

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПЛАВНОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. В. Кузелев , Н. Г. Орликовская*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 января 2016 г.

Разработана теория поверхностных волн в магнитоактивной плазме с плавными границами. Для линейного закона изменения плотности на границе плазмы получено дисперсионное уравнение поверхностных волн. Определены частоты поверхностных волн и декременты их бесстолкновительного затухания. Дано обобщение на случай произвольного профиля плотности на границе плазмы. Учтены столкновения и уточнено применение правила Ландау в теории затухания поверхностных волн пространственно-неоднородной магнитоактивной столкновительной плазмы.

DOI: 10.7868/S0044451016120208

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблемы физики поверхностных волн периодически обсуждаются в научной литературе чуть ли не с момента теоретического предсказания таких волн А. Зоммерфельдом в 1896 г. [1]. Это обусловлено многообразием типов поверхностных волн и большим значением поверхностных волн для различных приложений. В частности, поверхностные плазменные волны используются в черенковских СВЧ-излучателях на электронных пучках [2–4]. Сильная пространственная неоднородность поверхностных волн и их локализация вблизи границы раздела находят свое применение в развивающейся в настоящее время области нанофизики — наноплазмонике [5, 6]. Несмотря на значительный период, прошедший с момента открытия поверхностных волн, и их интенсивное исследование, нерешенные вопросы физики поверхностных волн остаются и до настоящего момента. Одному из таких вопросов, а именно влиянию структуры границы раздела сред на свойства поверхностных волн, посвящена настоящая работа.

Проблема заключается в следующем. Электродинамические поверхностные волны связаны с границами раздела материальных сред, на кото-

рых скачком изменяется диэлектрическая проницаемость. Поскольку поляризация сред по разные стороны границы раздела разная, на границе формируется поверхностный заряд в виде простого слоя. При определенных условиях этот простой слой и формирует поверхностную волну. Поле простого слоя убывает в обе стороны от слоя, поэтому и поле поверхностной волны также убывает при удалении от границы раздела сред (обычно экспоненциально). Предположим, что параметры сред изменяются не скачком, а непрерывно, т. е. вместо резкой границы раздела имеется протяженная переходная область от одной среды к другой. Наличие переходной области, безусловно, сказывается на свойствах поверхностных волн — законе дисперсии, структуре поля и т. д. В случае достаточно протяженной переходной области поверхностная волна вообще должна отсутствовать. Переходная область — плавная граница — характерна для газовой плазмы. Она неизбежна в электродинамических системах плазменной СВЧ-электроники, в различных газоразрядных устройствах и многих других. Одно из первых исследований по теории волн, распространяющихся в плазме перпендикулярно к направлению ее плавной неоднородности, имеется в монографии [7].

В случае изотропной плазмы с плавными границами для разных геометрий теория поверхностных волн развивалась в работах [8–11]. Основными целями этих работ было выяснение того, к каким точкам

* E-mail: kuzelev@mail.ru

плавной границы плазмы «привязана» поверхностная волна и может ли она вообще существовать, а также исследование поля поверхностных волн в точке плазменного резонанса. Рассмотрение основывалось главным образом на том, что при специальном выборе зависимости плотности плазмы от координат дифференциальные уравнения теории поверхностных волн допускают аналитические решения. Настоящая работа посвящена поверхностным волнам в анизотропной плазме с плавными границами. Анизотропия плазмы обусловлена наличием внешнего магнитного поля. Кроме того, учтены столкновения в плазме.

Рассмотрим потенциальные возмущения в холодной электронной плазме, неоднородной вдоль координатной оси x и помещенной в однородное внешнее магнитное поле, направленное по оси z . Столкновения пока не учитываем. Ограничиваясь линейным приближением, потенциал электрического поля возмущений в плазме представим в виде

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \varphi(x) \exp(-i\omega t + ik_z z). \quad (1)$$

Функция (1) описывает волну, распространяющуюся вдоль внешнего магнитного поля и «привязанную» к области пространственной неоднородности плазмы. Если область пространственной неоднородности плазмы ограничена, то она моделирует плавную границу плазмы, а вне плавной границы плазму считаем однородной. Если амплитуда $\varphi(x)$ в (1) убывает (экспоненциально) при удалении от границы плазмы, то функция (1) описывает поверхностную волну.

Из уравнения Пуассона и линеаризованных уравнений холодной гидродинамики для электронной компоненты плазмы легко показать, что амплитуда $\varphi(x)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d}{dx} \varepsilon_{\perp}(\omega, x) \frac{d\varphi}{dx} - k_z^2 \varepsilon_{\parallel}(\omega, x) \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, x) = 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad \varepsilon_{\parallel}(\omega, x) = 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2} \quad (3)$$

— поперечная и продольная диэлектрические проницаемости холодной электронной неоднородной магнитоактивной плазмы [12], Ω_e — электронная циклотронная частота, а $\omega_p(x)$ — ленгмюровская частота электронов плазмы (плотность электронов плазмы порядка $\omega_p^2(x)$).

