

# ДИНАМИКА РАЗЛЕТА ДВУХКОМПОНЕНТНОГО КВАЗИОДНОМЕРНОГО БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА: ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА, АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

*С. К. Иванов<sup>a,b\*</sup>, А. М. Камчатнов<sup>a\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт спектроскопии Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
117303, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 сентября 2016 г.

Исследуется динамика разлета бозе-эйнштейновского конденсата, состоящего из двух компонент и изначально удерживаемого в квазиодномерной ловушке. Проведена классификация возможных начальных состояний двухкомпонентного конденсата с учетом неоднородности распределений компонент и построена соответствующая фазовая диаграмма на плоскости констант нелинейного взаимодействия. Получены дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию конденсата, в предположении, что плотность и скорость конденсата зависят от пространственной координаты соответственно квадратично и линейно, что воспроизводит начальное равновесное распределение конденсата в ловушке в приближении Томаса–Ферми. Получены автомодельные решения этих дифференциальных уравнений для ряда важных частных случаев и выписаны асимптотические формулы, описывающие движение конденсата при больших временах, когда плотность конденсата становится настолько малой, что взаимодействием между атомами можно пренебречь. Рассмотрена задача о динамике несмешивающихся компонент с образованием дисперсионных ударных волн. Проведено сравнение численных решений уравнений Гросса–Питаевского с приближенными аналитическими решениями и численно изучены ситуации, когда используемый аналитический метод не допускает точных решений.

DOI: 10.7868/S0044451017040034

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика бозе-эйнштейновского конденсата является предметом активных современных исследований. К настоящему времени выполнено множество экспериментальных и теоретических работ по изучению солитонов, вихрей, дисперсионных ударных волн и других структур, которые определяют характерные черты поведения конденсата в различных экспериментальных условиях (см., например, [1]). Одной из основных задач, относящихся к этому направлению исследований, является изучение динамики разлета конденсата после выключения ловушки, удерживающей этот конденсат, поскольку во многих экспериментах результаты фиксируются по-

сле разлета конденсата до состояния, когда размеры облака достаточно велики для проведения измерений (см., например, эксперименты [2, 3]). Теоретически эта проблема была впервые исследована в работе [4] в гидродинамическом приближении, когда уравнения допускают простое автомодельное решение. Этот подход был затем развит в статьях [5–8] для конденсата, состоящего из одной компоненты, и было найдено хорошее согласие между теорией и экспериментом. Однако ситуация существенно меняется для случая конденсата, состоящего из нескольких компонент, когда, например, конденсируются атомы двух разных видов (см. [9, 10]), двух разных изотопов одного вида атомов (см. [11]) или одного вида атомов в двух разных квантовых состояниях, таких что разность энергий уровней этих состояний много меньше температуры конденсата (см. [12–14]). В частности, в двухкомпонентных конденсатах необходимо различать случаи относитель-

\* E-mail: ivanoff.iks@gmail.com

\*\* E-mail: kamchatnov@gmail.com

но сильного взаимного отталкивания компонент, когда они не смешиваются, и относительно слабого взаимного отталкивания, когда они смешиваются, т. е. занимают один и тот же объем. Это различие фазовых состояний конденсата существенным образом влияет на динамику конденсата, в том числе и на динамику его разлета. До сих пор эта динамика была исследована недостаточно полно. В статье [15] были получены некоторые частные результаты, иллюстрирующие различие между случаями разлета однокомпонентного и двухкомпонентного конденсатов, однако в этой статье автор использовал преимущественно численные методы. В настоящей работе мы покажем, что имеются интересные ситуации, когда можно провести полное аналитическое исследование в рамках гидродинамического приближения, использованного ранее в однокомпонентном случае в работах [4–8]. Сравнение с численными расчетами показывает, что хотя на промежуточных стадиях процесса разлета дисперсионные эффекты могут играть некоторую роль, тем не менее на асимптотической стадии, наиболее интересной для эксперимента, дисперсионные эффекты становятся чрезвычайно малыми и ими можно пренебречь. Существенную роль в таких благоприятных для аналитической теории случаях играет предположение об автомодельном характере эволюции профилей плотностей и скоростей компонент, что обобщает подход [4]. Однако мы покажем, что это предположение не всегда адекватно описывает динамику, если начальное состояние конденсатов перед их освобождением из ловушки находится вблизи границы фазового перехода между смешиванием и несмешиванием компонент, и в этом случае задача требует численного решения. Тем не менее даже в случае несмешивающихся компонент можно выделить характерный случай, когда одну из компонент можно рассматривать как поршень,двигающий другую компоненту. Для такой идеализированной ситуации разлет конденсата сопровождается образованием дисперсионной ударной волны в одной компоненте и волны разрежения в другой компоненте. Развита для этого случая теория хорошо согласуется с численными результатами. Результаты работы позволяют предсказать характерные черты явления в зависимости от параметров конденсата.

