

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЗОНАНСАХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОТДАЧЕЙ

Д. Б. Лазебный<sup>a,b\*</sup>, Д. В. Бражников<sup>a,b</sup>, А. В. Тайченачев<sup>a,b</sup>, В. И. Юдин<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> *Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>b</sup> *Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>c</sup> *Новосибирский государственный технический университет  
630073, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 20 июня 2016 г.

Рассмотрено влияние поляризации полей на амплитуду резонансов, индуцированных отдачи, для лазерно охлажденных свободных атомов и для атомов, находящихся в действующей магнитооптической ловушке. Для всех замкнутых дипольных переходов в рамках теории возмущения получены явные аналитические выражения для поляризационной зависимости амплитуды резонансов. Определены оптимальные поляризационные условия наблюдения резонансов.

DOI: 10.7868/S0044451017010047

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время холодные атомы являются неотъемлемой составляющей огромного количества различных приложений [1]. Наиболее часто для лазерного охлаждения нейтральных атомов используется магнитооптическая ловушка (МОЛ) [2], которая позволяет получить облако локализованных (0.1–1 мм) холодных атомов с температурами в диапазоне 10 мкК–1 мК. При таких условиях пролетное и доплеровское уширение переходов практически отсутствует. Такие охлажденные локализованные сгустки атомов являются очень перспективными в приложениях прецизионной спектроскопии, поэтому изучение их характеристик — важная задача. Для этих целей может служить спектроскопия пробного поля в работающей МОЛ, которая является мощным инструментом неразрушающего контроля облака холодных атомов.

Одним из методов прецизионной спектроскопии является метод резонансов, индуцированных отдачи (РИО). Впервые теоретическая модель РИО была представлена в работах [3, 4], а о первых наблюдениях сообщается в работах [5, 6]. Основная суть

феномена резонансов, индуцированных отдачи, заключается в следующем. Два поля различной частоты вызывают рамановские переходы между подуровнями основного состояния с различными значениями импульса. Если частота пробного поля отстроена в красную область спектра от частоты поля накачки, то происходит усиление пробного поля, в противном случае — ослабление. Ненулевая амплитуда вынужденного рамановского резонанса возникает вследствие различных населенностей кинетических состояний. Сигнал в спектроскопии РИО пропорционален разности населенностей атомных состояний, импульсы которых различаются на импульс отдачи  $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  ( $\mathbf{k}_{1,2}$  — волновые векторы полей), поэтому общая форма резонанса представляет производную распределения по импульсам с шириной, пропорциональной корню из температуры облака атомов.

Важной особенностью метода РИО является его селективность по направлению, поскольку измерение скоростного распределения происходит в определенном направлении, задаваемом непосредственно углом  $\theta$  между направлениями распространения пробной волны и волны накачки. Благодаря этому РИО может использоваться для изучения анизотропии распределения по скоростям неравновесных холодных атомов [7]. РИО достаточно тщательно исследовались как способ неразрушающего контроля

\* E-mail: becks.ddf@gmail.com

для измерения температуры холодных атомов [7]. Также были проведены работы по диагностике свободных и локализованных атомов с использованием РИО [8, 9]. В работе [10] для прецизионных спектроскопических исследований холодных атомов использовалась так называемая темная магнитооптическая ловушка, в которой большая часть захваченных атомов сосредоточена на сверхтонком уровне основного состояния ( $^{85}\text{Rb } F_g = 2$ ), не взаимодействующем с оптическими полями. Методом спектроскопии РИО были получены распределения холодных атомов по скоростям и был обнаружен избыток быстрых атомов в темной МОЛ по сравнению с равновесным максвелловским распределением и с распределением атомов в обычной МОЛ, что подлежит дальнейшему изучению.

Значительный интерес представляют поляризационные особенности сигнала РИО, что подтверждается работами, направленными на изучение именно этих зависимостей [4, 11, 12]. В большинстве работ, посвященных этой тематике, проводится упрощенный анализ поляризационных зависимостей РИО. Например, в работе [4] используются только определенные моменты основного и возбужденного состояний, равные соответственно 1 и 2, к тому же рассматриваются только простейшие поляризации полей (линейные и циркулярные). В работе [12] ограничивались только линейными и циркулярными поляризациями в различных конфигурациях для значений угловых моментов основного и возбужденного состояний  $F_g = 2$ ,  $F_e = 3$ . Теоретическая работа [11] основывалась на полуклассической трактовке углового момента атомов, позволяющей описать РИО с любыми поляризациями полей и для любой взаимной конфигурации их волновых векторов, при этом учитывалось вырождение по проекции углового момента. Тем не менее полуклассическая трактовка применяется только для достаточно больших значений углового момента. Сравнение упрощенной теоретической модели с экспериментальными данными, проведенное в работе [13], показало наличие большой оптической анизотропии (асимметрия в спектрах поглощения пробного поля для поляризаций  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ ), связанной с РИО, которая была предсказана ранее [14]. Это, в свою очередь, обуславливает сильную поляризационную зависимость резонансов отдачи.

Поскольку метод РИО предполагает неразрушающий контроль, в экспериментах, как правило, используются слабые поля, формирующие РИО, следовательно, может быть использована теория возмущений. Кроме того, теория возмущений является

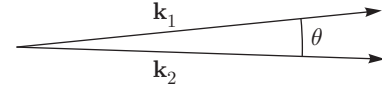


Рис. 1. Взаимное расположение волновых векторов пробной волны и волны накачки.  $\theta \ll 1$

