1 - F$  для распределения на рис. 3а составляют величину, равную 0.000219.

Результаты проведенных экспериментов сравнивались с результатами численных экспериментов, в которых использовалась стандартная версия метода максимального правдоподобия. Стандартная версия предполагает полный ранг матрицы плотности и использование базиса Фока (для рассматриваемого состояния использовалось 10 базисных состояний Фока,  $r = s = 10$ ). Было выполнено также 300 численных экспериментов. В этом случае средние потери точности  $1 - F$  составили величину, равную 0.0123 (рис. 3б). Мы видим, что использование оптимального базиса и ограничение ранга состояния позволили в рассматриваемом примере повысить точность восстановления примерно в 56 раз.

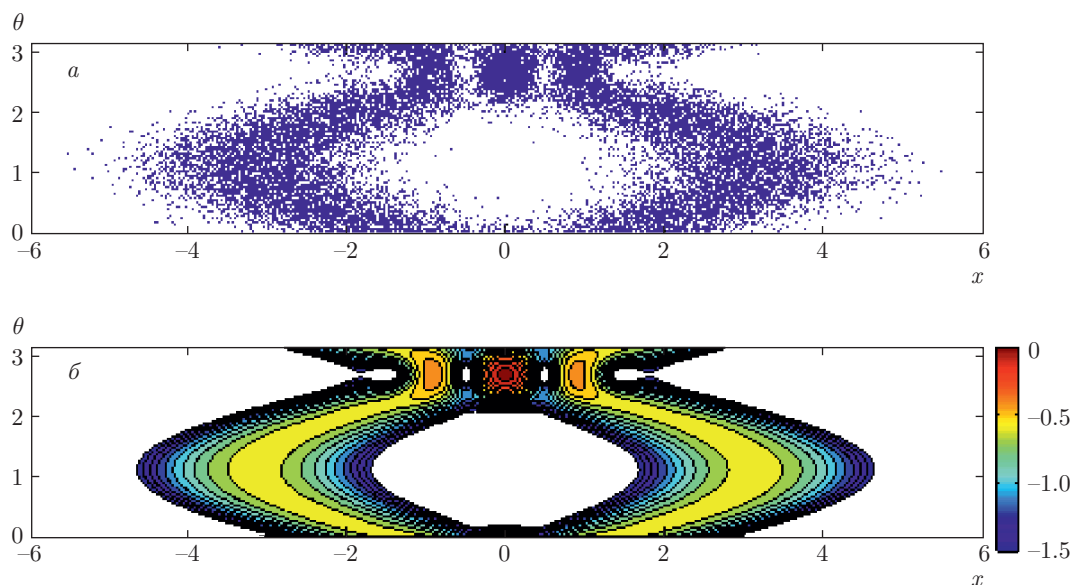


Рис. 4. Восстановление состояния кота Шредингера. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б). Представлен десятичный логарифм плотности

Следующий пример иллюстрирует восстановление состояния кота Шредингера. Рассматривалась следующая суперпозиция когерентных состояний:  $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$  [28], где  $N$  — нормировочная постоянная,  $\alpha = 1 - 2i$ .

Особенность этого состояния в том, что оно не может быть точно представлено в рассматриваемом базисе на основе сжатых сдвинутых состояний Фока. Однако соответствующая ошибка аппроксимации может быть сделана сколь угодно малой.

На рис. 4 представлены результаты статистического восстановления рассматриваемого квантового состояния в базисе сдвинутых сжатых состояний Фока размерности  $s = 10$ . При этом восстанавливаемое состояние предполагалось чистым ( $r = 1$ ). Объем выборки в численном эксперименте составил  $n = 50000$ . Комплексные параметры сжатия и сдвига для базиса, так же как и вектор состояния  $s$ , снова оценивались рассмотренным выше модифицированным методом максимального правдоподобия. Точность оценки квантового состояния составила  $F = 0.99985$ .

#### 4. ВЫВОДЫ

Рассмотрено статистическое восстановление квантовых состояний на основе оптических квадратурных квантовых измерений с использованием корневого подхода.

Построены протоколы квантовых измерений, основанные на тесной связи рассматриваемой задачи с фундаментальным принципом дополнительности Н. Бора и формализмом дробного преобразования Фурье.