Пусть в области неоднородности плазмы (в области плазменной границы) ленгмюровская частота

электронов монотонно изменяется от нуля до некоторого максимального значения, т.е. $0 \leq \omega_p(x) \leq \omega_{p0}$, где ω_{p0} — постоянная. Тогда для частот из диапазона, задаваемого неравенством

$$\Omega_e^2 < \omega^2 < \Omega_e^2 + \omega_{p0}^2 \equiv \Omega_{g0}^2 \quad (4)$$

(Ω_{g0} — верхняя гибридная частота в области однородности плазмы), уравнение (2) имеет особую точку $x = x_0(\omega)$, определяемую из уравнения

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, x) = 0. \quad (5)$$

Легко видеть, что особая точка попадает в область плавной границы плазмы. Если в окрестности особой точки $\varepsilon_{\perp} \sim x - x_0$, то, как известно из теории дифференциальных уравнений [13], одно из линейно независимых решений уравнения (2) имеет при $x \rightarrow x_0$ логарифмическую особенность. Правильный учет особой точки $x = x_0(\omega)$ является важным моментом теории поверхностных волн плазмы с плавными границами [7–11]. В области значений x , где диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{\perp}(\omega, x)$ непрерывна и не обращается в нуль, функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ПЛАЗМЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ ПЛОТНОСТИ В ОБЛАСТИ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЫ В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим поверхностные волны на границе плазменного полупространства. Квадрат ленгмюровской частоты электронов плазмы определим формулой

$$\omega_p^2(x) = \omega_{p0}^2 \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/\Delta, & 0 < x < \Delta, \\ 1, & x > \Delta. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно формуле (6) плавная граница плазмы расположена в области $x \in (0, \Delta)$. В дальнейшем плазму, плотность электронов которой распределена по закону (6), будем называть плазмой с линейной границей. С учетом (6) и (3) преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{d}{dx}(x - x_0) \frac{d\varphi}{dx} - \chi^2(x - \tilde{x}_0) \varphi = 0, \quad (7)$$

где

$$x_0 = x_0(\omega) = \Delta \frac{\omega^2 - \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2}, \quad \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0(\omega) = \Delta \frac{\omega^2}{\omega_{p0}^2}, \quad (8)$$

$$\chi^2 = k_z^2 \frac{\omega^2 - \Omega_e^2}{\omega^2}.$$

При изменении частоты ω в диапазоне (4) особая точка x_0 перемещается на оси x в пределах плазменной границы $0 < x < \Delta$. Общее решение уравнения (7) выражается, как известно, через вырожденную гипергеометрическую функцию и функцию Лагерра (см. ниже). При $x = \tilde{x}_0$, что имеет место при $\Omega_e = 0$, общее решение есть линейная комбинация функций Инфельда и Макдональда. Возможностью построения аналитических решений и определяется задание профиля плотности плазмы в виде (6). Кроме того, линейный профиль является важнейшим из всех возможных, поскольку любую функцию в окрестности любой фиксированной точки (кроме точки экстремума) можно аппроксимировать линейной зависимостью.

В областях однородности плазмы уравнение (2) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - k_z^2\varphi = 0, \quad x < 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \kappa^2\varphi = 0, \quad x > \Delta, \quad (10)$$

где

$$\kappa^2 = k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0} = k_z^2 \frac{(\omega^2 - \omega_{p0}^2)(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_{g0}^2)}, \quad (11)$$

а $\varepsilon_{\parallel}^0 = \varepsilon_{\parallel}(\omega, \Delta)$, $\varepsilon_{\perp}^0 = \varepsilon_{\perp}(\omega, \Delta)$ — диэлектрические проницаемости (3) в области пространственной однородности плазмы (при $x \geq \Delta$).

В длинноволновом приближении, когда выполнено неравенство

$$k_z\Delta \ll 1, \quad (12)$$

вторым слагаемым в левой части уравнения (7) можно пренебречь, что позволяет проинтегрировать это уравнение один раз. В результате имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{C}{x - x_0(\omega)}. \quad (13)$$

Из (13) следует выражение для разности потенциалов на границах области неоднородности плазмы:

$$\varphi(\Delta) - \varphi(0) = CJ(\omega), \quad J(\omega) = \int_0^{\Delta} \frac{dx}{x - x_0(\omega)}. \quad (14)$$

К вычислению интеграла в (14) мы обратимся позже, а пока получим дисперсионное уравнение для спектров частот поверхностных волн. Используя ограниченные на бесконечности решения уравнений (9), (10)

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \exp(k_z x), & x < 0, \\ B \exp(-\kappa x), & x > \Delta, \end{cases} \quad (15)$$

и непрерывность потенциала и его производной при $x = 0, \Delta$, имеем соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= A, & \varphi(\Delta) &= B \exp(-\kappa\Delta), \\ \varphi'(0) &= k_z A, & \varphi'(\Delta) &= -\kappa B \exp(-\kappa\Delta). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая далее формулы (13) и (14) и исключая из соотношений (16) постоянные A, B и C , после простых вычислений получаем искомое дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} + 1 = k_z \Delta \frac{\varepsilon_{\perp}^0}{1 - \varepsilon_{\perp}^0} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} J(\omega). \quad (17)$$

В случае плазмы с резкой границей ($k_z\Delta = 0$) уравнение (17) переходит в известное дисперсионное уравнение поверхностных волн магнитоактивной плазмы [14]. Для того чтобы это уравнение имело вещественные относительно ω решения, необходимо выполнение неравенств $\varepsilon_{\perp}^0 < 0$ и $\varepsilon_{\parallel}^0 < 0$. Отсюда имеем соотношение

$$\Omega_e^2 < \omega^2 < \omega_{p0}^2, \quad (18)$$

определяющее диапазон частот, в котором возможны поверхностные волны. Из (18) следует важное ограничение для величины внешнего магнитного поля

$$\Omega_e^2 < \omega_{p0}^2, \quad (19)$$

означающее, что в сильном внешнем магнитном поле ($\Omega_e^2 > \omega_{p0}^2$) поверхностные волны в плазме невозможны. В настоящей работе неравенство (19) считается выполненным. Спектр поверхностной волны в магнитоактивной плазме с резкой границей оказывается следующим [14]:

$$\omega^2 = \Omega_{g0}^2/2 \rightarrow \omega = \pm \Omega_{g0}/\sqrt{2}. \quad (20)$$