достаточно универсальным методом, позволяющим получить наиболее общую картину явления. Руководствуясь сказанным выше, сформулируем цель настоящей работы. Целью настоящей работы является получение поляризационной зависимости РИО по теории возмущений по обоим полям (пробному полю и полю накачки) для произвольного замкнутого перехода с учетом вырождения по проекции полного углового момента атома. Как показывает практика, такой учет может оказаться существенным.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим облако холодных атомов, приготовленных в МОЛ и облучаемых двумя монохроматическими полями: пробным полем и полем накачки с углом  $\theta \ll 1$  между волновыми векторами этих полей (рис. 1), которые участвуют в формировании РИО. Поляризации полей считаем произвольными эллиптическими, определяемыми параметрами эллиптичности. Предполагаем, что поля взаимодействуют с закрытым дипольным переходом  $F_g \rightarrow F_e$  ( $F_g$ ,  $F_e$  — полные угловые моменты основного ( $g$ ) и возбужденного ( $e$ ) состояний атома). Будем пользоваться формализмом матрицы плотности в вигнеровском представлении, широко распространенном в спектроскопии и теории лазерного охлаждения атомов. Квантовое кинетическое уравнение для матрицы плотности в вигнеровском представлении с учетом эффектов отдачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}}{m} \right) \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & -i \left[ \hat{H}_0, \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right] - \\ & - i \left( \hat{V}_{DE}(\mathbf{r} + i\hbar \nabla_{\mathbf{p}}/2, t) \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \right. \\ & \left. - \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \hat{V}_{DE}(\mathbf{r} - i\hbar \nabla_{\mathbf{p}}/2, t) \right) - \\ & - \frac{\gamma}{2} \left\{ \hat{\Pi}_e, \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right\} + \beta \gamma \frac{3}{2} \left\langle \sum_{s=1,2} \left( \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_s(\mathbf{k}) \right)^\dagger \times \right. \\ & \left. \times \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}) \left( \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_s(\mathbf{k}) \right) \right\rangle_{\Omega_{\mathbf{k}}} . \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь  $\widehat{V}_{DE}(\mathbf{r}, t) = \widehat{V}(\mathbf{r}, t) + \widehat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  — оператор взаимодействия поля с атомами в единицах частоты в дипольном приближении, где  $\widehat{V}(\mathbf{r}, t)$  определяется как суперпозиция операторов от каждого из полей:

$$\widehat{V}(\mathbf{r}, t) = \widehat{V}_1 \exp(-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})) + \widehat{V}_2 \exp(-i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})), \quad (2)$$

где индексы «1» и «2» соответствуют пробному полю и полю накачки, причем

$$\widehat{V}_i = \Omega_i (\widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_i). \quad (3)$$

Здесь  $\Omega_i = d_0 E_i / \hbar$  — частота Раби соответствующего поля,  $d_0 = \langle J_e \parallel d \parallel J_g \rangle$  — приведенный матричный элемент дипольного момента,  $\mathbf{e}_i$  — вектор поляризации. Матричные элементы приведенного оператора дипольного момента равны коэффициентам Клебша–Гордана [15]:

$$\langle F_e, \mu_e | \widehat{D}_q | F_g, \mu_g \rangle = C_{F_g, \mu_g; 1, q}^{F_e, \mu_e}. \quad (4)$$

Проекционный оператор  $\widehat{\Pi}_e$  определяется соотношением

$$\widehat{\Pi}_e = \sum_{\mu_e} |F_e, \mu_e\rangle \langle F_e, \mu_e|.$$

Невозмущенный гамильтониан атома в единицах частоты  $\widehat{H}_0 = \omega_{eg} \widehat{\Pi}_e$ . Последний член в правой части уравнения (1) описывает спонтанную отдачу, где  $\beta$  — коэффициент ветвления перехода. Поскольку в экспериментах используются поля, сильно отстроенные от резонанса  $\delta_L = (\omega_1 + \omega_2)/2 - \omega_{eg} \gg \gamma$ , чтобы минимально возмущать ансамбль атомов, к тому же в случае слабого насыщения  $S_{1,2} = \Omega_{1,2}^2 / (\gamma^2/4 + \delta_L^2) \ll 1$ , пренебрегаем везде в уравнении (1) членами, содержащими  $\widehat{\rho}_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Для оптических когерентностей используем приближение вращающейся волны:

$$\widehat{\rho}_{eg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \widehat{\rho}_{eg}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \exp(-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})) + \widehat{\rho}_{eg}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \exp(-i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})). \quad (5)$$

Аналогичное соотношение для  $\widehat{\rho}_{ge}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  получается непосредственно эрмитовым сопряжением соотношения (5). Используя (5), из (1) находим следующую систему оптических уравнений Блоха:

$$\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta_L\right) \widehat{\rho}_{eg}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -i\widehat{V}_1 \widehat{\rho}_{gg} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{2}\right), \quad (6)$$

$$\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta_L\right) \widehat{\rho}_{eg}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -i\widehat{V}_2 \widehat{\rho}_{gg} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{2}\right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r\right) \widehat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \\ = -i \left[ \exp(i(\Delta\omega t - \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \times \right. & \\ \times \left[ \widehat{V}_1^\dagger \widehat{\rho}_{eg}^{(2)} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{2}\right) - \widehat{\rho}_{eg}^{(1)\dagger} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{2}\right) \widehat{V}_2 \right] + & \\ + \exp(-i(\Delta\omega t - \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \left[ \widehat{V}_2^\dagger \widehat{\rho}_{eg}^{(1)} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{2}\right) - & \right. \\ - \widehat{\rho}_{eg}^{(2)\dagger} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{2}\right) \widehat{V}_1 \left. \right] + \widehat{V}_1^\dagger \widehat{\rho}_{eg}^{(1)} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{2}\right) + & \\ + \widehat{V}_2^\dagger \widehat{\rho}_{eg}^{(2)} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{2}\right) - \widehat{\rho}_{eg}^{(1)\dagger} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{2}\right) \widehat{V}_1 - & \\ \left. - \widehat{\rho}_{eg}^{(2)\dagger} \left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{2}\right) \widehat{V}_2 \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ ,  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ . При выводе (6) и (7) мы выбросили член, соответствующий  $\mathbf{v} \cdot \nabla_r$  в левых частях уравнений, поскольку предполагаем, что атомы холодные,  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v} \ll \gamma$ .