Разработаны методы, обеспечивающие существенно более высокую точность восстановления квантовых состояний по сравнению со стандартным подходом, что подтверждается результатами численных экспериментов и теоретического анализа. В настоящее время проводятся физические эксперименты по восстановлению квадратурных состояний разработанными методами.

Результаты исследования имеют существенное значение для разработки методов контроля квантовых информационных технологий с прецизионно высокой точностью, близкой к фундаментальному пределу, который определяется законами квантовой физики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 13-07-00711, 14-02-00749), гранта Президента РФ № МК-5860.2016.2, а также в рамках программы Российской академии наук в области фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бор, *Избранные научные труды*, т. 2, Наука, Москва (1971), с. 399–433. N. Bohr, *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in At-*

- mic Physics*, in P. A. Schilp (ed.), Albert Einstein, Philosopher–Scientist, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois, (1949), p. 200–241.
2. В. Паули, *Общие принципы волновой механики. Труды по квантовой теории*, т. 1, Наука, Москва (1975), с. 352–569; W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980), p. 212.
  3. Ю. И. Богданов, *Основная задача статистического анализа данных. Корневой подход*, МИЭТ, Москва (2002); arXiv:phys/0211109. 39p [Yu. I. Bogdanov, *Fundamental Problem of Statistical Data Analysis: Root Approach*, MIEE, Moscow (2002)].
  4. Ю. И. Богданов, *Опт. и спектр.* **96**, 735 (2004).
  5. Yu. I. Bogdanov, Proc. SPIE, ed. by Yu. I. Ozhigov, **6264**, 62640E-1–62640E-15 (2006); Yu. I. Bogdanov, *Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics*, New Topics in Quantum Physics Research, Nova Sci. (2006), p. 1–36; arXiv:quant-ph/0303013.
  6. H. P. Yuen and V. W. S. Chan, *Opt. Lett.* **8**(3), 177 (1983).
  7. B. L. Schumaker, *Opt. Lett.* **9**(5), 189 (1984).
  8. K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev. A* **40**, 2847 (1989).
  9. В. П. Шляйх, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, Физматлит, Москва (2005) [W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH (2001)].
  10. Yu. I. Bogdanov and S. P. Kulik, *Laser Phys. Lett.* **10**, 125202 (2013).
  11. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 299 (2009).
  12. E. U. Condon, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **23**, 158 (1937).
  13. S. Chountasis, A. Vourdas, and C. Bendjaballah, *Phys. Rev. A* **60**, 3467 (1999).
  14. G. M. D’Ariano, M. G. Paris, and M. F. Sacchi, *Adv. in Imaging and Electron Physics* **128**, 205 (2003); arXiv:quant-ph/0302028.
  15. A. Ibort, V. I. Man’ko, G. Marmo et al., *Phys. Scripta* **79**, 065013 (2009).
  16. M. Paris and J. Reháček, *Quantum State Estimation*, Lect. Notes Phys., Vol. 649, Springer Sci. & Business Media, Berlin (2004).
  17. *Focus on Quantum Tomography*, ed. by K. Banaszek, M. Cramer, and D. Gross, Focus issue, *New J. Phys.* (2012–2013). <http://iopscience.iop.org/1367-2630/page/Focus%20on%20Quantum%20Tomography>.
  18. G. M. D’Ariano, C. Macchiavello, and M. G. Paris, *Phys. Rev. A* **50**, 4298 (1994).
  19. A. I. Lvovsky, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **6**, S556 (2004).
  20. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. A* **70**, 042303 (2004).
  21. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230503 (2004).
  22. Ю. И. Богданов, *ЖЭТФ* **135**, 1068 (2009) [Yu. I. Bogdanov, *JETP* **108**, 928 (2009)].
  23. Yu. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese et al., *Phys. Rev. Lett.* **105**, 010404 (2010).
  24. Yu. I. Bogdanov, G. Brida, I. D. Bukeev et al., *Phys. Rev. A* **84**, 042108 (2011).
  25. I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2006).
  26. N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth et al., *J. Chem. Phys.* **21**, 1087 (1953).
  27. M. E. J. Newman and G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Clarendon Press (1999).
  28. V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man’ko, *Physica* **72**, 597 (1974).