

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ЗАРЯЖЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ НА ИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Филиппов^{a}, И. Н. Дербенев^{a,b}*

*^a ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Москва, Россия*

*^b School of Chemistry, University of Nottingham, University Park
Nottingham, United Kingdom*

Поступила в редакцию 7 апреля 2016 г.

Исследовано влияние размера двух заряженных макрочастиц сферической формы на их электростатическое взаимодействие в равновесной плазме в рамках линеаризованной модели Пуассона – Больцмана. Установлено, что при взаимодействии двух заряженных диэлектрических макрочастиц в равновесной плазме силы, действующие на каждую из них, оказываются в общем случае неравными. Силы становятся равными только в случае макрочастиц-проводников или в случае макрочастиц-диэлектриков одного размера и одного заряда. Они оказываются равными и в случае, когда при изменении межчастичного расстояния сохраняются постоянными потенциалы поверхностей макрочастиц. Предложены формулы, которые позволяют рассчитать силу взаимодействия с высокой точностью при выполнении условия, что радиусы макрочастиц много меньше радиуса экранирования, а это в экспериментах с пылевой плазмой обычно выполняется.

DOI: 10.7868/S004445101612021X

1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциал взаимодействия макрочастиц определяет многие свойства пылевой и коллоидной плазмы [1]. В плазме электростатическое взаимодействие макрочастиц экранируется и потенциал взаимодействия двух точечных макрочастиц в бесконечной плазме оказывается дебаевским или потенциалом Юкавы [2–5] (критический обзор работ на эту тему проведен в статье [6]). При рассмотрении таких вопросов как коагуляция и агломерация пылевых частиц (см., например, [7, 8]) большую роль играют взаимодействия на малых расстояниях, поэтому необходимо учесть влияние размеров макрочастиц на потенциал или силу взаимодействия. В работах [9, 10] исследовалось взаимодействие точечного заряда с заряженной макрочастицей конечного размера из проводящего материала. В работе [11] был рассмотрен общий случай взаимодействия диэлектрической макрочастицы с точечной. В насто-

ящей работе рассмотрено электростатическое взаимодействие в равновесной плазме двух заряженных макрочастиц конечного размера. Полагаем, что макрочастицы имеют сферическую форму, неподвижны и находятся в стационарной равновесной плазме. Здесь мы не касаемся теневых эффектов (которые рассмотрены, например, в [12]) и полагаем, что внешнее электрическое поле отсутствует (влияние внешнего однородного электрического поля на взаимодействие точечной заряженной макрочастицы с диэлектрической заряженной сферой рассмотрено в [11], взаимодействие двух макрочастиц за счет наведенных внешним полем дипольных моментов рассмотрено в [13]).

В разд. 2 дано общее решение рассматриваемой задачи и получены коэффициенты разложения потенциала с точностью до членов R^{-7} включительно. В разд. 3 получено выражение для силы взаимодействия в виде суммы ряда и получено аналитическое выражение для случая малых по сравнению с дебаевским радиусом размеров макрочастиц. В разд. 4 представлены результаты численных расчетов и выполнено сравнение с работой [14], в которой рассмотрено взаимодействие двух диэлектрических макро-

* E-mail: fav@triniti.ru

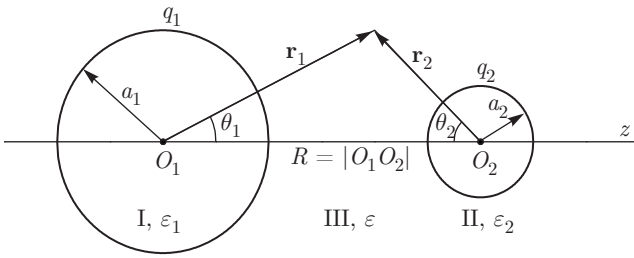


Рис. 1. Геометрия задачи о взаимодействии двух сферических макрочастиц: r_i, θ_i ($i = 1, 2$) — радиус-вектор и полярный угол в сферической системе координат с началом в центре i -й макрочастицы O_i и осью, направленной к другой макрочастице, R — межчастичное расстояние, q_1, q_2 — заряды макрочастиц, a_1, a_2 — радиусы макрочастиц, ϵ_1, ϵ_2 — диэлектрическая проницаемость материала соответственно первой и второй макрочастиц, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды (электролита). I, II — области внутри первой (I) и второй (II) макрочастиц, III — область вне макрочастиц, заполненная плазмой (электролитом)

частиц в однородном диэлектрике. В разд. 5 проведено обсуждение полученных результатов.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Геометрия задачи о взаимодействии двух сферических макрочастиц показана на рис. 1. Полагаем, что внутри макрочастиц нет свободных зарядов, поэтому в областях I и II потенциал электрического поля является решением уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_I(r_1, \theta_1) &= 0, \\ \Delta\phi_{II}(r_2, \theta_2) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В области III потенциал определим из линеаризованного уравнения Пуассона – Больцмана [15]:

$$\Delta\phi_{III} - k_D^2\phi_{III} = 0, \tag{2}$$

где k_D — постоянная экранирования (обратный дебаевский радиус). В силу линейности уравнения Гельмгольца (2) его решение в области III будем искать в виде суперпозиции двух членов, $\phi_{III} = \phi_1(r_1, \theta_1) + \phi_2(r_2, \theta_2)$:

$$\Delta\phi_i - k_D^2\phi_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид [16, 17]

$$\begin{aligned} \phi_I|_{r_1=a_1} &= (\phi_1 + \phi_2)|_{r_1=a_1}, \\ \phi_{II}|_{r_2=a_2} &= (\phi_1 + \phi_2)|_{r_2=a_2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial\phi_I}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a_1-0} - \epsilon \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a_1+0} &= 4\pi\sigma_1, \\ \epsilon_2 \frac{\partial\phi_{II}}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2-0} - \epsilon \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2+0} &= 4\pi\sigma_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где σ_i — плотность свободных зарядов на поверхности i -й макрочастицы. В случае равномерного распределения поверхностного заряда

$$\sigma_i = \frac{q_i}{4\pi a_i^2}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где q_i — заряд i -й макрочастицы. Далее решение ищем для распределения плотности поверхностного заряда, аксиально-симметричного относительно линии, соединяющей центры макрочастиц. Рассматриваемая система является квазинейтральной, поэтому на бесконечности потенциалы обращаются в нуль:

$$\phi_1|_{r_1=\infty} = 0, \quad \phi_2|_{r_2=\infty} = 0. \tag{7}$$

Общие решения уравнений (1) можно представить в виде [16, 17]

$$\begin{aligned} \phi_I(r_1, \theta_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta_1) \tilde{r}_1^n, \\ \phi_{II}(r_2, \theta_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos\theta_2) \tilde{r}_2^n, \end{aligned} \tag{8}$$

где P_n — полиномы Лежандра, C_n, D_n — коэффициенты разложения, $\tilde{r}_i = k_D r_i, i = 1, 2$. Общие решения уравнений (3), удовлетворяющие граничным условиям (7), имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta_1) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_1)}{\sqrt{\tilde{r}_1}}, \\ \phi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta_2) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_2)}{\sqrt{\tilde{r}_2}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $K_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя третьего рода или функции Макдональда, A_n, B_n — коэффициенты разложения.