Перейдем теперь к вычислению интеграла $J(\omega)$. При действительной частоте ω из диапазона (14) точка $x = x_0(\omega)$ принадлежит интервалу $(0, \Delta)$. Поэтому при вычислении интеграла $J(\omega)$ возникает особенность, обусловленная плазменным резонансом, $\omega = \Omega_g(x)$, где $\Omega_g(x) = \sqrt{\omega_p^2(x) + \Omega_e^2}$ — верхняя гибридная частота в области неоднородности плазмы. При плазменном резонансе происходит трансформация поверхностной плазменной волны (16) в

локальную объемную ленгмюровскую волну непрерывного спектра [15]. Потенциал этой волны (или псевдоволны [16]) определяется формулой

$$\psi(t, x) \sim \delta[x - x_0(\omega)] \exp[-i\Omega_g(x)t]. \quad (21)$$

Аналогичное явление известно и в теории ленгмюровских волн однородной горячей плазмы, когда при черенковском резонансе волна-частица вызывают возмущения функции распределения электронов плазмы по скоростям вида

$$f(t, v) \sim \delta[v - v_0(\omega)] \exp[-i\Omega(v)t], \quad (22)$$

где v — скорость электрона, $\Omega(v) = kv$, k — волновое число, а $v_0(\omega)$ — фазовая скорость волны. В горячей плазме на возмущениях (22) происходит бесстолкновительная диссипация ленгмюровских волн (затухание Ландау [12, 17]), что приводит к появлению у частоты ω отрицательной мнимой части — декремента затухания волн. Очевидно, что и поверхностные волны в неоднородной плазме должны диссипировать на возмущениях (22), а поэтому при вычислении интеграла $J(\omega)$ частоту ω следует считать комплексной ($\omega = \omega' + i\omega''$), а особую точку при интегрировании следует обходить также, как и в теории затухания Ландау ленгмюровских волн [18]. Тогда после применения известного правила Ландау имеем

$$J(\omega) = \ln \frac{\Delta - x_0}{x_0} + i\pi \operatorname{sign}(\omega') = \ln(-\varepsilon_{\perp 0}) + i\pi \operatorname{sign}(\omega'), \quad (23)$$

где было использовано выражение (8) для x_0 .

Подставляя (23) в дисперсионное уравнение (17) и решая его с учетом неравенства (12), находим следующие спектры поверхностных волн магнитоактивной плазмы с линейной границей в длинноволновом приближении:

$$\omega' = \pm \frac{\Omega_{g0}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{8} k_z \Delta \left(\frac{\omega_{p0}^2 - \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2} \right)^2 \times \ln \frac{\omega_{p0}^2 + \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2 - \Omega_e^2} \right), \quad (24)$$

$$\omega'' = -i \frac{\pi}{8} \frac{\Omega_{g0}}{\sqrt{2}} k_z \Delta \left(\frac{\omega_{p0}^2 - \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2} \right)^2.$$

В отличие от простейших спектров (20), частоты (24) являются комплексными и зависят от волнового числа k_z . Это основные эффекты, к которым приводит размытость границы плазмы в длинноволновом

пределе. Мнимая часть частот (24) есть декремент затухания поверхностных волн. Затухание обусловлено «раскачкой» псевдоволн (21) в условиях плазменного резонанса $\omega = \Omega_g(x)$.

Из общего дисперсионного уравнения (17) с интегралом (23) можно показать, что помимо частотного спектра (24), оно определяет еще и следующий спектр:

$$\omega = \omega_{p0} \frac{1 - i}{2\sqrt{\pi k_z \Delta}}. \quad (25)$$

Формула (25) описывает сильнозатухающее поверхностное возмущение, которое именно из-за его сильного затухания можно было бы вообще не упоминать. Однако в коротковолновой области ($k_z \Delta > 1$) возмущение (25), как будет показано ниже, оказывается слабозатухающим. В коротковолновой области формула (25) нуждается в уточнении, поскольку само дисперсионное уравнение (17) применимо только в пределе (12).

3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ПЛАЗМЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Если неравенство (12) не выполнено, то для получения дисперсионного уравнения поверхностных волн необходимо использовать точное дифференциальное уравнение (7). Обозначим линейно независимые решения этого уравнения через $W_{1,2}(x)$. Заметим, что одно из этих решений, для определенности W_1 , имеет при $x \rightarrow x_0$ логарифмическую особенность. Тогда другое решение W_2 особенностей не имеет. Общее решение уравнения (7) запишем в виде

$$\varphi(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x). \quad (26)$$

Подставляя это решение в выражения (16) и исключая постоянные $A, B, C_{1,2}$, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{W'_1(\Delta) + \kappa W_1(\Delta)}{W'_2(\Delta) + \kappa W_2(\Delta)} - \frac{W'_1(0) - k_z W_1(0)}{W'_2(0) - k_z W_2(0)} = 0. \quad (27)$$

Здесь $W'_{1,2}(x) = dW_{1,2}(x)/dx$. Таким образом, остается только найти явный вид линейно независимых решений $W_{1,2}(x)$. При этом необходимо учитывать наличие особой точки $x_0(\omega)$ и необходимость ее обхода в соответствии с правилом Ландау.