В качестве спектроскопического сигнала рассмотрим зависимость поглощения пробного поля от частоты, которая описывается выражением

$$A_1 = -\text{Im}\{\text{Tr}\{\widehat{V}_1 \widehat{\rho}_{ge}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}\}. \quad (9)$$

Блок матрицы плотности основного состояния разлагается в ряд по гармоникам разности частот:

$$\widehat{\rho}_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_n \widehat{\rho}_{gg}(n, \mathbf{p}) \exp(-i(\Delta\omega t - \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})n),$$

таким образом

$$A_1 = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\gamma/2 + i\delta_L} \left( \text{Tr}\{\widehat{V}_1 \widehat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p}) \widehat{V}_1^\dagger\} + \text{Tr}\{\widehat{V}_1 \widehat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p}) \widehat{V}_2^\dagger\} \right) \right\}. \quad (10)$$

Для нахождения сигнала РИО будем использовать теорию возмущений по обоим полям. Далее рассмотрим два случая РИО: для свободных атомов и для атомов в действующей МОЛ.

### 3. РЕЗОНАНСЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ОТДАЧЕЙ, ДЛЯ СВОБОДНЫХ АТОМОВ

Для получения сигнала РИО необходимо найти из теории возмущений  $\widehat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})$ . Поскольку сигнал, отвечающий резонансам отдачи, описывается вторым слагаемым в (10), имеем

$$A_1^{(RIR)} = \text{Re} \int \text{Tr} \left\{ \frac{\widehat{V}_2^\dagger \widehat{V}_1}{\gamma/2 + i\delta_L} \widehat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p}) \right\} d\mathbf{p}. \quad (11)$$

Из оптических уравнений Блоха (6)–(8) по теории возмущений находим (–1)-гармонику матрицы плотности основного состояния:

$$(\Gamma + i\Delta\omega - i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p}) = -\frac{\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_2}{\gamma/2 - i\delta_L} \times \\ \times \hat{\rho}_{gg}\left(0, \mathbf{p} + \frac{\hbar\Delta\mathbf{k}}{2}\right) - \hat{\rho}_{gg}\left(0, \mathbf{p} - \frac{\hbar\Delta\mathbf{k}}{2}\right) \times \\ \times \frac{\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_2}{\gamma/2 + i\delta_L}, \quad (12)$$

где  $\Gamma$  — пролетная константа релаксации. Невозмущенная матрица плотности основного состояния определяется выражением

$$\hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p}) = \frac{\hat{\Pi}_g}{2J_g + 1} f(\mathbf{p}), \quad (13)$$

где  $f(\mathbf{p})$  — функция распределения атомов по импульсам. Таким образом, подставляя (13) в (12), можем найти (–1)-гармонику матрицы плотности основного состояния и затем, подставляя ее в (11), получим

$$A_1^{(RIR)} = \frac{|\Omega_1|^2 |\Omega_2|^2}{2J_g + 1} \times \\ \times \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1) (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)\} \times \\ \times \text{Re} \left\{ \frac{1}{\gamma/2 + i\delta_L} \frac{i\delta_L}{(\gamma/2)^2 + \delta_L^2} \times \right. \\ \left. \times \int \frac{f(\mathbf{p} + \hbar\Delta\mathbf{k}/2) - f(\mathbf{p} - \hbar\Delta\mathbf{k}/2)}{\Gamma + i\Delta\omega - i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{p} \right\}. \quad (14)$$

Подставляя матричные элементы приведенного оператора дипольного момента (4) и используя формулы для свертки произведения коэффициентов Клебша – Гордана из [15], получаем

$$A_1^{(RIR)} = \frac{1}{2J_g + 1} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1) (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2) \right\} = \\ = \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \sum_{\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\}^2 \times \\ \times (\{\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1\}_{\kappa} \cdot \{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2\}_{\kappa}). \quad (15)$$

Для произвольной эллиптической поляризации пробного поля и поля накачки векторы поляризации в циклическом базисе в пределе  $\theta \ll 1$  имеют вид (на рис. 1  $z \parallel \mathbf{k}_1$ )

$$\mathbf{e}_i = \sum_{q=0, \pm 1} e_i^q \mathbf{e}_q,$$

где

$$e_i^{-1} = -\sin(\varepsilon_i - \pi/4) \exp(i\phi_i), \\ e_i^0 = 0, \\ e_i^1 = -\cos(\varepsilon_i - \pi/4) \exp(-i\phi_i). \quad (16)$$

В (16)  $\varepsilon_i$  обозначает параметр эллиптичности, а  $\phi_i$  — угол эллипса поляризации с осью  $x$ . Скалярные произведения, стоящие в правой части выражения (15), записываются в виде

$$(\{\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1\}_0 \cdot \{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2\}_0) = \frac{1}{3} (\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2) = \\ = \frac{1}{6} (1 + \cos(2\phi) \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) + \\ + \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)), \\ (\{\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1\}_1 \cdot \{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2\}_1) = \\ = \frac{1}{2} (1 - (\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1^*) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)) = \frac{1}{4} (1 - \cos(2\phi) \times \\ \times \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) + \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)), \quad (17) \\ (\{\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1\}_2 \cdot \{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2\}_2) = \\ = \frac{1}{2} (1 + (\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1^*) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) - \\ - \frac{2}{3} (\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2)) = \\ = \frac{1}{12} (7 + \cos(2\phi) \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) - \\ - 5 \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)),$$

где  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ . Таким образом, видно, что вся поляризационная зависимость определяется скалярными произведениями (17). Рассмотрим более подробно поляризационную зависимость РИО сигнала для всевозможных дипольных переходов.