## 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ГРОССА – ПИТАЕВСКОГО

Динамика бозе-эйнштейновского конденсата, находящегося под действием потенциала  $U$ , с высокой

точностью описывается уравнениями Гросса – Питавевского, которые в двухкомпонентном случае, которым мы здесь будем заниматься, могут быть записаны в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta \psi_i + g_{ii} |\psi_i|^2 \psi_i + g_{ij} |\psi_j|^2 \psi_i + U_i \psi_i, \quad (1)$$

где  $i, j = 1, 2$  ( $i \neq j$ ) — номер соответствующей компоненты конденсата,  $(\psi_1, \psi_2)$  — волновые функции компонент,  $g_{ii}$  — константы взаимодействия между атомами компоненты  $i$ , и  $g_{ij}$  — константы взаимодействия между атомами разных сортов. Обычно  $g_{12} = g_{21}$ , что и будем предполагать в дальнейшем. Константы взаимодействия могут быть выражены через длины рассеяния  $a_{ij}$  атомов друг на друге следующими формулами:

$$g_{ii} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{ii}}{m_i}, \quad g_{ij} = \frac{2\pi\hbar^2 a_{ij}}{m_{ij}}, \quad (2)$$

где  $m_{ij}^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$  — приведенная масса рассеивающихся друг на друге атомов. Каждая из волновых функций нормирована на число частиц данного сорта в конденсате:

$$\int |\psi_i|^2 dV = N_i, \quad (3)$$

так что  $|\psi_i|^2 = \rho_i$  является плотностью числа атомов в  $i$ -й компоненте. Градиент фазы  $\varphi_i$  волновой функции  $\psi_i = \sqrt{\rho_i} \exp(i\varphi_i)$  связан со скоростью течения  $\mathbf{u}_i$   $i$ -й компоненты соотношением (см. [1])

$$\mathbf{u}_i = \frac{\hbar}{m_i} \nabla \varphi_i. \quad (4)$$

Компоненты конденсата смешиваются, т. е. их однородное распределение по пространству (в отсутствие внешнего потенциала) устойчиво, если константы взаимодействия удовлетворяют условию (см. [16])

$$g_{12}^2 < g_{11}g_{22}. \quad (5)$$

Если же знак этого неравенства противоположный, то конденсат неустойчив относительно разделения на области, содержащие компоненты лишь одного из сортов конденсата. Однако это условие справедливо лишь для однородного распределения конденсата. Для случая же конденсата, содержащегося в ловушке, условие смешивания требует модификации, на чем мы остановимся подробнее в следующем разделе статьи.

Если фаза  $\varphi_i$  является однозначной функцией координат, что означает физически отсутствие вихрей в конденсате, то волновые функции двухкомпонентного конденсата можно представить в виде

$$\psi_i = \sqrt{\rho_i(\mathbf{r}, t)} \exp \left( i \frac{m_i}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - i \frac{\mu_i}{\hbar} t \right), \quad (6)$$