Для переразложения потенциала ϕ_1 по полиномам Лежандра с полюсом в центре второй макрочастицы (аналогично для ϕ_2 по полиномам Лежандра с полюсом в центре первой макрочастицы) используем формулу сложения Макдональда [19], которая имеет вид ($i = 1, 2; j = 3 - i$)

$$\begin{aligned} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_i)}{\tilde{r}_i^{1/2}} &= (2n - 1)! \frac{\tilde{r}_i^n}{\tilde{r}_j^n \tilde{R}^n} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n+m+1/2}(\tilde{r}_j, \tilde{R}) C_m^{n+1/2}(\mu_j), \end{aligned} \tag{10}$$

где $C_m^{n+1/2}$ — ультрасферические многочлены Гегенбауэра [20], $\mu_j = \cos \theta_j$, а функция $\Phi_{m+1/2}$ определена нами соотношением

$$\Phi_{k+1/2}(\tilde{r}, \tilde{R}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2k+1) \times \begin{cases} \frac{I_{k+1/2}(\tilde{r})}{\tilde{r}^{1/2}} \frac{K_{k+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}}, & R > r; \\ \frac{K_{k+1/2}(\tilde{r})}{\tilde{r}^{1/2}} \frac{I_{k+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}}, & R < r. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $I_{m+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя первого рода или функции Инфельда. Также используем формулу сложения [21, 22] ($i = 1, 2$; $j = 3 - i$):

$$\tilde{r}_i^n P_n(\mu_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \tilde{r}_j^k \tilde{R}^{n-k} P_k(\mu_j). \quad (12)$$

В Приложении А показано, что, подставив (10), (12) в (9), мы получим потенциалы в виде трехкратных сумм, которые содержат произведения ультрасферических многочленов Гегенбауэра и полиномов Лежандра одного и того же аргумента. Каждое такое произведение можно представить в виде суммы полиномов Лежандра того же аргумента (см. Приложение А). В итоге, собирая члены, содержащие полиномы Лежандра одного и того же порядка, для потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 получим выражения

$$\begin{aligned} \phi_1(r_2, \mu_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu_2) \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{r}_2, \tilde{R}) A_m, \\ \phi_2(r_1, \mu_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu_1) \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{r}_1, \tilde{R}) B_m, \end{aligned} \quad (13)$$

где b_{nm} — коэффициенты, определенные в Приложении А. Там же приведены явные выражения для этих коэффициентов, которые позволяют получить разложение потенциала с точностью до членов, содержащих R^{-7} включительно.

Теперь, используя (13), из граничных условий (4), (5) для нахождения коэффициентов разложения потенциала получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_n(\tilde{a}_1, \varepsilon_1) A_n + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1) B_m &= \sigma_{1,n}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2) A_m + \alpha_n(\tilde{a}_2, \varepsilon_2) B_n &= \sigma_{2,n}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n(\tilde{a}_i, \varepsilon_i) &= \varepsilon \frac{K_{n+3/2}(\tilde{a}_i)}{\tilde{a}_i^{1/2}} + \\ &+ n(\varepsilon_i - \varepsilon) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_i)}{\tilde{a}_i^{3/2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \beta_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R}, \varepsilon_i) &= \varepsilon_i \frac{n}{\tilde{a}_i} b_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R}) - \\ &- \varepsilon \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_i}; \end{aligned}$$

$i = 1, 2$; $\sigma_{i,n}$ — коэффициенты разложения плотности поверхностного заряда по полиномам Лежандра:

$$\sigma_{i,n} = \frac{4\pi}{k_D} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\mu_i) \sigma_i(\mu_i) d\mu_i. \quad (16)$$

Здесь учтено, что мы рассматриваем аксиально-симметричное относительно оси z распределение поверхностного заряда. В случае равномерного распределения свободного заряда отличен от нуля только член с $n = 0$:

$$\sigma_{i,0} = k_D \frac{q_i}{\tilde{a}_i^2}. \quad (17)$$

3. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ

Силу взаимодействия определим на основе максвеллова тензора натяжений. Из симметрии задачи ясно, что отличной от нуля будет только z -составляющая силы и для первой макрочастицы она определяется выражением

$$\begin{aligned} F_{1z} &= \frac{\varepsilon \tilde{a}_1^2}{2} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} (\tilde{E}_n^2 - \tilde{E}_\tau^2) \mu_1 - \tilde{E}_n \tilde{E}_\tau \sqrt{1 - \mu_1^2} \right] d\mu_1, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\tilde{E}_n = -\frac{\partial \phi_{III}}{\partial \tilde{r}_1} \Big|_{\tilde{r}_1 = \tilde{a}_1}, \quad \tilde{E}_\tau = -\frac{1}{\tilde{r}_1} \frac{\partial \phi_{III}}{\partial \theta_1} \Big|_{\tilde{r}_1 = \tilde{a}_1}.$$

После интегрирования находим

$$\begin{aligned} F_{1z} &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \times \\ &\times [\Xi_{n-1} - (n-1) \Psi_{n-1}] [\Xi_n + (n+1) \Psi_n], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_n &= A_n \frac{nK_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tilde{a}_1 \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1}, \quad (20) \\ \Psi_n &= A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) B_m. \end{aligned}$$

Используя уравнения для определения коэффициентов разложения потенциала (14), для случая равномерного распределения свободного заряда по поверхностям макрочастиц из (19) можно получить более простое для анализа выражение для силы взаимодействия:

$$F_{1z} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(n+1)\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon}{(2n+1)(2n+3)\varepsilon} \times \\ \times \Psi_{n+1} \left[\frac{q_1}{a_1} \delta_{n,0} - n(\varepsilon_1 - \varepsilon) \Psi_n \right]. \quad (21)$$

3.1. Взаимодействие двух сферических макрочастиц при $k_D \rightarrow 0$

Теперь рассмотрим взаимодействие двух сферических макрочастиц при $k_D \rightarrow 0$, что позволит нам определить необходимое для достижения заданной точности число членов разложения и провести сравнение расчетов с учетом и без учета экранирования. Используя (59), при $k_D \rightarrow 0$ из выражений для коэффициентов b_{nm} , приведенных в Приложении А, находим

$$b_{nm}(\tilde{r}_i, \tilde{R}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2m-1)!! \times \\ \times \frac{(n+m)!}{n!m!} \frac{1}{\tilde{R}^{m+1}} \left(\frac{r_i}{\tilde{R}}\right)^n. \quad (22)$$

Отметим, что эти выражения справедливы для всех n и m . Из (22) видно, что $b_{0m}(\tilde{a}_i, \tilde{R})$ не зависят от радиусов макрочастиц, поэтому $\partial b_{0m}(\tilde{a}_i, \tilde{R}) / \partial \tilde{a}_i = 0$ для всех m и из (14) для $n = 0$ находим

$$\varepsilon A_0 = q_1 k_D \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \varepsilon B_0 = q_2 k_D \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (23)$$

Для $n > 0$ из (15), используя (22) и выражение для модифицированных функций Бесселя третьего рода при малых значениях аргумента (58) из Приложения В, находим

$$\begin{aligned} \alpha_n(\tilde{a}_i, \varepsilon_i) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n-1)!!}{\tilde{a}_i^{n+2}} [\varepsilon_i n + \varepsilon (n+1)], \\ \beta_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R}, \varepsilon_i) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\varepsilon_i - \varepsilon) \frac{n \tilde{a}_i^{n-1}}{\tilde{R}^n} \times \\ &\times \frac{(2m-1)!! (n+m)!}{\tilde{R}^{m+1} n!m!}. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь переопределим коэффициенты разложения потенциала:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_D} \frac{(2n-1)!!}{\tilde{R}^n} A_n, \\ \tilde{B}_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_D} \frac{(2n-1)!!}{\tilde{R}^n} B_n, \end{aligned} \quad (25)$$

и из (14) найдем ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1 n + \varepsilon (n+1)] \tilde{A}_n + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left(\frac{a_1}{\tilde{R}}\right)^{2n+1} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-1)!m!} \tilde{B}_m = \sigma_{1,n} k_D \frac{a_1^{n+2}}{\tilde{R}^n}, \\ [\varepsilon_2 n + \varepsilon (n+1)] \tilde{B}_n + (\varepsilon_2 - \varepsilon) \left(\frac{a_2}{\tilde{R}}\right)^{2n+1} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-1)!m!} \tilde{A}_m = \sigma_{2,n} k_D \frac{a_2^{n+2}}{\tilde{R}^n}. \end{aligned} \quad (26)$$