Вычислим соответствующие множители в сумме (15) перед скалярными произведениями тензоров для перехода  $J \rightarrow J + 1$ , зависящие от угловых моментов основного и возбужденного состояний. Эти значения легко вычисляются и записываются в виде

$$\frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\}^2 = \frac{1}{3} \frac{(2J + 3)^2}{(2J + 1)^2}, \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\}^2 = \\ = \frac{1}{6} \frac{J(2J + 3)^2}{(J + 1)(2J + 1)^2}, \quad (18) \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \left\{ \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\}^2 = \\ = \frac{1}{30} \frac{J(2J - 1)(2J + 3)}{(J + 1)(2J + 1)^2}.$$

В качестве примера возьмем случай  $J = 3$ . Тогда зависимость от угла  $\phi$  и эллиптичностей  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  сигнала РИО выглядит следующим образом:

$$A_1^{(RIR)} = \frac{3}{784}(41 + 11 \cos(2\phi) \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) + 35 \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)). \quad (19)$$

В случае перехода  $J \rightarrow J - 1$  коэффициенты, содержащие зависимость от угловых моментов основного и возбужденного состояний равны

$$\begin{aligned} \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \frac{1}{3} \frac{(2J - 1)^2}{(2J + 1)^2}, \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \\ &= \frac{1}{6} \frac{(J + 1)(2J - 1)^2}{J(2J + 1)^2}, \quad (20) \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \\ &= \frac{1}{30} \frac{(J + 1)(2J - 1)(2J + 3)}{J(2J + 1)^2}. \end{aligned}$$

При  $J = 3$  поляризационная зависимость амплитуды РИО от  $\phi, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  записывается как

$$A_1^{(RIR)} = \frac{1}{882}(71 + 3 \cos(2\phi) \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) + 35 \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)). \quad (21)$$

И, наконец, для перехода  $J \rightarrow J$  соответствующие множители, зависящие от угловых моментов основного и возбужденного состояний, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \frac{1}{3}, \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \frac{1}{6} \frac{1}{J(J + 1)}, \quad (22) \\ \frac{(2J_e + 1)^2}{2J_g + 1} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{Bmatrix}^2 &= \\ &= \frac{1}{30} \frac{(2J - 1)(2J + 3)}{J(J + 1)}. \end{aligned}$$

В случае  $J = 3$  имеем

$$A_1^{(RIR)} = \frac{1}{144}(19 + 9 \cos(2\phi) \cos(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) + \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)). \quad (23)$$

#### 4. РЕЗОНАНСЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ОТДАЧЕЙ, ДЛЯ АТОМОВ В ДЕЙСТВУЮЩЕЙ МОЛ

По теории возмущений из уравнения Блоха находим  $(-1)$ -гармонику матрицы плотности основного состояния:

$$\begin{aligned} (\Gamma + i\Delta\omega - i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p}) + L\{\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})\} &= \\ &= -\frac{\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_2}{\gamma/2 - i\delta_L} \hat{\rho}_{gg}\left(0, \mathbf{p} + \frac{\hbar\Delta\mathbf{k}}{2}\right) - \\ &\quad - \hat{\rho}_{gg}\left(0, \mathbf{p} - \frac{\hbar\Delta\mathbf{k}}{2}\right) \frac{\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_2}{\gamma/2 + i\delta_L}, \quad (24) \end{aligned}$$

где оператор  $L\{\hat{\rho}\}$  записывается как

$$\begin{aligned} L\{\hat{\rho}\} &= \frac{\hat{V}_0^\dagger \hat{V}_0}{\gamma/2 - i\delta_0} \hat{\rho} + \hat{\rho} \frac{\hat{V}_0^\dagger \hat{V}_0}{\gamma/2 + i\delta_0} - \\ &\quad - \beta \frac{\gamma}{(\gamma/2)^2 + \delta_0^2} \sum_q \hat{D}_q^\dagger \hat{V}_0 \hat{\rho} \hat{V}_0^\dagger \hat{D}_q. \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_0 = \omega_0 - \omega_{eg}$  — отстройка поля МОЛ от резонанса и оператор  $\hat{V}_0$  соответствует дипольному взаимодействию поля ловушки с атомами в ней. Мы полагаем, что основная часть атомов сконцентрирована в центре ловушки, где магнитное поле близко к нулю. Невозмущенная матрица плотности  $\hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p})$  определяется из уравнения

$$\Gamma \left( \hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p}) - \frac{\hat{\Pi}_g}{2J_g + 1} f(\mathbf{p}) \right) = -L\{\hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p})\}. \quad (26)$$

Как правило для атомов в МОЛ справедливо квазиклассическое приближение  $\hbar k / \Delta p \ll 1$ , где  $\Delta p$  — характерная ширина распределения  $f(\mathbf{p})$ . В этом случае матрица  $\hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p})$  факторизуется и может быть записана в виде  $\hat{\rho}_{gg}(0, \mathbf{p}) = \hat{\sigma}^{(0)} f(\mathbf{p})$ , где распределение  $\hat{\sigma}^{(0)}$  по внутренним степеням свободы определяется полями ловушки, причем  $\text{Tr}\{\hat{\sigma}^{(0)}\} = 1$ . Поскольку в случае холодных атомов пролетная константа релаксации много меньше скорости оптической накачки,

$$\Gamma \ll \gamma \frac{\Omega_0^2}{(\gamma/2)^2 + \delta_0^2},$$

мы можем пренебречь ей в уравнении (26), которое тогда запишется в виде

$$L\{\hat{\sigma}^{(0)}\} = 0. \quad (27)$$

Аналогичные соображения применимы и к  $\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})$ , поэтому решение уравнения (24) будем искать в виде

$$\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p}) = \hat{\sigma}^{(0)} \text{Tr}\{\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})\}.$$

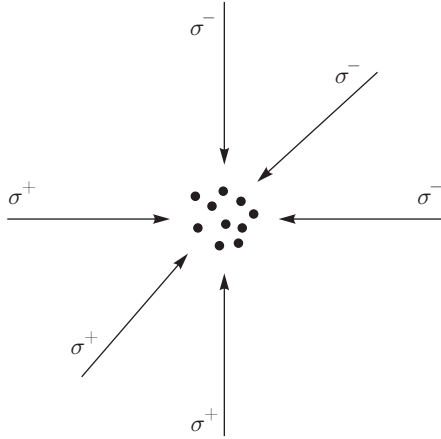


Рис. 2. Конфигурация охлаждающих пучков в магнитной ловушке

После подстановки  $\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})$  в уравнение (24) действуем оператором следа на обе части уравнения и, используя свойство коэффициентов Клебша – Гордана  $\sum_q \hat{D}_q \hat{D}_q^\dagger = \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  – единичная матрица размером  $(2F_e + 1) \times (2F_e + 1)$ , и соотношение (27) для  $\hat{\sigma}^{(0)}$ , получаем выражение вида