В качестве линейно независимых решений дифференциального уравнения (7) можно, например, взять следующие функции [19–21]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= -\sqrt{\pi} \exp[-\chi(x_0 - x)] \times \\ &\times U \left[\frac{1}{2}[1 - \chi(x_0 - \tilde{x}_0)], 1, 2\chi(x_0 - x) \right], \\ \tilde{L}(x) &= \exp[-\chi(x_0 - x)] \times \\ &\times L \left[-\frac{1}{2}[1 - \chi(x_0 - \tilde{x}_0)], 2\chi(x_0 - x) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где $U(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $L(-a, z)$ — функция Лагерра. В частном случае $x_0 = \tilde{x}_0$, имеющем место при $\Omega_e = 0$, справедливы формулы

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \exp(-z)U(1/2, 1, 2z) &= K_0(z), \\ \exp(-z)L(-1/2, 2z) &= I_0(z). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда, $I_0(z)$ — функция Инфельда, а $z = k_z(x_0 - x)$.

Поскольку функция $\tilde{L}(x)$ не имеет особенностей, можно положить

$$W_2(x) = \tilde{L}(x). \quad (30)$$

Функция $\tilde{U}(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow x_0$, но просто взять ее в качестве решения $W_1(x)$ нельзя, поскольку при этом не будет учтено правило обхода особой точки. Для выхода из положения вернемся к длинноволновому пределу и вычислим в этом пределе потенциал $\varphi(x)$. Согласно (13) имеем

$$\varphi(x) = C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{\xi - x_0(\omega)} + C_2, \quad (31)$$

где $\omega = \omega' + i\omega''$ — комплексная частота. Как преобразование Лапласа потенциала, функция (31) является аналитической функцией при $\omega'' > 0$. Продолжим ее аналитически на нижнюю полуплоскость комплексной плоскости ω . Учтем, что при изменении мнимой части частоты ω'' от положительных значений к отрицательным точка $x_0(\omega)$ перемещается на комплексной плоскости ξ (вниз при $\omega' > 0$, вверх при $\omega' < 0$), пересекая при $\omega'' = 0$ вещественную ось. Путь интегрирования в (31) не должен пересекать линию, по которой перемещается точка $x_0(\omega)$. Поэтому, если в (31) $x > x'_0$, то при интегрировании следует обойти полюс $\xi = x_0$, а при $x < x'_0$

обход полюса не требуется. В результате для потенциала имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C_1 \left[\ln \frac{x_0(\omega) - x}{x_0(\omega)} + \right. \\ &+ \left. \begin{cases} 0, & x < \text{Re } x_0(\omega), \\ F, & x > \text{Re } x_0(\omega) \end{cases} \right] + C_2, \\ F &= \begin{cases} 0, & \text{Im } x_0 > 0, \\ 2\pi i \text{sign}(\omega'), & \text{Im } x_0 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках в (32) при $x = \Delta$ совпадает с (23).

Сопоставляя решение длинноволнового приближения (32) с общим решением (26), замечаем, что необходимо построить функции $W_{1,2}(x)$ таким образом, чтобы при $k_z(x_0 - x) \rightarrow 0$ и $k_z(x_0 - \tilde{x}_0) \rightarrow 0$ имели место предельные соотношения

$$\begin{aligned} W_1(x) &\rightarrow \ln \frac{x_0(\omega) - x}{x_0(\omega)} + \\ &+ \begin{cases} 0, & x < \text{Re } x_0(\omega), \\ F, & x > \text{Re } x_0(\omega), \end{cases} \quad W_2(x) \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулу (30) и вторую формулу (29), убеждаемся в выполнении второго соотношения (33). Первое соотношение (33) также может быть выполнено, если функцию $W_1(x)$ представить в виде следующей линейной комбинации функций (28):

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \tilde{U}(x) + \begin{cases} 0, & x < \text{Re } x_0(\omega), \\ F, & x > \text{Re } x_0(\omega), \end{cases} \\ F &= \begin{cases} 0, & \text{Im } x_0 > 0, \\ 2\pi i \text{sign}(\omega')Q\tilde{L}(x), & \text{Im } x_0 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \exp \left\{ i\chi x_0'' - \right. \\ &- \left. i \arg \left(L \left[-\frac{1}{2}[1 - \chi(x_0 - \tilde{x}_0)], -2i\chi x_0'' \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью формул (29) не сложно доказать, что функция (34) действительно удовлетворяет первому предельному соотношению (33) (для доказательства следует учесть, что при $z \rightarrow 0$ $I_0(z) \rightarrow 1$ и $K_0(z) \rightarrow -\ln z$). При $\Omega_e = 0$, когда $\tilde{x}_0 = x_0$ и $\chi = k_z$, формулы (30) и (34) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= -K_0[k_z(x_0 - x)] + \\ &+ \begin{cases} 0, & x < \text{Re } x_0(\omega), \\ F, & x > \text{Re } x_0(\omega), \end{cases} \quad W_2(x) = I_0[k_z(x_0 - x)], \\ F &= \begin{cases} 0, & \text{Im } x_0 > 0, \\ 2\pi i \text{sign}(\omega')I_0[k_z(x_0 - x)], & \text{Im } x_0 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

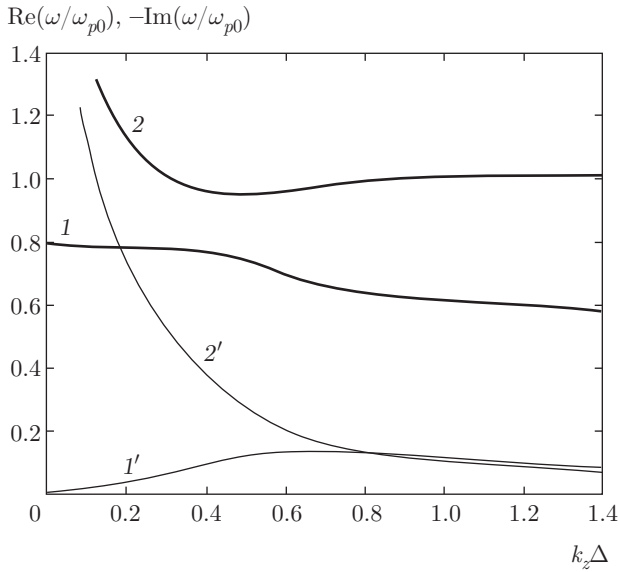


Рис. 1. Комплексные дисперсионные кривые поверхностных волн плазменного полупространства с линейной границей

Последние формулы вместе с (26) дают общее выражение для потенциала поля в линейно неоднородной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля [9, 10].