В этом случае сила выражается формулой (19) (или (21) при равномерном распределении поверхностного заряда) с коэффициентами

$$\begin{aligned} \Xi_n &= -\tilde{A}_n (n+1) \frac{R^n}{a_1^{n+1}} + \frac{n a_1^n}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_m \frac{(n+m)!}{n!m!}, \\ \Psi_n &= \tilde{A}_n \frac{R^n}{a_1^{n+1}} + \frac{a_1^n}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_m \frac{(n+m)!}{n!m!}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для равномерного распределения поверхностного заряда и проводящих макрочастиц ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$) из (23) и (26) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \tilde{A}_0 &= q_1, \quad \varepsilon \tilde{B}_0 = q_2, \\ \tilde{A}_n + \left(\frac{a_1}{\tilde{R}}\right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tilde{B}_m &= q_1 \delta_{n,0}, \\ \tilde{B}_n + \left(\frac{a_2}{\tilde{R}}\right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tilde{A}_m &= q_2 \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Это решение приводилось уже в работе Максвелла [23]. При этом потенциалы поверхностей ϕ_{1s} и ϕ_{2s} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \phi_{1s} &= \frac{q_1}{\varepsilon a_1} + \frac{q_2}{\varepsilon R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{R}, \\ \phi_{2s} &= \frac{q_2}{\varepsilon a_2} + \frac{q_1}{\varepsilon R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_n}{R}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (28) видно, что коэффициенты разложения \tilde{A}_n и \tilde{B}_n убывают с ростом n как $(a_1/R)^{2n+1}$ и $(a_2/R)^{2n+1}$ соответственно. Это позволяет определить число членов разложения для достижения заданной точности и позволяет сделать вывод, что при близких радиусах макрочастиц задача сходится существенно быстрее, чем при сильно различающихся радиусах, когда при малых $R \sim a_1 + a_2$ отношение радиуса большей частицы к межчастичному расстоянию оказывается близким к единице.

3.2. Взаимодействие двух сферических макрочастиц при $a_1 \rightarrow 0$

Теперь рассмотрим случай, когда одна из частиц, например, первая, точечна: $a_1 \rightarrow 0$. В этом случае коэффициенты $\alpha_n(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)$ определяются первым выражением (24):

$$\alpha_n(\tilde{a}_1, \varepsilon_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n-1)!!}{\tilde{a}_1^{n+2}} [(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1]. \quad (30)$$

Используя выражение (58) из Приложения В, из формул Приложения А находим

$$b_{0m}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) = \frac{K_{m+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}}. \quad (31)$$

Из первого уравнения (14) видно, что в этом случае должно быть $A_n = 0$ для всех n , кроме $n = 0$:

$$\varepsilon A_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} q_1 k_D. \quad (32)$$

Теперь из второго уравнения системы (14) находим ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$B_n = \sigma_{2,n} \frac{\tilde{a}_2^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_2 K_{n+3/2}(\tilde{a}_2) + n(\varepsilon_2 - \varepsilon) K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)} + \frac{q_1}{\varepsilon} k_D (2n+1) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \times \frac{\varepsilon \tilde{a}_2 I_{n+3/2}(\tilde{a}_2) + n(\varepsilon - \varepsilon_2) I_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}{\varepsilon \tilde{a}_2 K_{n+3/2}(\tilde{a}_2) + n(\varepsilon_2 - \varepsilon) K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}. \quad (33)$$

Эта формула совпадает с формулами (16), (17) из работы [11] в случае равного нулю внешнего поля.

При выводе выражения для силы в рассматриваемом случае необходимо учесть, что отличны от нуля выражения

$$\frac{b_{1m}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\tilde{a}_1} = \frac{\partial b_{1m}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{R}} \left[\frac{K_{m+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \right], \quad (34)$$

следовательно,

$$A_1 \frac{K_{3/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} b_{1,m}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) B_m. \quad (35)$$

Используя эти выражения, из (19) для силы взаимодействия находим

$$F_{1z} = q_1 k_D \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} \left[\frac{K_{m+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \right]. \quad (36)$$

Это выражение совпадает с полученным в работе [11].

3.3. Взаимодействие двух сферических макрочастиц малого радиуса

Анализ выражения (21) показывает, что для определения силы с точностью до размеров частиц в третьей степени надо найти A_1 с точностью до a_1^6 и $a_1^3 a_2^3$, A_2 — с точностью до a_1^5 , коэффициенты B_0 и B_1 — с точностью до a_2^3 (A_0 вообще не входит в выражение (21), а B_2 содержит a_2 в пятой и более высоких степенях). В итоге с требуемой точностью из (14) и (21) для силы взаимодействия при малых \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 с точностью до членов в третьей степени находим

$$F_{z,a} = -\frac{q_1 q_2 e^{-\tilde{R}} (\tilde{R} + 1)}{\varepsilon R^2} \times \left(1 + \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{1}{3} a_1^3 + \frac{1}{2} a_2^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon} - \frac{1}{3} a_2^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon} \right) + \frac{4k_D^2}{3\pi} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \tilde{a}_1^3 q_2^2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon} \tilde{a}_2^3 q_1^2 \right) \frac{K_{3/2}(\tilde{R}) K_{5/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{R}} - \frac{2k_D^2}{\pi} q_1^2 \tilde{a}_1^3 \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \frac{K_{1/2}(\tilde{R}) K_{3/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}}. \quad (37)$$

3.4. Взаимодействие двух сферических макрочастиц при сильном экранировании

Под сильным экранированием мы имеем в виду случай $\tilde{a}_1 \sim 1$ и/или $\tilde{a}_2 \sim 1$. В этом случае на расстояниях $\tilde{R} \gg \max(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ можно пренебречь членами, содержащими квадратичные и более высокие степени величины $\exp(-\tilde{R})$. В итоге получаем

$$A_0 = \frac{q_1}{\tilde{a}_1^2 \alpha_0(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)} k_D, \quad B_0 = \frac{q_2}{\tilde{a}_2^2 \alpha_0(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} k_D, \\ A_1 = -\frac{\beta_{10}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1)}{\alpha_1(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)} B_0, \\ B_1 = -\frac{\beta_{10}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2)}{\alpha_1(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} A_0. \quad (38)$$

Подставив (38) в (21), находим

$$F_a = -\frac{q_1 q_2 (1 + \tilde{R})}{\varepsilon R^2} e^{-\tilde{R}} \frac{e^{\tilde{a}_2}}{1 + \tilde{a}_2} \times \frac{e^{\tilde{a}_1}}{1 + \tilde{a}_1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \tilde{a}_1^2}. \quad (39)$$

Отметим, что это выражение при разложении до третьей степени радиусов макрочастиц включительно приводит к первому слагаемому правой части формулы (37). Также отметим, что выражения (37) и (39) явно показывают неравенство сил, действующих на первую и вторую макрочастицы. Интегрируя выражение (39) по межчастичному расстоянию, находим потенциал взаимодействия:

$$U_a = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R} e^{-\tilde{R}} \frac{e^{\tilde{a}_2}}{1 + \tilde{a}_2} \frac{e^{\tilde{a}_1}}{1 + \tilde{a}_1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \tilde{a}_1^2}. \quad (40)$$

Это выражение при $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ и $a_1 = a_2$ переходит в так называемый DLVO-потенциал [24].