$$\begin{aligned} (\Gamma + i\Delta\omega - i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \text{Tr}\{\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})\} = \\ = \text{Tr}\{\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_2 \hat{\sigma}^{(0)}\} \left( -\frac{f(\mathbf{p} + \hbar\Delta\mathbf{k}/2)}{\gamma/2 - i\delta_L} - \frac{f(\mathbf{p} - \hbar\Delta\mathbf{k}/2)}{\gamma/2 + i\delta_L} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, подставляем  $\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})$  в (11), выражая  $\text{Tr}\{\hat{\rho}_{gg}(-1, \mathbf{p})\}$  из уравнения (28), и находим, что

$$\begin{aligned} A_1^{(RI R)} = |\Omega_1|^2 |\Omega_2|^2 \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1) \hat{\sigma}^{(0)}\} \times \\ \times \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2) \hat{\sigma}^{(0)}\} \times \\ \times \text{Re} \left\{ \frac{1}{\gamma/2 + i\delta_L} \frac{i\delta_L}{(\gamma/2)^2 + \delta_L^2} \times \right. \\ \left. \times \int \frac{f(\mathbf{p} + \hbar\Delta\mathbf{k}/2) - f(\mathbf{p} - \hbar\Delta\mathbf{k}/2)}{\Gamma + i\Delta\omega - i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{p} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Зависимость от поляризаций полей содержится в множителе

$$\text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1) \hat{\sigma}^{(0)}\} \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2) \hat{\sigma}^{(0)}\},$$

но сюда также входит  $\hat{\sigma}^{(0)}$ , зависящее от поля ловушки. Поле ловушки формируется за счет трех пар встречных лазерных пучков с поляризациями  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  с различными фазами (рис. 2) и в общем случае имеет эллиптическую поляризацию, которая

меняется в области локализации атомов и описывается углами ориентации эллипса в пространстве  $\alpha, \beta, \gamma$  и параметром эллиптичности  $\varepsilon$ . Предполагая, что все ориентации и параметры эллиптичности поля ловушки в области локализации атомов равновероятны, необходимо провести усреднение по ним. Поскольку неприводимые тензоры  $\sigma_{\kappa, q}^{(0)}$  при повороте системы координат преобразуются с помощью  $D$ -функций Вигнера  $D_{q, q'}^\kappa(\alpha, \beta, \gamma)$  [15], легко провести усреднение по углам ориентации эллипса поляризации  $\alpha, \beta, \gamma$ , используя соотношение ортогональности  $D$ -функций:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma (D_{t, t'}^\theta)^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) \times \\ \times D_{q, q'}^\kappa(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2\kappa + 1} \delta_{\kappa\theta} \delta_{qt} \delta_{q't'}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} A_1^{(RI R)} = \left\langle \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1) \hat{\sigma}^{(0)}\} \times \right. \\ \left. \times \text{Tr}\{(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_1)^\dagger (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2) \hat{\sigma}^{(0)}\} \right\rangle_{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon} = (2J_e + 1)^2 \times \\ \times \sum_{\kappa, q} \sum_{\kappa', q'} \left\{ \begin{matrix} \kappa & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa' & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\} \times \\ \times \{ \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1 \}_\kappa^q \{ \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2 \}_{\kappa', q'} \left\langle (-1)^{q'} \sigma_{\kappa, q}^{(0)} \sigma_{\kappa', -q'}^{(0)} \right\rangle_{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon} = \\ = (2J_e + 1)^2 \sum_{\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa & 1 & 1 \\ J_e & J_g & J_g \end{matrix} \right\}^2 \times \\ \times \{ \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_1 \}_\kappa \cdot \{ \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2 \}_\kappa \frac{\left\langle \left( \sigma_\kappa^{(0)} \cdot \sigma_\kappa^{(0)} \right) \right\rangle_\varepsilon}{2\kappa + 1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Проанализируем усреднение по  $\varepsilon$  для различных переходов. В случае  $J \rightarrow J + 1$  имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\left\langle \left( \sigma_\kappa^{(0)} \cdot \sigma_\kappa^{(0)} \right) \right\rangle_\varepsilon}{2\kappa + 1} \right|_{\kappa=0} = \frac{1}{2J_g + 1}, \\ \left. \frac{\left\langle \left( \sigma_\kappa^{(0)} \cdot \sigma_\kappa^{(0)} \right) \right\rangle_\varepsilon}{2\kappa + 1} \right|_{\kappa=1} < \frac{J_g}{(J_g + 1)(2J_g + 1)}, \\ \left. \frac{\left\langle \left( \sigma_\kappa^{(0)} \cdot \sigma_\kappa^{(0)} \right) \right\rangle_\varepsilon}{2\kappa + 1} \right|_{\kappa=2} < \\ < \frac{J_g(2J_g - 1)}{(J_g + 1)(2J_g + 1)(2J_g + 3)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражения, приведенные выше, получаются для случая слабого насыщения при использовании результатов статьи [16]. Оценки сверху достигаются