где  $\mu_i$  — химический потенциал  $i$ -й компоненты (см. [1]). Подстановка (6) в (1), разделение вещественной и мнимой частей и дифференцирование одного из уравнений по  $\mathbf{r}$  приводят уравнения Гросса – Питаевского к так называемой «гидродинамической форме»:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}_i + \frac{g_{ii}}{m_i} \nabla \rho_i + \frac{g_{ij}}{m_i} \nabla \rho_j + \\ + \frac{\nabla U_i}{m_i} + \frac{\hbar^2}{4m_i^2} \nabla \left( \frac{(\nabla \rho_i)^2}{2\rho_i^2} - \frac{\Delta \rho_i}{\rho_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (7) отвечают за сохранение числа частиц в соответствующей компоненте конденсата. Если бы в уравнениях (8) не было последнего члена, пропорционального  $\hbar^2$ , то эти уравнения соответствовали бы обычной эйлеровой гидродинамике с градиентом давления  $\nabla p_i = (g_{ii} \nabla \rho_i + g_{ij} \nabla \rho_j)/m_i$ . Но последний член уравнения (8), обусловленный дисперсией квантовых частиц, вносит новые свойства, если характеристики конденсата изменяются достаточно быстро. Сделаем оценку для расстояния  $\xi$ , на котором давление и дисперсия вносят одинаковый вклад. Считаем, что массы атомов и плотности числа частиц в компонентах имеют один порядок величины ( $m_i \sim m_j$ ,  $\rho_i \sim \rho_j$ ) для обеих компонент, так что под величинами  $m$ ,  $\rho$ ,  $g$  можно понимать соответствующий параметр любой компоненты. Тогда давление оценим как  $p \sim g\rho^2/2m$  и для  $\xi$  получим  $g\rho \sim \hbar^2/(m\xi^2)$ , откуда  $\xi \sim \hbar/\sqrt{g\rho m}$ . Таким образом, конденсат обладает внутренним характерным размером, который называется корреляционной длиной и может быть определен как

$$\xi \sim \frac{\hbar}{\sqrt{g\rho m}}. \quad (9)$$

Если характеристики слабо меняются на расстояниях порядка  $\xi$ , то последним членом в уравнениях (8) можно пренебречь, и тогда система примет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}_i + \frac{g_{ii}}{m_i} \nabla \rho_i + \frac{g_{ij}}{m_i} \nabla \rho_j + \frac{\nabla U_i}{m_i} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (11) соответствуют эйлеровой гидродинамике, и такая форма гидродинамических уравнений описывает достаточно плавные решения, в частности, распределения плотности компонент в ловушке перед ее выключением. Однако если в процессе эволюции происходит генерация солитонов, которые имеют размер порядка  $\xi$ , или формирование дисперсионных ударных волн, то необходимо учитывать и дисперсионные эффекты. Подобного рода случай будет рассмотрен в разд. 5.

Для описания характерных черт явления останемся на примере ловушек, в которых движение частиц в двух направлениях «заморожено» и сведено к нулевым колебаниям. В эксперименте такой квазиодномерный конденсат приобретает сильно вытянутую сигарообразную форму. Потенциал такой ловушки для  $i$ -й компоненты может быть записан в виде

$$U_i = \frac{1}{2} m_i [\omega_x^2 x^2 + \omega_\perp^2 (y^2 + z^2)], \quad (12)$$

где  $\omega_y = \omega_z \equiv \omega_\perp \gg \omega_x$ . Благодаря последнему неравенству, движение конденсата в поперечном направлении заморожено, т. е. поперечная волновая функция сводится к основному состоянию в поперечном потенциале с частотой  $\omega_\perp$ . Тогда уравнение Гросса – Питаевского может быть усреднено по поперечному направлению, и динамика конденсата сводится к движению в продольном направлении  $x$  (см. детали, например, в [8]). Вводя эффективные нелинейные константы продольной динамики конденсата (но сохраняя для простоты для них прежние обозначения), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + g_{ii} |\psi_i|^2 \psi_i + g_{ij} |\psi_j|^2 \psi_i + \\ + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 x^2 \psi_i, \end{aligned} \quad (13)$$

а уравнения (10) и (11) перейдут в следующие:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u_i) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{g_{ii}}{m_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \frac{g_{ij}}{m_i} \frac{\partial \rho_j}{\partial x} + \omega_i^2 x = 0. \quad (15)$$

Установив основные уравнения динамики бинарного конденсата, обратимся сначала к задаче классификации возможных начальных распределений плотности компонент перед их освобождением из ловушки.

### 3. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ДЛЯ БИНАРНОГО КОНДЕНСАТА, УДЕРЖИВАЕМОГО В КВАЗИОДНОМЕРНОЙ ЛОВУШКЕ

Численные расчеты (см., например, [17, 18]) и экспериментальные работы (см., например, [19]) показывают, что в зависимости от соотношения между константами взаимодействия, массами частиц, количествами частиц в каждой компоненте и частотами ловушек могут реализовываться различные профили числа частиц. Очевидно, что конденсат, загруженный в ловушку, распределится по пространству таким образом, чтобы минимизировать полную энергию

$$H = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m_1} |\nabla\psi_1|^2 + \frac{\hbar^2}{2m_2} |\nabla\psi_2|^2 + \frac{1}{2}(g_{11}|\psi_1|^4 + 2g_{12}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + g_{22}|\psi_2|^4) + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2 x^2 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2 x^2 |\psi_2|^2 \right] dx. \quad (16)$$