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Система уравнений (14) решалась численно методом LU-декомпозиции [25] для заданного максимального числа учитываемых членов разложения $n_{max} = 6, 30, 50$. Расчеты проведены для характерных для пылевой плазмы [26] постоянных экранирования $k_D = 10 \text{ см}^{-1}$ и $k_D = 100 \text{ см}^{-1}$, а также при $k_D = 10^3 \text{ см}^{-1}$ для изучения взаимодействия в условиях сильного экранирования. Рассмотрены микрочастицы равных радиусов, $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$, и равных зарядов, $q_1 = q_2 = 10^3 e$ (e — элементарный заряд), а также случай, когда радиус и заряд первой макрочастицы в 10 раз меньше, чем заданные выше радиус и заряд второй. Далее для удобства сила в случае отталкивания будет считаться положительной, а в случае притяжения — отрицательной (т.е. сила, действующая на первую макрочастицу, умножается на -1). На рис. 2 приведены зависимости силы взаимодействия макрочастиц от расстояния между их поверхностями: $L = R - a_1 - a_2$.

На рис. 2а видно, что в случае двух одинаковых заряженных сфер с равными радиусами уже расчеты с $n_{max} = 6$ на малых расстояниях $L < 10^{-2} \text{ см}$ дают достаточно хорошее согласие с данными более точных расчетов силы взаимодействия в однородном диэлектрике ($\varepsilon = 1$) с использованием бисферической системы координат [14]. Расчет с использованием сферической системы координат с помо-

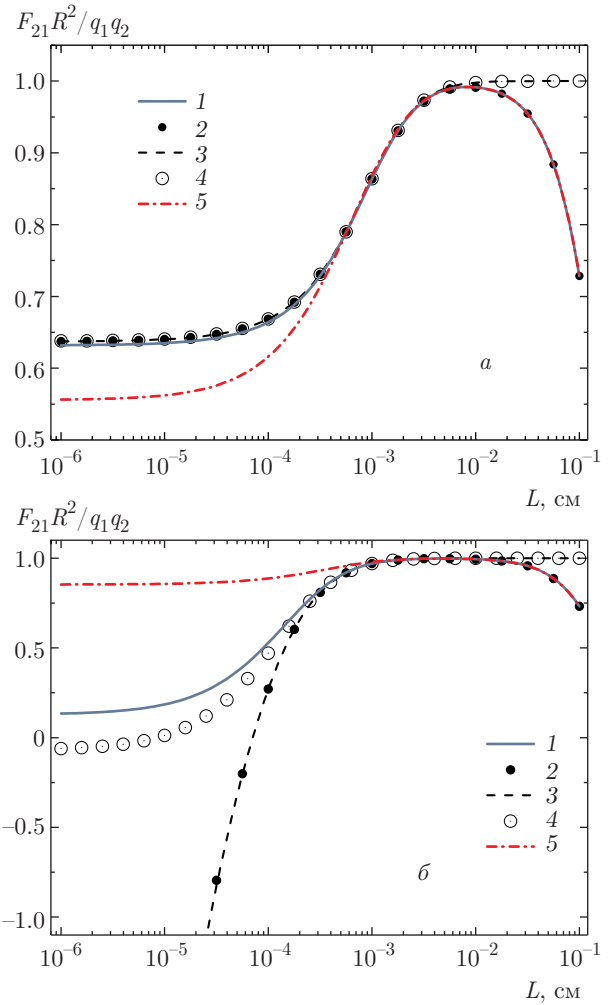


Рис. 2. Зависимости от L приведенной силы взаимодействия макрочастиц при $k_D = 10 \text{ см}^{-1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$, $\varepsilon = 1$ для $q_1 = q_2 = 10^3 e$, $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$ (а) и $q_1 = 10^2 e$, $a_1 = 1 \text{ мкм}$, $q_2 = 10^3 e$, $a_2 = 10 \text{ мкм}$ (б). Кривые 1, 2 — расчет по (21) с $n_{max} = 6$ (1), 30 (2); 3 — расчет согласно [14]; 4 — расчет без учета экранирования по (27) и (21) с $n_{max} = 6$; 5 — по аналитической формуле (37)

щью (27) и (21) с тем же числом учитываемых членов $n_{max} = 6$ показывает прекрасное согласие с [14] (различие на рассмотренных расстояниях наблюдалось только в четвертом знаке). Результаты расчетов с учетом экранирования при $n_{max} = 30$ с такой же точностью согласуются с данными расчетов на основе [14] на малых расстояниях.

В случае макрочастиц разных радиусов точность расчетов с $n_{max} = 6$ оказывается заметно ниже, что хорошо видно на рис. 2б. А расчеты с $n_{max} = 30$ на малых расстояниях $10^{-5} < L < 10^{-2} \text{ см}$ хорошо согласуются с данными, полученными на основе [14]. Из рис. 2 также видно, что формула (37) на боль-

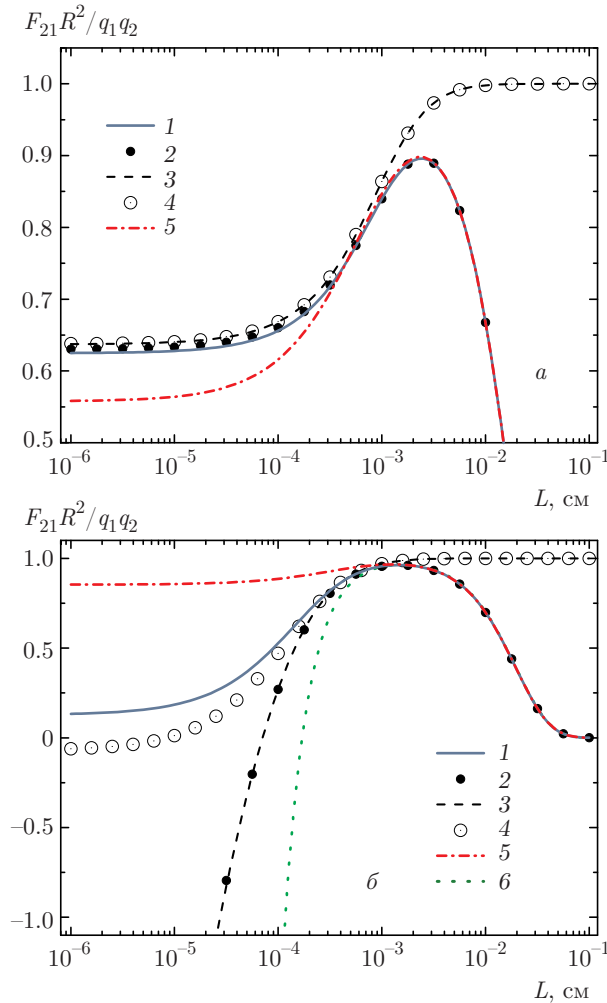


Рис. 3. Зависимости от L приведенной силы взаимодействия макрочастиц при $k_D = 100 \text{ см}^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$, $\epsilon = 1$ для $q_1 = q_2 = 10^3 e$, $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$ (а) и $q_1 = 10^2 e$, $a_1 = 1 \text{ мкм}$, $q_2 = 10^3 e$, $a_2 = 10 \text{ мкм}$ (б). Кривые 1, 2 — расчет по (21) с $n_{max} = 6$ (1), 30 (2); 3 — расчет согласно [14]; 4 — расчет без учета экранирования по (27) и (21) с $n_{max} = 6$; 5 — по аналитической формуле (37); 6 — расчет согласно [11] для $a_1 = 0$

ших расстояниях $L > 10^{-3} \text{ см}$ хорошо согласуется с расчетами с $n_{max} = 6$ и 30.