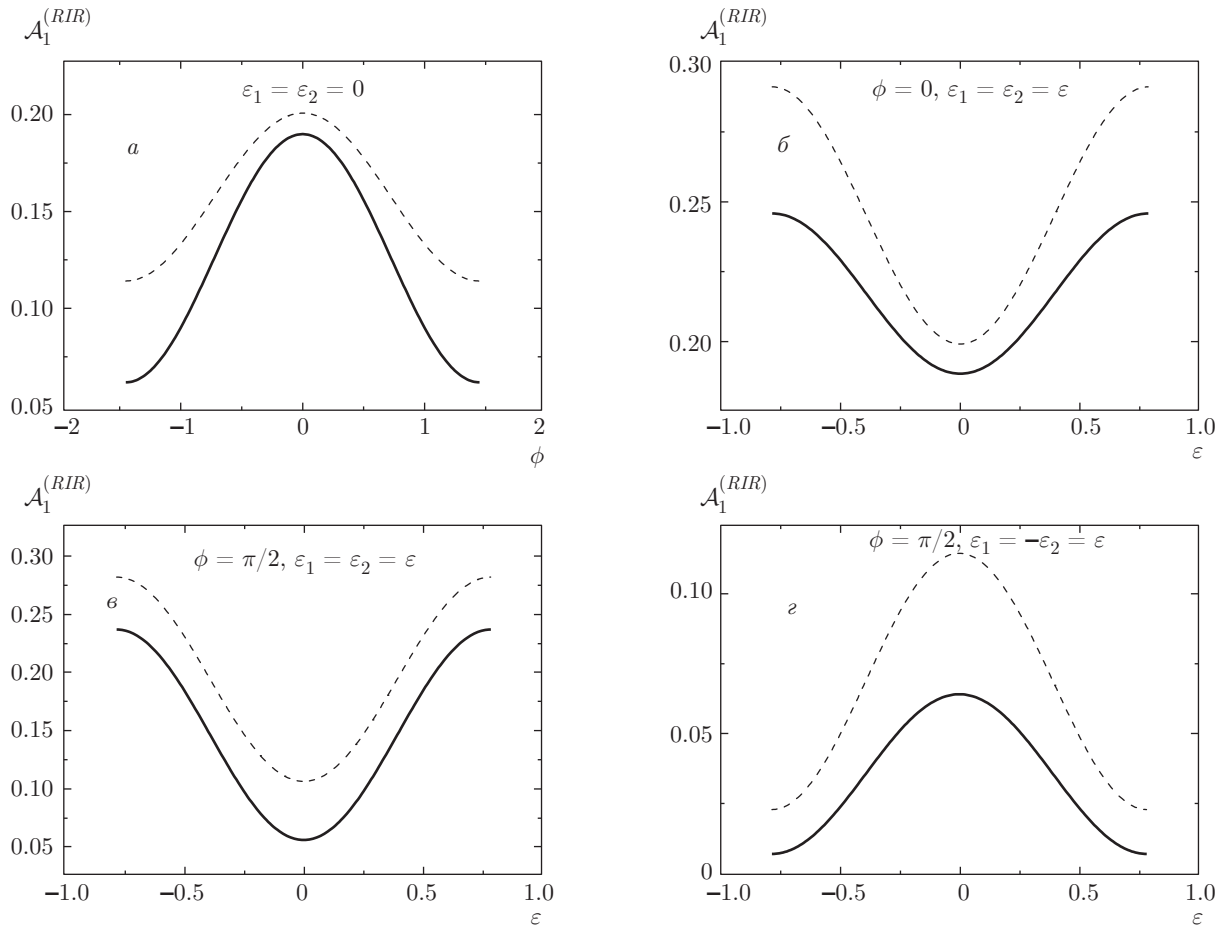


Рис. 3. Поляризационные зависимости сигнала РИО для перехода  $3 \rightarrow 4$  для свободных атомов (штриховые кривые), для атомов в действующей МОЛ (сплошные кривые)

путем нахождения максимума скалярного произведения мультипольных моментов. В случае перехода  $J \rightarrow J + 1$  максимум достигается при  $\varepsilon = \pm\pi/4$ . В точности такие же соотношения получаются для перехода  $J \rightarrow J$ , кроме случая  $J = 1$  для скалярного произведения мультипольных моментов второго ранга, поскольку в этом случае максимум достигается при  $\varepsilon = 0$ , а не при  $\varepsilon = \pm\pi/4$ , как для остальных  $J$ . В случае перехода  $J \rightarrow J - 1$  имеется два темных состояния и выражения (31) получаются в случае, когда отсутствует взаимная когерентность между темными состояниями, причем максимум скалярных произведений достигается при  $\varepsilon = 0$  для  $\kappa = 2$  и при  $\varepsilon = \pm\pi/4$  для  $\kappa = 1$ .

Рассмотрим различные переходы в случае  $J = 3$ . Для перехода  $3 \rightarrow 4$  имеем в случае слабого насыщения  $S \ll 1$  приближенные значения выражений, усредненных по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\varepsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=0} &= \frac{1}{7}, \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\varepsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=1} &\approx 0.084, \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\varepsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=2} &\approx 0.044. \end{aligned} \tag{32}$$

Подставляя (18) и (32) в (30), получаем поляризационную зависимость сигнала РИО. На рис. 3 она приведена в сравнении с аналогичной зависимостью для свободных атомов.

Для перехода  $3 \rightarrow 3$  точные значения усредненных скалярных произведений равны