Подставляя функции (30) и (34) в дисперсионное уравнение (27), преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{\tilde{U}'(\Delta) + \kappa \tilde{U}(\Delta)}{\tilde{L}'(\Delta) + \kappa \tilde{L}(\Delta)} - \frac{\tilde{U}'(0) - k_z \tilde{U}(0)}{\tilde{L}'(0) - k_z \tilde{L}(0)} + 2\pi i \operatorname{sign}(\omega') Q = 0. \quad (37)$$

Записывая уравнение (37), мы учли, что решаться оно будет только в области $\omega' < 0$. В длинноволновом пределе, когда выполнено неравенство (12), уравнение (37) переходит в уравнение (17) с интегралом (23). В случае плазмы без магнитного поля, полагая $\Omega_e = 0$ и используя формулы $K_0(-z) = K_0(z) + i\pi I(z) \operatorname{sign}(z'')$, $I_0(-z) = I_0(z)$ и (29), преобразуем уравнение (37) к виду

$$\frac{K_1[k_z(\Delta - x_0)] - K_0[k_z(\Delta - x_0)]}{I_1[k_z(\Delta - x_0)] + I_0[k_z(\Delta - x_0)]} - \frac{K_1(k_z x_0) - K_0(k_z x_0)}{I_1(k_z x_0) + I_0(k_z x_0)} + i\pi \operatorname{sign}(\omega') = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) подробно исследовано в работах [9, 10].

Подробное исследование уравнения (37) представляет собой сложную задачу, выходящую за рам-

ки данной работы. Для примера приведем только одно характерное численное решение, полученное при $\Omega_e/\omega_{p0} = 0.5$ (рис. 1). Вещественные части частот изображены жирными линиями, мнимые части — более тонкими кривыми. Видим наличие двух поверхностных волн. Частота низкочастотной волны (1 — вещественная часть, 1' — мнимая часть) в длинноволновой области дается формулой (24), а в области очень коротких длин волн ($k_z \Delta \gg 1$) она, по-видимому, принимает значение Ω_e . Частота высокочастотной волны (2 — вещественная часть, 2' — мнимая часть) в длинноволновой области определяется формулой (25). При $k_z \Delta \ll 1$ высокочастотная волна сильно затухает. Но в области более коротких длин волн ($k_z \Delta \sim 1$) высокочастотная волна затухает слабо, а ее частота, по-видимому, принимает значение ω_{p0} . Напомним, что в плазме с резкой границей нет поверхностных волн с частотами порядка Ω_e или ω_{p0} . Расчеты показывают, что декремент затухания низкочастотной поверхностной волны при увеличении магнитного поля уменьшается, что следует и из аналитической формулы (24). Заметим еще, что хотя уравнение (17) с интегралом (29) справедливо только в длинноволновом пределе (12), его решения качественно хорошо согласуются с решениями точного дисперсионного уравнения (37) даже тогда, когда выполнено неравенство, противоположное (12).

4. ВОЛНЫ ПЛАЗМЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ ГРАНИЦЫ В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРЕДЕЛЕ

При выполнении неравенства (12) уравнение (2) может быть решено при произвольной функции $\varepsilon_{\perp}(\omega, x)$. Пусть $\omega_p^2(x)$ монотонно изменяется от нуля до ω_{p0}^2 при изменении x от нуля до Δ . Тогда из уравнения (2) в длинноволновом пределе имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{C_1}{\varepsilon_{\perp}(\omega, x)}, \quad \varphi(\Delta) - \varphi(0) = C_1 \int_{C(0, \Delta)} \frac{d\xi}{\varepsilon_{\perp}(\omega, \xi)}. \quad (39)$$

Здесь C_1 — постоянная, $\xi = \xi' + i\xi''$, $\xi' = x$, а контур интегрирования $C(0, \Delta)$ начинается на вещественной оси в точке $x = 0$, заканчивается на вещественной оси при $x = \Delta$ и обходит особую точку в соответствии с правилом Ландау (снизу при $\omega' > 0$ и сверху при $\omega' < 0$). Из выражений (39) и (16) следует дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} + 1 = -k_z \varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} \int_{C(0,\Delta)} \frac{d\xi}{\varepsilon_{\perp}(\omega, \xi)}. \quad (40)$$