При увеличении постоянной экранирования в 10 раз отмеченная выше картина сохраняется, что видно на рис. 3. На рис. 3б также приведена зависимость силы взаимодействия точечной первой макрочастицы и второй сферической, рассчитанной согласно [11]. Видно, что при $L > 10^{-3} \text{ см}$ эта кривая практически сливается с кривой 1 и точками 2. Из рис. 3 видно, что область, в которой наблюдается совпадение результатов расчетов с учетом и без учета экранирования, сужается. Это связано с

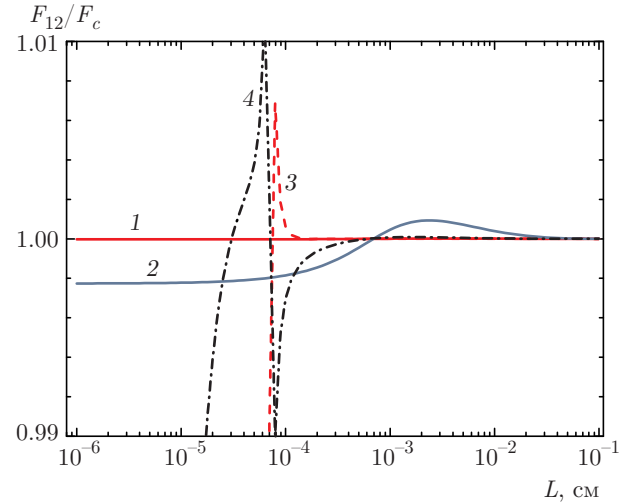


Рис. 4. Отношение расчетной силы к силе, вычисленной по формуле (41) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$, $\epsilon = 1$, $k_D = 10$ (1, 3), 100 (2, 4) см^{-1} для $q_1 = q_2 = 10^3 e$, $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$ (1, 2), $q_1 = 10^2 e$, $a_1 = 1 \text{ мкм}$, $q_2 = 10^3 e$, $a_2 = 10 \text{ мкм}$ (3, 4)

тем, что при малых L с использованием бисферических координат удается достичь существенно большей точности, чем при использовании сферической системы координат. Плохая точность при использовании сферической системы координат при малых межчастичных расстояниях отмечалась и в работе [27]. Далее на расстояниях $L \sim \max(a_1, a_2)$ расхождение данных 2 и 3 на рис. 3 связано с «включением» эффектов экранирования.

Достижение приемлемой точности при определении силы взаимодействия в равновесной плазме развитым здесь методом при малых L и сильно различных a_1 и a_2 затруднено тем, что формула сложения Макдональда (10) при близких аргументах функций Инфельда и Макдональда очень медленно сходится (при равных аргументах сходимости нет вообще). Поэтому требуется учет большого числа членов, но при этом возникают сложности с решением системы (14), которая становится плохо обусловленной. Хорошее согласие расчетов с учетом и без учета экранирования на малых расстояниях показывает путь решения этой проблемы путем их сопряжения. На рис. 4 показаны зависимости отношения силы (19), рассчитанной с $n_{max} = 50$, к силе, вычисленной по формуле

$$F_c = - \left(1 + \tilde{R} \right) e^{-\tilde{R}} \frac{e^{\tilde{a}_2}}{1 + \tilde{a}_2} \times \frac{e^{\tilde{a}_1}}{1 + \tilde{a}_1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_1 + 2\epsilon} \tilde{a}_1^2} F_{diel}. \quad (41)$$

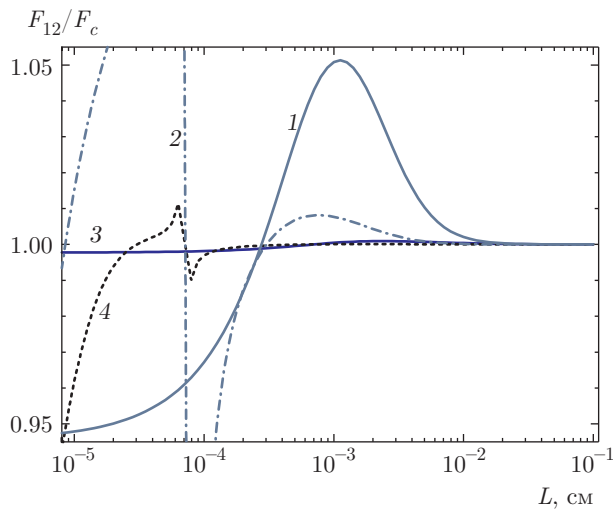


Рис. 5. Отношение расчетной силы к силе, вычисленной по формуле (41) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$, $\epsilon = 1$, $k_D = 1000$ (1, 2), 100 (3, 4) см^{-1} для $q_1 = q_2 = 10^3 e$, $a_1 = a_2 = 10$ мкм (1, 3), $q_1 = 10^2 e$, $a_1 = 1$ мкм, $q_2 = 10^3 e$, $a_2 = 10$ мкм (2, 4)

Здесь F_{diel} — сила, рассчитанная без учета экранирования согласно [14] с использованием бисферической системы координат с учетом до 10^4 членов разложения, чтобы получить значение силы с точностью до 12 знаков. Видно очень хорошее согласие на расстояниях $L > 10^{-4}$ см, а расхождение при $L < 10^{-4}$ см при различных радиусах связано с отмеченной выше плохой сходимостью ряда (11), а также переходом от отталкивания к притяжению по мере сближения макрочастиц, вследствие чего сила в этой области становится численно очень малой. Кривая 1 с высокой точностью совпадает с единицей, а отличие кривой 2 от единицы показывает степень влияния членов, содержащих вторые и более высокие степени величины $\exp(-\tilde{R})$. Видно, что это влияние при $k_D = 100 \text{ см}^{-1}$ не превышает 0.2%. Поэтому мы можем сделать вывод, что при выполнении условий $\tilde{a}_1 \ll 1$, $\tilde{a}_2 \ll 1$ выражение (41) описывает силу взаимодействия двух макрочастиц в равновесной плазме с высокой точностью. В режиме сильного экранирования $\tilde{a}_1 \sim 1$, $\tilde{a}_2 \sim 1$ точность формулы (41) уменьшается до 5%, что хорошо видно из рис. 5.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Как отмечалось выше, из выражений (37) и (39) следует, что при взаимодействии двух заряженных макрочастиц в равновесной плазме силы оказыва-

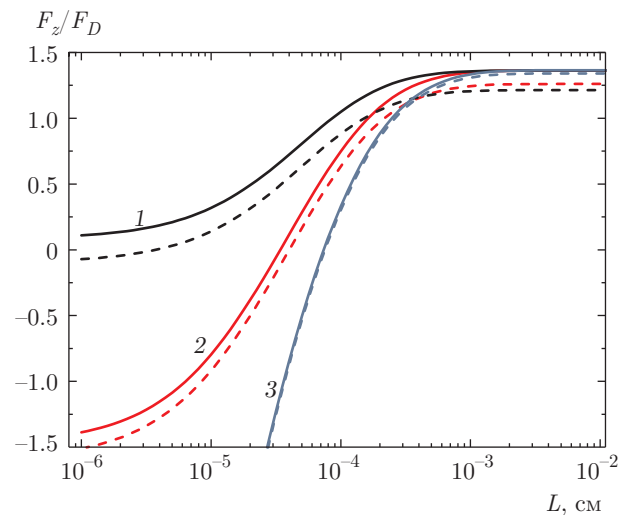


Рис. 6. Приведенная к дебаевской силе взаимодействия макрочастиц в зависимости от L при $q_1 = 10^2 e$, $a_1 = 1$ мкм, $q_2 = 10^3 e$, $a_2 = 10$ мкм, $k_D = 1000 \text{ см}^{-1}$, $n_{max} = 50$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2$ (1), 4 (2), 25 (3). Сплошные кривые — сила, действующая на первую (малую) макрочастицу, штриховые кривые — на вторую (большую) макрочастицу