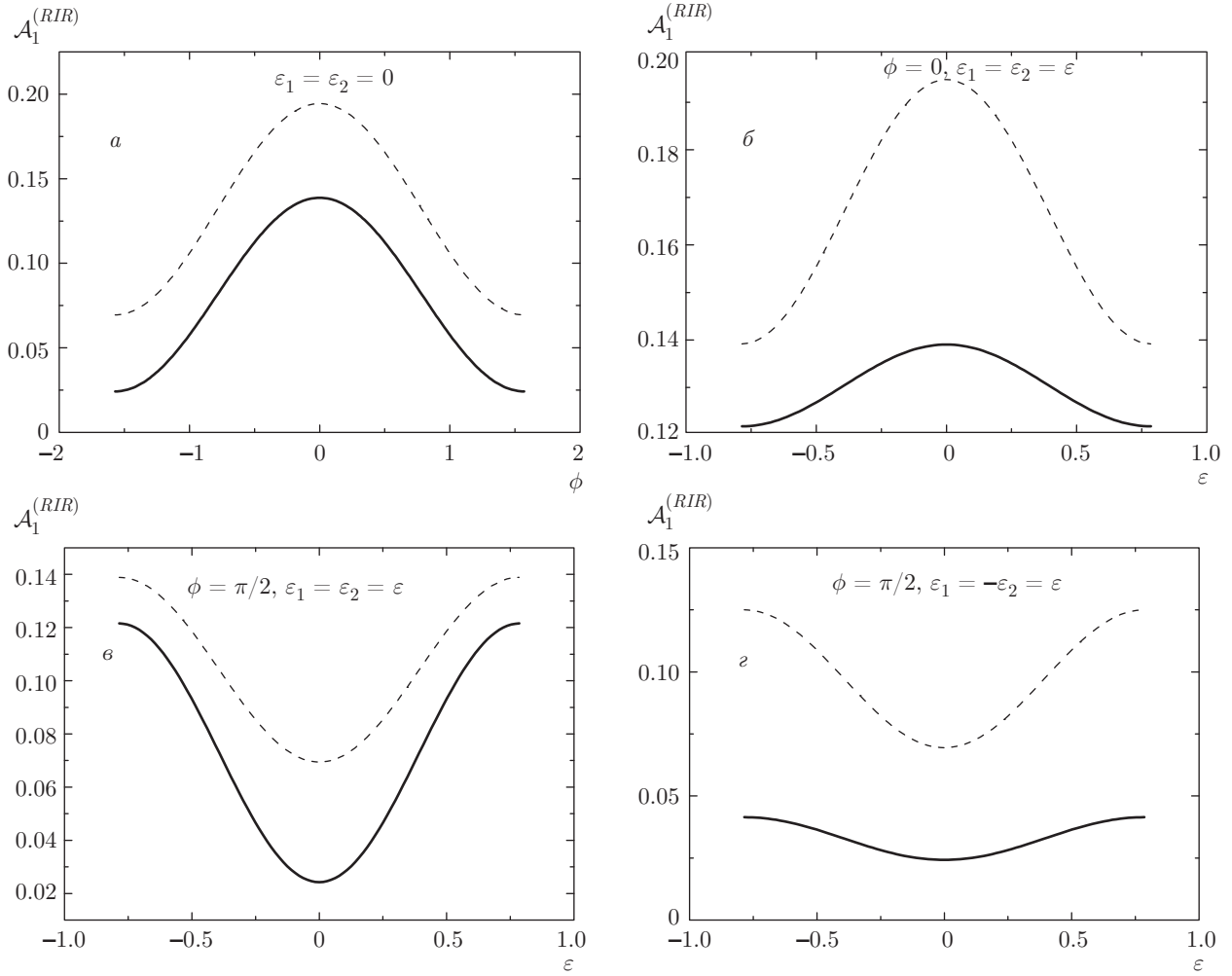


Рис. 4. Поляризационные зависимости сигнала РИО для перехода  $3 \rightarrow 3$  для свободных атомов (штриховые кривые), для атомов в действующей МОЛ (сплошные кривые)

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=0} &= \frac{1}{7}, \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=1} &= \frac{43 - 2\sqrt{10}}{504}, \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=2} &= \frac{845 - 154\sqrt{10}}{7560}. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогичные зависимости для перехода  $3 \rightarrow 3$  представлены на рис. 4.

Для перехода  $3 \rightarrow 2$  точные значения усредненных скалярных произведений в случае отсутствия взаимной когерентности между темными состояниями имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=0} &= \frac{1}{7}, \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=1} &= \frac{1}{504} \times \\ &\times \left( 6\sqrt{3} + \xi \left( -36 + 24\sqrt{3} \right) + \xi^2 \left( 53 - 30\sqrt{3} \right) \right), \\ \frac{\langle (\sigma_{\kappa}^{(0)} \cdot \sigma_{\kappa}^{(0)}) \rangle_{\epsilon}}{2\kappa + 1} \Big|_{\kappa=2} &= \\ &= \frac{5}{84} \left( 4 - 2\sqrt{3} + \xi^2 \left( 2\sqrt{3} - \frac{59}{18} \right) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ) соответствует населенности темного состояния  $|\Psi_+^{(NC)}\rangle$  [17] и соответствующая стационарная матрица  $\hat{\sigma}_0$  записывается как