В зависимости от величин нелинейных постоянных и частот ловушек, эти распределения могут иметь разную форму, и в этом разделе мы проведем классификацию возможных форм в приближении Томаса–Ферми, когда дисперсионными свойствами конденсата можно пренебречь:

$$H = \frac{1}{2} \int (g_{11}\rho_1^2 + 2g_{12}\rho_1\rho_2 + g_{22}\rho_2^2 + m_1\omega_1^2 x^2 \rho_1 + m_2\omega_2^2 x^2 \rho_2) dx. \quad (17)$$

Это приближение позволит нам установить на качественном уровне основные типы возможных распределений. Для применимости приближения Томаса–Ферми необходимо, чтобы размер каждого конденсатного облака был много больше корреляционной длины  $\xi$ , что мы и будем предполагать ниже.

Прежде всего заметим, что в распределении могут быть области пространства, где присутствуют обе компоненты (области «перекрывтия»), и области, где присутствует лишь одна из компонент («синглетная» область). Поэтому выпишем стационарное решение уравнений (14) и (15), соответствующее приближению Томаса–Ферми, для этих двух возможных случаев:

$$\rho_i^o(x) = \frac{2(g_{jj}\mu_i - g_{ij}\mu_j) - (g_{jj}m_i\omega_i^2 - g_{ij}m_j\omega_j^2)x^2}{2(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2)}, \quad (18)$$