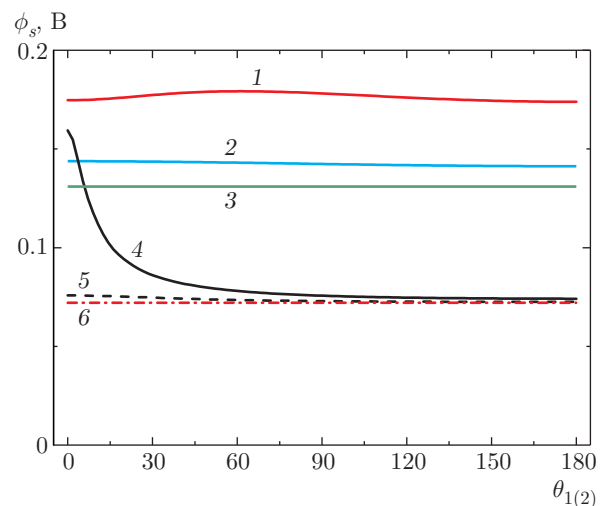


Рис. 7. Зависимости от полярного угла потенциала поверхности макрочастиц при $q_1 = 10^2$, $a_1 = 1$ мкм, $q_2 = 10^3$, $a_2 = 10$ мкм, $k_D = 1000 \text{ см}^{-1}$, $n_{max} = 30$. Кривые 1, 2, 3 — потенциал поверхности первой (малой) макрочастицы при $L = 10^{-5}$ (1), 10^{-3} (2), 10^{-1} (3) см; 4, 5, 6 — соответствующие распределения потенциала поверхности второй (большой) макрочастицы

ются в общем случае неравными. Это подтверждают и численные расчеты для макрочастиц разного радиуса и/или имеющих разные диэлектрические проницаемости (см. рис. 6). Неравенство сил оказывает-

ся тем меньше, чем больше диэлектрические проницаемости, и в случае макрочастиц-проводников, как и в случае одинаковых макрочастиц, силы оказываются равными. Нарушение равенства сил связано с тем, что во взаимодействии заряженных макрочастиц участвуют электроны и ионы плазмы и плотность объемного заряда плазмы меняется в присутствии заряженных частиц. В случае диэлектрических макрочастиц потенциал их поверхности зависит от угловых координат (см. рис. 7), что, в свою очередь, приводит к угловой зависимости распределения объемного заряда (в равновесной плазме в дебаевском приближении плотность объемного заряда прямо пропорциональна потенциалу) вблизи поверхностей макрочастиц. Как видно из рис. 7, в случае макрочастиц разного радиуса (и/или диэлектрической проницаемости) степень асимметрии оказывается разной, причем потенциал поверхности малой частицы оказывается выше, чем потенциал большой. Все это и приводит к асимметрии силы взаимодействия. По мере увеличения расстояния между макрочастицами их потенциалы поверхностей сближаются и на больших расстояниях различаются только из-за различия коэффициентов $\exp(\tilde{a}_1)/(1+\tilde{a}_1)$ и $\exp(\tilde{a}_2)/(1+\tilde{a}_2)$ в эффективных зарядах макрочастиц в плазме (см. формулу (39)). Поэтому при больших межчастичных расстояниях асимметрия оказывается незначительной.

Расчеты показывают (см. рис. 6), что сила, действующая на малую макрочастицу, оказывается всегда немного больше, чем сила, действующая на крупную (в области притяжения по абсолютной величине меньше). Неравенство сил говорит о том, что есть нескомпенсированная сила, действующая на плазму как на целое, и приобретаемый импульс плазма передает в столкновениях атомам нейтрального газа, который служит термостатом. Поэтому макрочастицы должны двигаться с ускорением относительно нейтрального газа (электролита) в направлении от крупной макрочастицы к малой. Это говорит о том, что система не является равновесной, и, может быть, это является указанием на то, что в равновесной плазме потенциалы поверхностей макрочастиц должны быть равными.

Действительно, в плазме потенциал плавающего зонда (без приложенного внешнего потенциала) или потенциал поверхности макрочастицы совпадает с плавающим потенциалом плазмы, поэтому вся поверхность макрочастиц будет под одним потенциалом и потенциалы поверхностей взаимодействующих макрочастиц в однородной плазме будут одинаковыми. Поэтому при изменении расстояния между

макрочастицами их потенциалы будут сохраняться постоянными. В этом случае коэффициенты разложения потенциалов (13) будут определяться системой

$$\begin{aligned} A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{\tilde{a}_1}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) &= \phi_{1s} \delta_{n,0}, \\ B_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}{\sqrt{\tilde{a}_2}} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m b_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R}) &= \phi_{2s} \delta_{n,0}, \end{aligned} \quad (42)$$

где ϕ_{1s}, ϕ_{2s} — потенциалы поверхностей макрочастиц:

$$\phi_{1s} = \frac{q_{10}}{a_1(1+\tilde{a}_1)}, \quad \phi_{2s} = \frac{q_{20}}{a_2(1+\tilde{a}_2)},$$

q_{10}, q_{20} — заряды макрочастиц при $L = \infty$. Сила при этом определяется только выражением (19). Для коэффициентов A_0 и A_1 при $\tilde{R} \gg \max(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ из (42) находим

$$\begin{aligned} A_0 &= \tilde{a}_1 e^{\tilde{a}_1} \phi_{1s}, \\ A_1 &= -3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{K_{3/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1)}{K_{3/2}(\tilde{a}_1)} B_0 \end{aligned} \quad (43)$$

и аналогичные выражения для B_0 и B_1 , которые здесь не будем приводить. Теперь из (19) с той же точностью, с которой получена формула (39), находим

$$F_\phi = -a_2 a_1 \phi_{1s} \phi_{2s} \frac{1+\tilde{R}}{\varepsilon R^2} \exp\left\{-\left(\tilde{R}-\tilde{a}_1-\tilde{a}_2\right)\right\}. \quad (44)$$

На рис. 8 показаны зависимости силы взаимодействия при постоянных потенциалах для разных постоянных экранирования. Видно, что в этом случае притяжение на малых расстояниях исчезает. Такое изменение характера взаимодействия при переходе от случая постоянных зарядов к случаю постоянных потенциалов уже отмечалось в работах [9, 10]. Из рис. 8 видно, что только при $k_D = 10 \text{ см}^{-1}$ эффекты экранирования оказываются малыми на малых расстояниях. Также из рис. 8 видно, что приближенная формула (44) оказывается достаточно точной только при $L > k_D^{-1}$. Различие сил на малых расстояниях связано с тем, что при одном и том же значении потенциала поверхности макрочастиц их заряды при разных k_D оказываются разными (см. рис. 9). При этом заряды меняются и при изменении межчастичного расстояния (заряд большей макрочастицы при уменьшении L от 10^{-1} до 10^{-6} см уменьшается только на 2–3%, поэтому это изменение на рис. 9 практически незаметно), что не позволяет получить формулу типа (41).

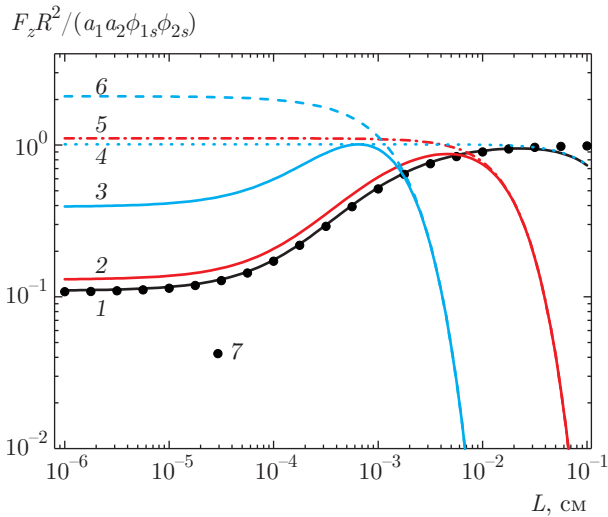


Рис. 8. Приведенная сила взаимодействия макрочастиц в зависимости от L при постоянных потенциалах поверхностей макрочастиц при $\phi_{1s} = \phi_{2s} = 10^6 \text{ e cm}^{-1}$, $a_1 = 1 \text{ мкм}$, $a_2 = 10 \text{ мкм}$, $n_{max} = 50$, $k_D = 10$ (1), 100 (2), 10^3 (3) см^{-1} ; 4, 5, 6 — расчет по формуле (44) для $k_D = 10$ (4), 10^2 (5), 10^3 (6) см^{-1} ; 7 — расчет при постоянных потенциалах без экранирования согласно [9, 10]