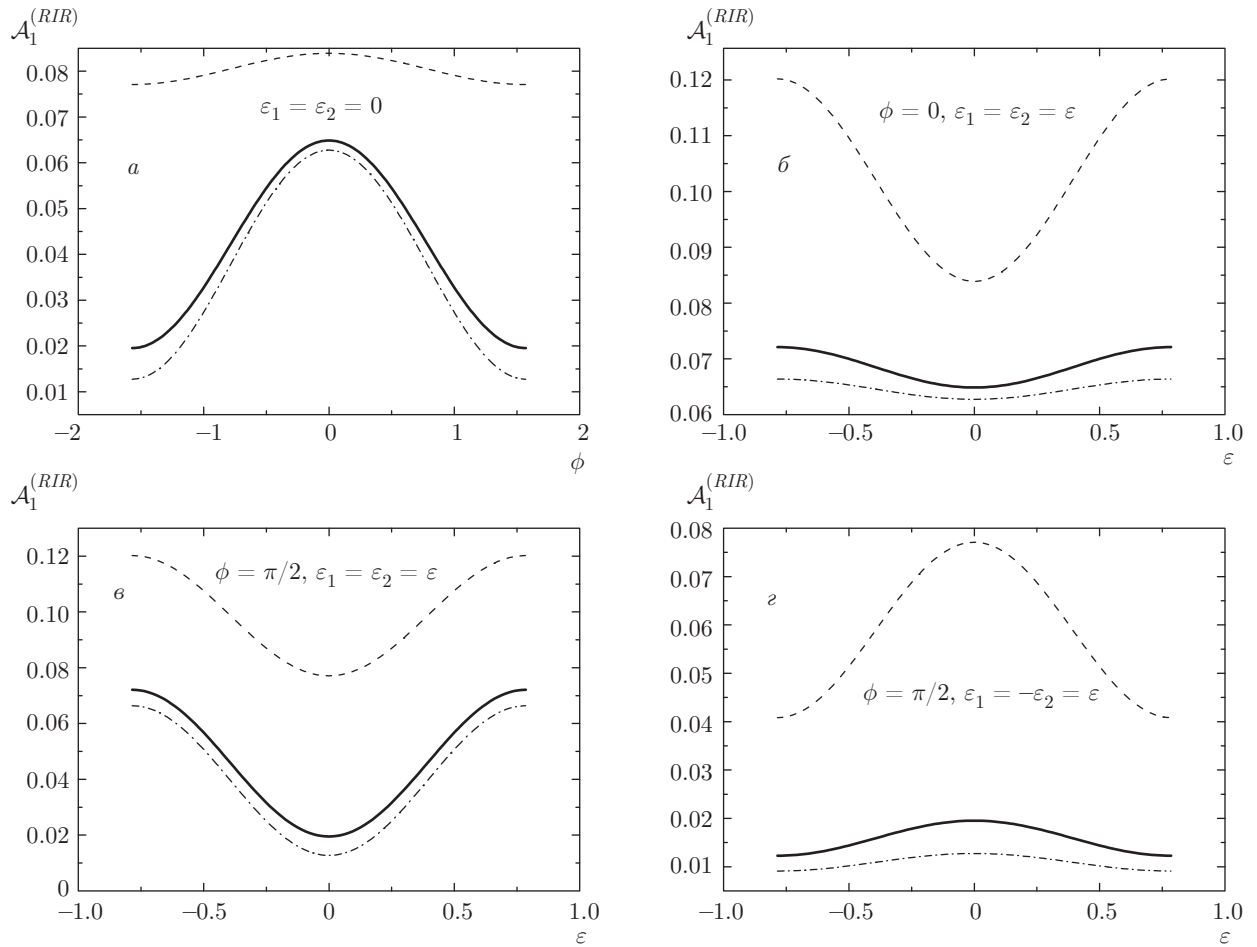


Рис. 5. Поляризационные зависимости сигнала РИО для перехода  $3 \rightarrow 2$  для свободных атомов (штриховые кривые), для атомов в действующей МОЛ:  $\xi = 1$  (сплошные кривые),  $\xi = 0$  (штрихпунктирные кривые)

$$\hat{\sigma}_0 = \xi |\Psi_+^{(NC)}\rangle \langle \Psi_+^{(NC)}| + (1 - \xi) |\Psi_-^{(NC)}\rangle \langle \Psi_-^{(NC)}|.$$

Максимум скалярных произведений (34) достигается при  $\xi = 1$ , т.е. когда все атомы находятся в темном состоянии  $|\Psi_+^{(NC)}\rangle$ , минимум — в случае  $\xi = 0$ , т.е. суперпозиция темных состояний вырождается в темное состояние  $|\Psi_-^{(NC)}\rangle$ . Поляризационные зависимости для перехода  $3 \rightarrow 2$  для свободных атомов и атомов в действующей МОЛ представлены на рис. 5.

Из рис. 3–5 видно, что поляризационная зависимость амплитуды РИО в действующей МОЛ во всех случаях меньше таковой для свободных охлажденных атомов для всех дипольных переходов. Это объясняется тем, что в действующей МОЛ вклады, связанные с ориентацией и выстраиванием, подавлены из-за усреднения по параметрам локального вектора поляризации поля ловушки. В случае переходов  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 4$  и  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 2$  макси-

мум достигается при одинаковых циркулярных поляризациях полей ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm\pi/4$ ), а минимум — при противоположных циркулярных поляризациях ( $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \pm\pi/4$ ). Для случая  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 3$  максимум достигается при коллинеарных линейных поляризациях обоих полей ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \phi = 0$ ), а минимум — при ортогональных линейных поляризациях ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0, \phi = \pm\pi/2$ ).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для любого замкнутого дипольного перехода  $J \rightarrow J'$  получены явные аналитические выражения для поляризационной зависимости амплитуды резонансов, индуцированных отдачей, как в случае свободных атомов, так и для атомов в МОЛ. Оказалось, что поляризационная зависимость для обоих случаев имеет схожий характер для всех

дипольных переходов, но при этом амплитуда резонансов отдачи в действующей МОЛ может быть в несколько раз меньше, чем для свободных атомов, в зависимости от взаимной ориентации эллипсов поляризации и эллиптичностей обоих полей, участвующих в формировании резонансов. Были проанализированы амплитуды резонансов РИО для всевозможных поляризационных конфигураций и найдены оптимальные параметры, когда амплитуда достигает максимальных значений. Из поляризационных измерений можно извлечь информацию о средней величине мультипольных моментов атома в МОЛ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-12-00054).

### ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer (1999).
2. E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).
3. J. Guo, P. R. Berman, B. Dubetsky, and G. Grinberg, *Phys. Rev. A* **46**, 1426 (1992).
4. J. Guo and P. R. Berman, *Phys. Rev. A* **47**, 4128 (1993).
5. G. Grynberg, J.-Y. Courtois, B. Lounis, and P. Verkerk, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3017 (1994).
6. P. Verkerk, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3861 (1992).
7. M. Brzozowska, T. M. Brzozowski, J. Zachorowski, and W. Gawlik, *Phys. Rev. A* **72**, 061401 (2005).
8. M. Brzozowska, T. M. Brzozowski, J. Zachorowski, and W. Gawlik, *Phys. Rev. A* **73**, 063414 (2006).
9. M. C. Fischer, A. M. Dudarev, B. Gutierrez-Medina, M. G. Raizen, *J. Opt. Phys. B* **3**, 279 (2001).
10. П. Л. Чаповский, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 84 (2007).
11. Л. В. Ильичев, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 193 (2007).
12. Y.-C. Chen, Y.-W. Chen, J.-J. Su, J.-Y. Huang, and I. A. Yu, *Phys. Rev. A* **63**, 043808 (2001).
13. T. M. Brzozowski, M. Brzozowska, J. Zachorowski, M. Zawada, and W. Gawlik, *Phys. Rev. A* **71**, 013401 (2005).
14. B. Dubetsky and P. R. Berman, *Phys. Rev. A* **52**, R2519 (1995).
15. Д. А. Варшолович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
16. A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, D. B. Lazebny, and V. I. Yudin, *Laser Phys.* **24**, 074003 (2014).
17. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, V. I. Yudin, and G. Nienhuis, *Phys. Rev. A* **69**, 033410 (2004).