Для определения точки $x_0(\omega) = x'_0(\omega) + ix''_0(\omega)$, в которой поперечная диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, имеем уравнение

$$\omega^2 - \Omega_e^2 = \omega_p^2(x_0), \quad (41)$$

где $\omega = \omega' + i\omega''$. Считаем, что $\omega'' < 0$. Если мнимая часть частоты мала, то из (41) следует соотношение

$$x''_0 \frac{d\omega_p^2(x'_0)}{dx} = 2\omega'\omega''. \quad (42)$$

Поскольку плотность плазмы в области границы возрастает, особая точка x_0 находится в нижней полуплоскости комплексной плоскости ξ при $\omega' > 0$ и в верхней полуплоскости при $\omega' < 0$. Обходя с учетом этого особую точку по правилу Ландау, преобразуем уравнение (40) к виду

$$\varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} + 1 = -k_z \varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} \times \left\{ \int_0^{\Delta} \frac{dx}{\varepsilon_{\perp}(\omega, x)} + 2\pi i \operatorname{sign}(\omega') \left(\frac{d\varepsilon_{\perp}}{d\xi} \right)_0^{-1} \right\}. \quad (43)$$

Здесь интегрирование осуществляется вдоль вещественной оси, а производная берется в точке $\xi = x_0$. Уравнение (43) является точным, поскольку при его получении никаких упрощающих предположений, кроме (12), использовано не было. Несложно показать, что для случая плазмы с линейной границей дисперсионное уравнение (43) сводится к уравнению (17) с интегралом (29).

Предположим теперь, что мнимая часть частоты очень мала. Тогда, используя обобщение формул Сохоцкого [22]

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x \pm i0)} = \text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \mp i\pi \left(\frac{df}{dx} \right)_0^{-1} \quad (44)$$

($x_0 \in (a, b)$ — простой корень уравнения $f(x) = 0$), запишем уравнение (43) следующим образом:

$$\varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} + 1 = -k_z \varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} \left\{ \text{V.p.} \int_0^{\Delta} \frac{dx}{\varepsilon_{\perp}(\omega', x)} + \pi i \operatorname{sign}(\omega') \left(\frac{d\varepsilon_{\perp}(\omega', x)}{dx} \right)^{-1} \right\}. \quad (45)$$

В случае плазмы с линейной границей из уравнения (45) несложно получить решение (24). Необходимо особо отметить, что уравнение (45), в отличие от уравнения (43), непригодно для нахождения частот поверхностных волн с достаточно сильным затуханием (например, частоты (25)). Действительно, уравнение (45) фактически получено в результате предельного перехода $\omega''/\omega' \rightarrow 0$.

Приведем еще один пример плазмы, для которой уравнение (43) удается до конца записать аналитически в явном виде¹⁾. Заменим в формуле (6) линейную функцию x/Δ функцией $\sin^2(\pi x/2\Delta)$. Граница плазмы с таким профилем плотности оказывается более гладкой, чем в случае плазмы с линейной границей. Действительно, в точках $x = 0$ и $x = \Delta$ непрерывен не только профиль плотности плазмы, но и его производная. Несложное преобразование общего дисперсионного уравнения (43) приводит к следующему дисперсионному уравнению для спектров поверхностных волн в плазме с «квадратично синусоидальной» границей:

$$\varepsilon_{\perp}^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{\varepsilon_{\perp}^0}} \left\{ 1 + k_z \Delta \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}^0}} - i \frac{4}{1 - \varepsilon_{\perp}^0} \times \left(\sin \left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_{\perp}^0}} \right) \right)^{-1} \right] \right\} + 1 = 0. \quad (46)$$

Результаты численного решения уравнения (46) для $\Omega_e/\omega_{p0} = 0.5$ представлены на рис. 2. Видим, что присутствует решение типа (24), определяющее в длинноволновой области слабозатухающую поверхностную волну, а вот решения, соответствующего сильнозатухающей волне (типа (25)) у уравнения (46) нет, что, вероятно, связано с большей гладкостью плазменной границы²⁾. С этим же, вероятно, связан и следующий важный результат: при $k_z \Delta \approx 2$ резко возрастают (возможно до бесконечности) частота и декремент затухания поверхностной волны, а при $k_z \Delta > 2$ каких-либо решений уравнения (46) обнаружить вообще не удастся, что свидетельствует об отсутствии волн. По-видимому, гладкость границы плазмы является существенным фактором, влияющим на саму возможность существования поверхностных волн с длинами порядка и меньше толщины границы плазмы. Конечно, такой вывод является лишь предположением, поскольку он получен из

¹⁾ Первый пример — это плазма с линейной границей (6), для которой дисперсионное уравнение (43) сводится к уравнениям (17), (23).

²⁾ При численных расчетах авторам таких решений найти не удалось.

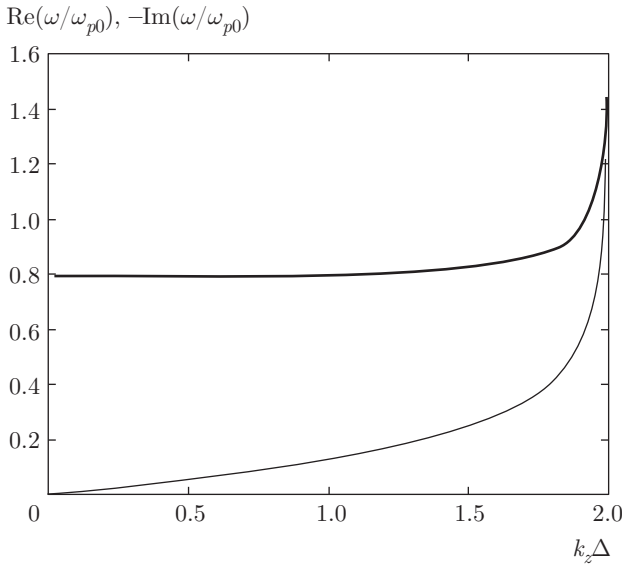


Рис. 2. Комплексная дисперсионная кривая поверхностной волны плазменного полупространства с нелинейной границей

уравнения (46), справедливого только в длинноволновой области. Точное дисперсионное уравнение для плазмы с «квадратично синусоидальной» границей нам не известно. Но по аналогии с уравнениями (17) и (37) (см. замечание в конце разд. 3) можно надеяться, что решения уравнения (46) похожи на решения точного дисперсионного уравнения.