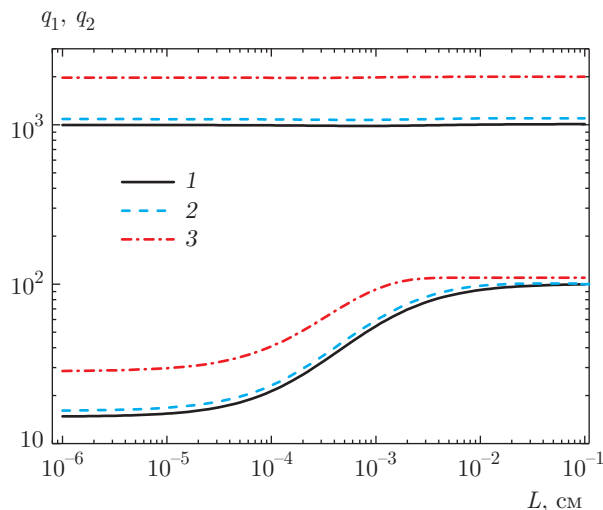


Рис. 9. Заряд макрочастиц как функция L при постоянных потенциалах поверхностей макрочастиц $\phi_{1s} = \phi_{2s} = 10^6 \text{ e cm}^{-1}$ при $a_1 = 1 \text{ мкм}$, $a_2 = 10 \text{ мкм}$, $n_{max} = 50$, $k_D = 10$ (1), 100 (2), 10^3 (3) см^{-1} ; верхние кривые — заряд большей макрочастицы q_2 , нижние — меньшей q_1

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования взаимодействия двух заряженных диэлектрических макрочастиц сферической формы в равновесной плазме в рамках линеаризованной модели Пуассона – Больцмана, проведенные в настоящей работе, показали, что силы, действующие на

макрочастицы, в общем случае оказываются неравными. Только в случае макрочастиц-проводников или в случае макрочастиц-диэлектриков одного размера и одного заряда они оказываются равными. Нарушение равенства сил связано с тем, что в случае диэлектрических макрочастиц с постоянным зарядом потенциал их поверхности оказывается зависящим от угловых координат, что, в свою очередь, приводит к угловой зависимости распределения объемного заряда вблизи поверхности макрочастиц. Этот объемный заряд и приводит к неравенству сил взаимодействия. В случае, если при изменении межчастичного расстояния сохраняются постоянными потенциалы поверхностей макрочастиц, силы, действующие на макрочастицы, оказываются равными. Путем сравнения результатов расчетов с учетом экранирования и более точных расчетов на малых расстояниях без учета экранирования предложены формулы, которые позволяют рассчитать силу взаимодействия с высокой точностью при выполнении условия, что радиусы макрочастиц много меньше радиуса экранирования. Это условие в экспериментах с пылевой плазмой обычно выполняется.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-12-10424).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Определение коэффициентов разложения потенциала

Для нахождения искомых коэффициентов разложения потенциала одной макрочастицы в сферической системе координат с полюсом в центре другой макрочастицы используем представление полиномов Лежандра и Гегенбауэра в виде полинома аргумента [20, 28, 29]:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} \mu^{n-2m} \equiv \sum_{m=0}^n q_{n,m} \mu^m, \quad (45)$$

$$C_m^{n+1/2}(\mu) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{[2n-1+2(m-k)]!!}{(2n-1)!!} \times \frac{\mu^{m-2k}}{k!(m-2k)!} \equiv \sum_{k=0}^m g_{nm,k} \mu^k. \quad (46)$$

Каждую степень μ можно представить в виде суммы полиномов Лежандра [21, 22]:

$$\begin{aligned} \mu^k &= k! \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(2k+1-4m)}{(2m)!!(2k+1-2m)!!} P_{k-2m} \equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^k p_{m,k} P_m(\mu). \end{aligned} \quad (47)$$

Из выражений (45), (46) и (47) видно, что произведение полиномов Лежандра и Гегенбауэра можно представить в виде суммы полиномов Лежандра:

$$P_k(\mu) C_\ell^{m+1/2}(\mu) = \sum_{n=0}^{k+\ell} h_{kml,n} P_n(\mu), \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} h_{kml,n} &= \sum_{i=0}^k q_{k,i} \sum_{j=0}^{\ell} g_{ml,j} p_{n,i+j}, \\ n &= 0, 1, \dots, i+j. \end{aligned} \quad (49)$$

В итоге для потенциала, например, первой макрочастицы находим

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)!! A_m \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \times \\ &\times \frac{\Phi_{m+\ell+1/2}(\tilde{r}_2, \tilde{R})}{\tilde{R}^k \tilde{r}_2^{m-k}} \sum_{n=0}^{k+\ell} h_{kml,n} P_n(\mu_2). \end{aligned} \quad (50)$$

Отсюда видно, что потенциалы можно представить в виде (13), а коэффициенты b_{nm} определены суммой как

$$\begin{aligned} b_{nm}(\tilde{r}_i, \tilde{R}) &= (2m-1)!! \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m h_{kml,n} \times \\ &\times (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{\Phi_{m+\ell+1/2}(\tilde{r}_i, \tilde{R})}{\tilde{R}^k \tilde{r}_i^{m-k}}. \end{aligned} \quad (51)$$

При численном решении задачи рассматривается конечное число членов разложения: индекс m изменяется до некоторого выбранного числа n_{max} , при этом $\ell \leq n_{max} - m$ и $k \leq n_{max} - m - \ell$. Это позволяет учесть все члены, содержащиеся до $R^{-(n_{max}+1)}$ включительно. Приведем явные выражения коэффициентов для $n_{max} = 6$. Для $m = 0$ коэффициенты имеют простой вид:

$$b_{n0}(\tilde{r}, \tilde{R}) = \Phi_{n+1/2}(\tilde{r}, \tilde{R}), \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (52)$$

Далее аргументы коэффициентов b_{nm} и функций Φ для сокращения записей опускаем. Из (51) находим

$$\begin{aligned} b_{01} &= \frac{1}{\tilde{r}} (\Phi_{3/2} + \Phi_{7/2} + \Phi_{11/2}) - \frac{1}{\tilde{R}} (\Phi_{5/2} + \Phi_{9/2}), \\ b_{02} &= \frac{3}{\tilde{r}^2} \Phi_{5/2} - \frac{10}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{7/2} + \left(\frac{10}{\tilde{r}^2} + \frac{7}{\tilde{R}^2} \right) \Phi_{9/2} - \\ &- \frac{28}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{11/2} + \frac{21}{\tilde{r}^2} \Phi_{13/2}, \\ b_{03} &= \frac{15}{\tilde{r}^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \Phi_{7/2} - \frac{7}{\tilde{R}} \Phi_{9/2} + \frac{7}{\tilde{r}} \Phi_{11/2} \right), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} b_{04} &= \frac{105}{\tilde{r}^3} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \Phi_{9/2} - \frac{12}{\tilde{R}} \Phi_{11/2} + \frac{12}{\tilde{r}} \Phi_{13/2} \right), \\ b_{05} &= \frac{9!!}{\tilde{r}^5} \Phi_{11/2}, \\ b_{06} &= \frac{11!!}{\tilde{r}^6} \Phi_{13/2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{1}{\tilde{R}} (\Phi_{3/2} + 3\Phi_{7/2} + 3\Phi_{11/2}) + \\ &+ \frac{3}{\tilde{r}} (\Phi_{5/2} + \Phi_{9/2} + \Phi_{13/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= -\frac{6}{\tilde{R}\tilde{r}} (\Phi_{5/2} + 8\Phi_{9/2}) + \\ &+ \frac{3}{\tilde{r}^2} (5\Phi_{7/2} + 14\Phi_{11/2}) + \frac{6}{\tilde{R}^2} \Phi_{7/2}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} b_{13} &= -\frac{9}{\tilde{r}^2 \tilde{R}} (5\Phi_{7/2} + 77\Phi_{11/2}) + \\ &+ \frac{21}{\tilde{r}^3} (5\Phi_{9/2} + 27\Phi_{13/2}) + \frac{126}{\tilde{r} \tilde{R}^2} \Phi_{9/2}, \end{aligned}$$