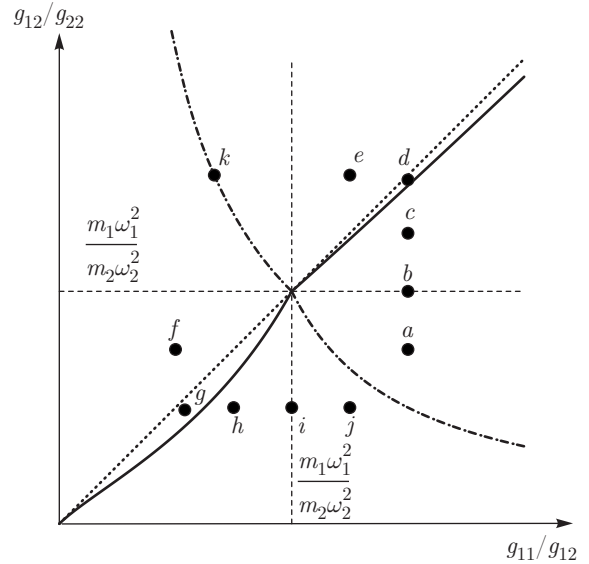


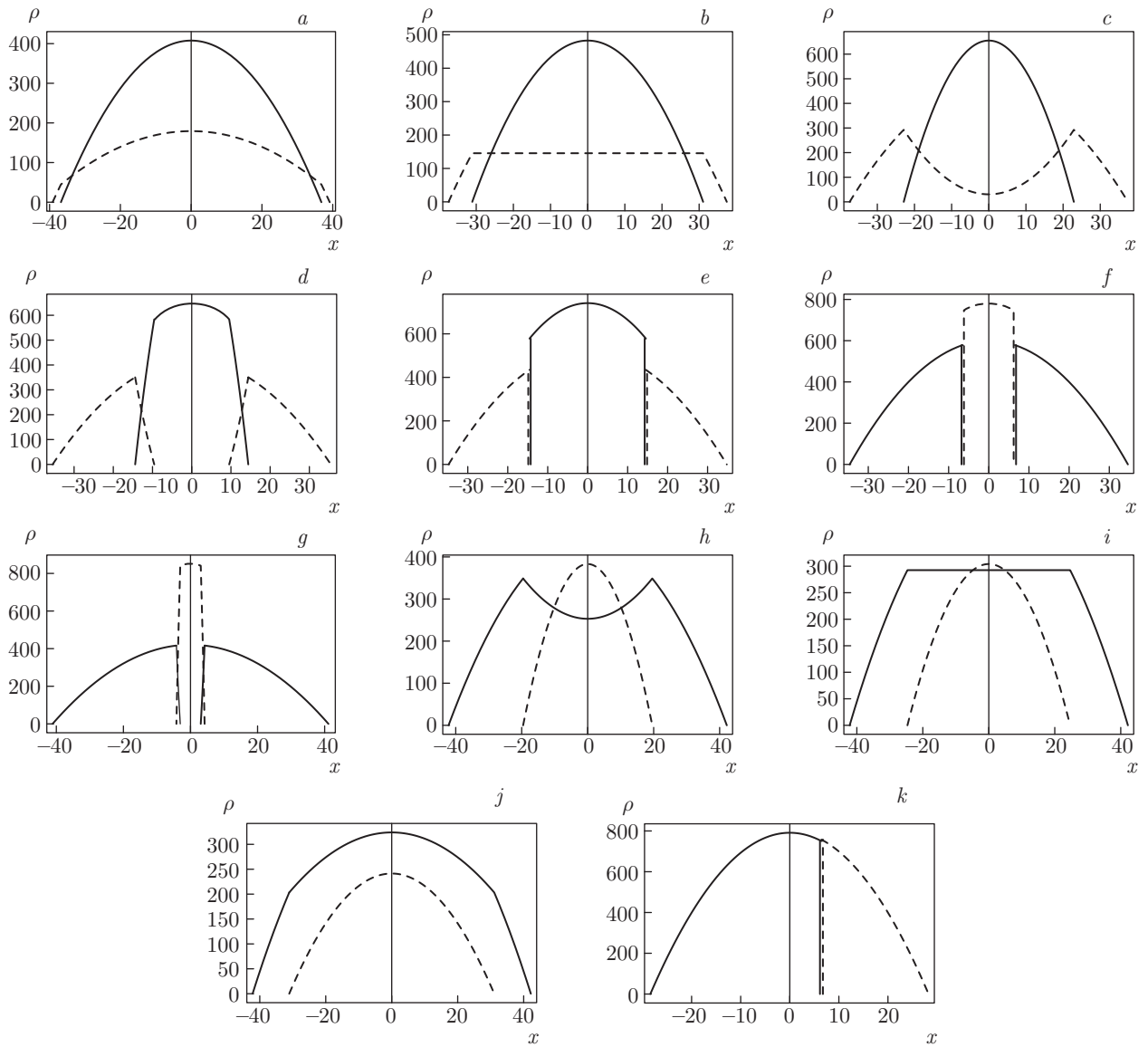
Рис. 1. Фазовая диаграмма стационарного распределения плотности числа частиц в приближении Томаса–Ферми. Точки на диаграмме обозначены буквами, соответствующими наименованиям графиков на рис. 2. Диаграмма построена для конденсатов с одинаковыми массами атомов и частотами ловушек. Число частиц во второй компоненте в два раза больше, чем в первой. Такие же параметры взяты и для графиков на рис. 2

$$\rho_i^s(x) = \frac{2\mu_i - m_i\omega_i^2 x^2}{2g_{ii}}, \quad (19)$$

где  $\rho_i(x) = |\psi_i(x, 0)|^2$ . Здесь индексом «o» (overlap) обозначается плотность числа частиц в области перекрытия, а индексом «s» (singular) — плотности в синглетных областях, где находится только одна из компонент. Химические потенциалы  $\mu_i$  являются функциями количества частиц, масс частиц, констант взаимодействия и частот ловушек. Эти функции определяются уравнениями

$$\int \rho_1 dx = N_1, \quad \int \rho_2 dx = N_2, \quad (20)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число частиц соответственно в первой и второй компоненте, а интегрирование ведется по области, где находится соответствующая компонента конденсата. Из уравнений (18), (19) легко найти размеры каждой из компонент конденсата, удерживаемого в ловушке. Следуя работе [17], будем классифицировать возможные конфигурации, сопоставляя им точки на плоскости с осями координат  $(g_{11}/g_{12}, g_{12}/g_{22})$ . Эти переменные характеризуют относительную величину постоянных взаимодействия. Возникающая на этом пути фазовая диаграмма показана на рис. 1, а типичные распре-



**Рис. 2.** Типичные виды профилей плотностей числа частиц, соответствующие различным областям фазовой диаграммы. Штриховые линии — первая компонента, сплошные — вторая. Фазу смешивания отражают профили *a-c*, *h-j*, симметричную фазу несмешивания — профили *d-g*, асимметричную фазу несмешивания — профиль *k*. Каждому графику соответствует точка на рис. 1, обозначенная той же буквой, что и график