5. УЧЕТ СТОЛКНОВЕНИЙ В ПЛАЗМЕ

Учет столкновений в плазме важен как с практической точки зрения, так и в связи с проблемой обхода резонансной точки, принципиально значимой для всей теории резонансных явлений в плазме. Диэлектрические проницаемости столкновительной плазмы возьмем в виде [23]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega, x) &= 1 - \frac{\omega_p^2(x)(\omega + i\nu)}{\omega[(\omega + i\nu)^2 - \Omega_e^2]}, \\ \varepsilon_{\parallel}(\omega, x) &= 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega(\omega + i\nu)}, \end{aligned} \quad (47)$$

где ν — эффективная частота столкновений электронов. В слабоионизованной плазме, рассмотрением которой мы здесь и ограничимся, частоту столкновений можно считать независимой от координаты x . Для плазменного полупространства с линейной границей (6) уравнение (2) с диэлектрическими проницаемостями (47) сводится к виду (7), в котором

$$\begin{aligned} x_0(\omega) &= \Delta \frac{\omega[(\omega + i\nu)^2 - \Omega_e^2]}{\omega_{p0}^2(\omega + i\nu)}, \\ \tilde{x}_0(\omega) &= \Delta \frac{\omega(\omega + i\nu)}{\omega_{p0}^2}, \quad \chi^2 = k_z^2 \frac{(\omega + i\nu)^2 - \Omega_e^2}{(\omega + i\nu)^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку и при наличии столкновений основное уравнение (7) сохранило свой вид, оказываются справедливыми и многие последующие результаты. В частности, сохраняется и общее дисперсионное уравнение (37). Однако открытым остается вопрос о правиле учета особой точки плазменного резонанса. Обсудим этот вопрос, ограничиваясь при этом длинноволновым приближением (12).

Как следует из предыдущего рассмотрения, при вычислении интеграла

$$J(\omega) = \int_{C(0, \Delta)} \frac{d\xi}{\xi - x_0(\omega)} \quad (49)$$

важно положение особой точки x_0 ³⁾. Пусть для определенности $\omega' > 0$. Тогда при изменении мнимой части частоты ω'' от положительных значений к отрицательным точка x_0 перемещается из верхней полуплоскости комплексной плоскости ξ в нижнюю полуплоскость. Определим, при каком значении ω'' точка x_0 оказывается на вещественной оси $\xi' = x$. Полагая, что $x_0'' = \text{Im } x_0 = 0$, из первого выражения (48) имеем неявное выражение для мнимой части частоты $\omega'' = -\sigma(\nu)$, где

$$\sigma(\nu) = \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{\Omega_e^2}{|\omega|^2 + \nu^2} \right). \quad (50)$$

Пусть теперь $\omega = \omega' + i\omega''$ есть частота поверхностной волны, т. е. ω удовлетворяет дисперсионному уравнению (17). Выясним, как должен в этом уравнении вычисляться интеграл (49). Если $\omega'' > -\sigma(\nu)$, то особая точка расположена над вещественной осью $\xi' = x$ и интегрирование в (49) можно осуществлять вдоль вещественной оси. Если $\omega'' = -\sigma(\nu)$, то особая точка лежит на вещественной оси и при интегрировании ее следует обойти снизу. При этом к интегралу вдоль вещественной оси добавится вклад от полувычета. Наконец, если $\omega'' < -\sigma(\nu)$, то особая точка находится в нижней полуплоскости комплексной плоскости ξ . Поэтому к интегралу вдоль вещественной оси добавится вклад от полного вычета. Таким образом, имеем

³⁾ Контур интегрирования $C(0, \Delta)$ был описан выше при обсуждении формул (39).

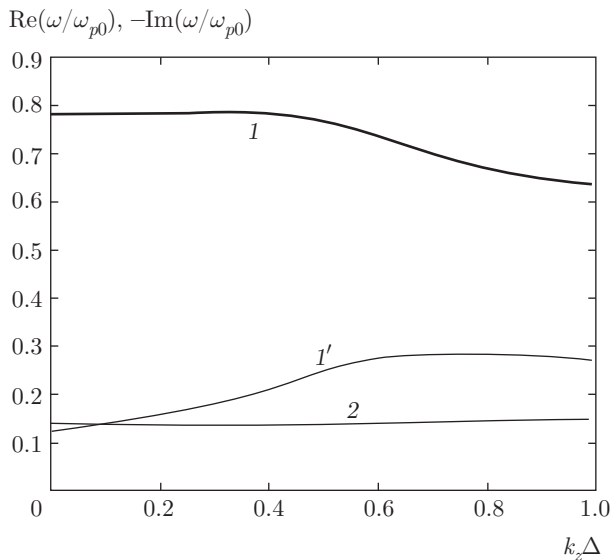


Рис. 3. Комплексный спектр низкочастотной поверхностной волны плазменного полупространства с линейной границей при наличии столкновений

$$J(\omega) = \ln \epsilon_{\perp 0} + \begin{cases} 0, & \omega'' > -\sigma(\nu), \\ i\pi \operatorname{sign}(\omega'), & \omega'' = -\sigma(\nu), \\ i2\pi \operatorname{sign}(\omega'), & \omega'' < -\sigma(\nu). \end{cases} \quad (51)$$

Функция (51) непрерывна по переменной ω'' (при записи (51) мы отказались от упрощающего предположения $\omega' > 0$).