$$b_{14} = \frac{105}{\tilde{r}^3} \left(-\frac{4}{\tilde{R}} \Phi_{9/2} + \frac{9}{\tilde{r}} \Phi_{11/2} \right),$$

$$b_{15} = \frac{9!!}{\tilde{r}^4} \left(-\frac{5}{\tilde{R}} \Phi_{11/2} + \frac{11}{\tilde{r}} \Phi_{13/2} \right);$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\tilde{R}} (2\Phi_{5/2} + 5\Phi_{9/2}) + \frac{5}{\tilde{r}} (\Phi_{7/2} + \Phi_{11/2}),$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= \frac{3}{\tilde{R}^2} \Phi_{5/2} - \frac{20}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{7/2} + 5 \left(\frac{7}{\tilde{r}^2} + \frac{4}{\tilde{R}^2} \right) \Phi_{9/2} - \\ &- \frac{110}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{11/2} + \frac{90}{\tilde{r}^2} \Phi_{13/2}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$b_{23} = \frac{15}{\tilde{r}} \left(\frac{3}{\tilde{R}^2} \Phi_{7/2} - \frac{14}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{9/2} + \frac{21}{\tilde{r}^2} \Phi_{11/2} \right),$$

$$b_{24} = \frac{315}{\tilde{r}^2} \left(\frac{2}{\tilde{R}^2} \Phi_{9/2} - \frac{8}{\tilde{R}\tilde{r}} \Phi_{11/2} + \frac{11}{\tilde{r}^2} \Phi_{13/2} \right);$$

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= -\frac{3}{R}\Phi_{7/2} + \frac{7}{\tilde{r}}(\Phi_{9/2} + \Phi_{13/2}) - \frac{7}{R}\Phi_{11/2}, \\
 b_{32} &= \frac{9}{R^2}\Phi_{7/2} - \frac{42}{R\tilde{r}}\Phi_{9/2} + \frac{63}{\tilde{r}^2}\Phi_{11/2}, \\
 b_{33} &= -\frac{15}{R^3}\Phi_{7/2} + \frac{63}{\tilde{r}} \times \\
 &\times \left(\frac{3}{R^2}\Phi_{9/2} - \frac{9}{R\tilde{r}}\Phi_{11/2} + \frac{11}{\tilde{r}^2}\Phi_{13/2} \right), \\
 b_{41} &= -\frac{4}{R}\Phi_{9/2} + \frac{9}{\tilde{r}}\Phi_{11/2}, \\
 b_{42} &= \frac{18}{R^2}\Phi_{9/2} - \frac{72}{R\tilde{r}}\Phi_{11/2} + \frac{99}{\tilde{r}^2}\Phi_{13/2}, \\
 b_{51} &= -\frac{5}{R}\Phi_{11/2} + \frac{11}{\tilde{r}}\Phi_{13/2}.
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Отметим, что $b_{nm} = 0$ для всех n и m , удовлетворяющих условию $(n + m) \geq n_{max}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Некоторые свойства модифицированных функций Бесселя

При малых значениях аргумента [19]

$$\begin{aligned}
 K_{n+1/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{(2n-1)!!}{z^n}, \\
 I_{n+1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{z^n}{(2n+1)!!}.
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Используя выражения (58) при $k_D \rightarrow 0$, находим, что

$$\Phi_{n+1/2}(\tilde{r}, \tilde{R}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tilde{R}} \left(\frac{r}{\tilde{R}} \right)^n.
 \tag{59}$$

В настоящей работе используются следующие выражения для производных модифицированных функций Бесселя ($n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \left[\frac{I_{n+1/2}(z)}{z^{k+1/2}} \right] &= \frac{I_{n+3/2}(z)}{z^{k+1/2}} + \\
 &+ \frac{n-k}{z} \frac{I_{n+1/2}(z)}{z^{k+1/2}}, \\
 \frac{d}{dz} \left[\frac{K_{n+1/2}(z)}{z^{k+1/2}} \right] &= -\frac{K_{n+3/2}(z)}{z^{k+1/2}} + \\
 &+ \frac{n-k}{z} \frac{K_{n+1/2}(z)}{z^{k+1/2}},
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

и соотношение

$$\begin{aligned}
 I_{n+1/2}(z) K_{n+3/2}(z) + I_{n+3/2}(z) K_{n+1/2}(z) &= \\
 &= \frac{1}{z}.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Shukla and B. Eliasson, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 25 (2009).
2. U. Konopka, G. E. Morfill, and L. Ratke, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 891 (2000).
3. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, *Phys. Rev. E* **66**, 046407 (2002).
4. O. S. Vaulina, O. F. Petrov, A. V. Gavrikov et al., *Plasma Phys. Rep.* **33**, 278 (2007).
5. T. Antonova, B. M. Annaratone, D. D. Goldbeck et al., *Phys. Rev. Lett.* **96**, 115001 (2006).
6. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **148**, 1039 (2015) [A. V. Filippov, A. F. Pal, and A. N. Starostin, *J. Exp. Theor. Phys.* **121**, 909 (2015)].
7. A. V. Ivlev, G. E. Morfill, and U. Konopka, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 195502 (2002).
8. А. М. Савельев, А. М. Старик, *ЖЭТФ* **135**, 369 (2009).
9. А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **136**, 601(2009) [A. V. Filippov, *JETP* **109**, 516 (2009)].
10. A. V. Filippov, *Contr. Plasma Phys.* **49**, 433 (2009).
11. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **142**, 594 (2012) [V. R. Munirov and A. V. Filippov, *JETP* **115**, 527 (2012)].
12. M. Lampe and G. Joyce, *Phys. Plasmas* **22**, 023704 (2015).
13. D. P. Resendes, *Phys. Rev. E* **61**, 793 (2000).
14. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
15. P. Debye and E. Hückel, *Phys. Zeitschr.* **24**, 185 (1923).
16. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
17. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954) [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York, Toronto, London (1950)].
18. Г. Карслоу, Д. Егер, *Теплопроводность твердых тел*, Наука, Москва (1964) [H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon, Oxford (1959)].
19. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949), т. 1 [G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, London (1922)].

20. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979), У. Хохштрассер, гл. 22, *Ортогональные многочлены* [*Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramovitz and I. Stegun, NBS Appl. Math. Ser. 55, Washington (1972), W. Hochstrasser, *Orthogonal Polynomials*, Ch. 22].
21. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952) [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Univ. Press, Cambridge (1931)].
22. Т. М. MacRobert, *Spherical Harmonics*, Metiuen & Co. Ltd., London (1947).
23. J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon, Oxford, United Kingdom (1891); Nauka, Moscow (1989).
24. A. E. Larsen and D. G. Grier, *Nature* **385**, 230 (1997).
25. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, Vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
26. *Комплексная и пылевая плазма. Из лаборатории в космос*, под ред. В. Е. Фортова, Г. Морфила, Физматлит, Москва (2012) [*Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space*, Ser. Plasma Phys., 25, ed. by V. E. Fortov and G. Morfill, CRC Press, Hoboken, NJ (2009)].
27. Y. Nakajima and T. Sato, *J. Electrostatics* **45**, 213 (1999).
28. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1974) [G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill, New York (1968)].
29. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, Москва (2002), т. 2, с. 149–150 [E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Univ. Press, Cambridge (1927)].