При $\Omega_e = 0$ полюс при вычислении интеграла (49) обходится всегда (за исключением, быть может, случая $k_z \Delta = 0$). Действительно, в отсутствие магнитного поля декремент затухания поверхностной волны плазмы с резкой границей есть $\omega'' = -\nu/2$. Из-за размытости границы к этой величине добавляется поправка, пропорциональная $-k_z \Delta \omega_{p0}$ (см. (24)). Поэтому неравенство $\omega'' < -\sigma(\nu)$ выполнено при любых ν и $k_z \Delta$. При $\Omega_e \neq 0$ ситуация усложняется. В диапазоне волновых чисел

$$k_z \Delta < \nu \Omega_e / \omega_{p0} \quad (52)$$

выполнено неравенство $\omega'' > -\sigma(\nu)$ и затухание поверхностной волны обусловлено исключительно столкновениями. Если выполнено неравенство, противоположное (52), то к затуханию, обусловленному столкновениями, добавляется и бесстолкновительное затухание. Заметим, что неравенство (52) получено по результатам анализа численных расчетов.

На рис. 3 представлена комплексная дисперсионная кривая низкочастотной поверхностной волны плазменного полупространства с линейной границей для случая $\nu/\omega_{p0} = 0.2$ и $\Omega_e/\omega_{p0} = 0.5$. Линия

1 — вещественная часть частоты, 1' — мнимая часть частоты, линия 2 — величина (50). Пересечение линий 1' и 2 означает, что применимы все три части формулы (51).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты работы.

1. В работе в потенциальном приближении рассмотрены поверхностные волны холодной электронно-магнитоактивной плазмы с плавными границами. Для плазмы с линейным законом изменения плотности на границе (плазма с линейной границей) в аналитическом виде получены дисперсионные уравнения для спектров частот поверхностных волн. В длинноволновом приближении вычислены комплексные частотные спектры. Выяснено, что бесстолкновительное затухание поверхностных волн обусловлено их резонансным поглощением локальными ленгмюровскими волнами непрерывного спектра⁴). Показано, что, кроме обычной слабозатухающей поверхностной волны, в плазме имеются волны с высокой частотой и большим декрементом затухания. При увеличении внешнего магнитного поля декременты бесстолкновительного затухания поверхностных волн уменьшаются. В коротковолновой области появляются новые типы слабозатухающих поверхностных волн с частотами, близкими к электронной циклотронной и электронной ленгмюровской частотам.

2. В длинноволновом приближении получено дисперсионное уравнение для спектров поверхностных волн в плазменном полупространстве с произвольным профилем плотности на границе плазмы. Рассмотрен конкретный случай плазмы с нелинейным законом изменения плотности на границе. Показано, что обычная слабозатухающая поверхностная волна в длинноволновой области существует при любом профиле плотности плазмы на границе, чего нельзя утверждать о сильнозатухающей волне в высокочастотной области. В коротковолновой области поверхностные волны в плазме с «квадратично синусоидальной границей», по-видимому, отсутствуют.

⁴) В простейшем случае плазменного полупространства имеет место взаимодействие поверхностной волны с частотой $\omega_1 = \Omega_{g0}/\sqrt{2}$ и объемной волны непрерывного спектра с частотой $\omega_2 = \Omega_g(x)$. При резонансе, $\omega_1 \approx \omega_2$, поверхностная волна раскачивает колебания узкого слоя электронов в окрестности точки плазменного резонанса, передавая электронам свою энергию. В этом и состоит механизм исследованного бесстолкновительного затухания.

3. Учтены столкновения в теории поверхностных волн магнитоактивной плазмы с линейной границей. Показано, что при соответствующей корректировке, в том числе и по применению правила Ландау, дисперсионные уравнения бесстолкновительного приближения применимы и при наличии столкновений. Численно определен характерный комплексный спектр поверхностной волны магнитоактивной столкновительной плазмы с линейной границей. В длинноволновой области диссипация обусловлена только столкновениями, в области более коротких длин волн важны оба механизма диссипации — столкновительный и бесстолкновительный.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, *Math. Ann.* **47**, 317 (1896).
2. Л. С. Богданкевич, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *УФН* **133**, 3 (1981).
3. М. В. Кузелев, Ф. Х. Мухаметзянов, М. С. Рабинович и др., *ЖЭТФ* **83**, 1358 (1982).
4. М. В. Кузелев, О. Т. Лоза, А. А. Рухадзе и др., *Физика плазмы* **27**, 710 (2001).
5. С. Г. Тиходеев, Н. А. Гиппиус, *УФН* **179**, 1003 (2009).
6. В. В. Климов, *УФН* **178**, 875 (2008).
7. А. Н. Кондратенко, *Плазменные волноводы*, Атомиздат, Москва (1976).
8. М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе и др., *Физика плазмы* **33**, 1073 (2007).
9. М. В. Кузелев, Н. Г. Хунджуа, *Радиотехн. и электрон.* **53**, 726 (2008).
10. М. В. Кузелев, Н. Г. Хунджуа, *Радиотехн. и электрон.* **56**, 423 (2011).
11. М. В. Кузелев, Н. Г. Орликовская, *Физика плазмы* **40**, 345 (2014).
12. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1999).
14. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва (2002).
15. М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **31**, 172 (2005).
16. А. В. Тимофеев, *Резонансные явления в колебаниях плазмы*, Физматлит, Москва (2000), с. 224.
17. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).
18. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **26**, 547 (1946).
19. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1971).
20. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
21. Е. Янке, Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, Наука, Москва (1977).
22. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1976).
23. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, Наука, Москва (2013).