деления, соответствующие точкам на этой плоскости, — на рис. 2. Введем следующую терминологию для различных фаз, которые могут быть идентифицированы на этих рисунках. Фазой смешивания будем называть конфигурацию, когда обе компоненты перекрываются в центре ловушки (рис. 2*a-c*, *h-j*), а симметричной фазой несмешивания — конфигурацию, когда компоненты разделены и одна из компонент окружена другой (рис. 2*d-g*). Линии на рис. 1 разделяют области по следующим признакам. Из (5) следует, что диагональ  $g_{11}/g_{12} = g_{12}/g_{22}$

(пунктирная линия) разделяет области смешивания/несмешивания однородного конденсата: выше диагонали компоненты в однородном конденсате не смешиваются, а ниже ее смешиваются. Из-за влияния ловушки теперь эта линия играет несколько другую роль — она разделяет конденсаты с ненулевой (рис. 2*d* и 2*g*) и нулевой (рис. 2*e* и 2*f*) шириной области перекрытия. Эти два набора рисунков различаются номерами компонент, находящихся в центре ловушки и снаружи центральной компоненты (в «оболочке»).

На сплошных линиях плотность внешней компоненты обращается в нуль в центре ловушки, т.е., согласно нашему определению, эти линии разделяют конфигурации со смешиванием и несмешиванием. Аналитически уравнение кривых, на которых первая компонента образует внешнюю оболочку и ее плотность обращается в нуль в центре ловушки, выражается формулой  $g_{12}/g_{22} = \mu_1/\mu_2$ , которую можно получить из условия  $\rho_1^o(0) = 0$ , и аналогичным образом определяется другая ветвь, для которой первая компонента является внутренней, а вторая — внешней. Отношение химических потенциалов может быть найдено из системы (20), и для обращения в нуль первой компоненты получаем уравнение

$$\frac{g_{12}}{g_{22}} = \frac{N_1 g_{11} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{N_1 m_1 \omega_1^2}{N_2 m_2 \omega_2^2}\right) \frac{N_1 g_{11}}{N_2 g_{12}} + \frac{1}{4}}}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2} + 2 \frac{N_1}{N_2} - \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{g_{11}}{g_{12}}}. \quad (21)$$

Вторая компонента обращается в нуль в центре ловушки при переходе через кривую

$$\frac{g_{12}}{g_{22}} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \frac{g_{12}}{g_{22}} + 1\right)^2}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{g_{12}}{g_{22}} + \frac{m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2} + 2 \frac{N_1}{N_2}}. \quad (22)$$

На рис. 1 сплошными линиями показаны примеры кривых, где в приближении Томаса – Ферми внешняя компонента в центре симметрии обращается в нуль, для числа частиц во второй компоненте в два раза больше, чем в первой, и одинаковых масс и частот ловушек. Переход через эти линии иллюстрируется качественным различием между распределениями рис. 2*g* и 2*h* (первая компонента в центре) и 2*d* и 2*c* (вторая компонента в центре).

Распределения 2*c* и 2*h* для внешних компонент являются вогнутыми в центре ловушки. Однако при удалении от сплошных кривых распределения внешних компонент в центре становятся более пологими и в некоторый момент они становятся горизонтальными. Уравнение  $\partial \rho_1^o(x)/\partial x = 0$  дает условие постоянства первой компоненты, а уравнение  $\partial \rho_2^o(x)/\partial x = 0$  — условие постоянства второй компоненты. Соответственно мы находим соотношения между постоянными нашей задачи:

$$\frac{g_{11}}{g_{12}} = \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2} \quad \text{или} \quad \frac{g_{12}}{g_{22}} = \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2}. \quad (23)$$

Эти прямые изображены на рис. 1 штриховыми линиями, параллельными осям координат. В частности, ниже линии  $g_{12}/g_{22} = m_1 \omega_1^2/m_2 \omega_2^2$  первая компонента имеет выпуклое вверх распределение (штриховая линия на рис. 2*a*) в области перекрытия, на этой линии распределение становится плоским (рис. 2*b*), а несколько выше этой линии оно становится вогнутым вниз (рис. 2*c*).

Штрихпунктирная кривая на рис. 1 разделяет диаграмму на две области: область, где первая компонента является внешней, а вторая — внутренней (область выше штрихпунктирной кривой), как показано на рис. 2*a–e*, и область, где вторая компонента является внешней, а первая — внутренней (область ниже штрихпунктирной кривой) (рис. 2*f–j*). Приравняв координаты, где плотности внешней и внутренней компонент обращаются в нуль, получим для смешивающихся компонент соотношение

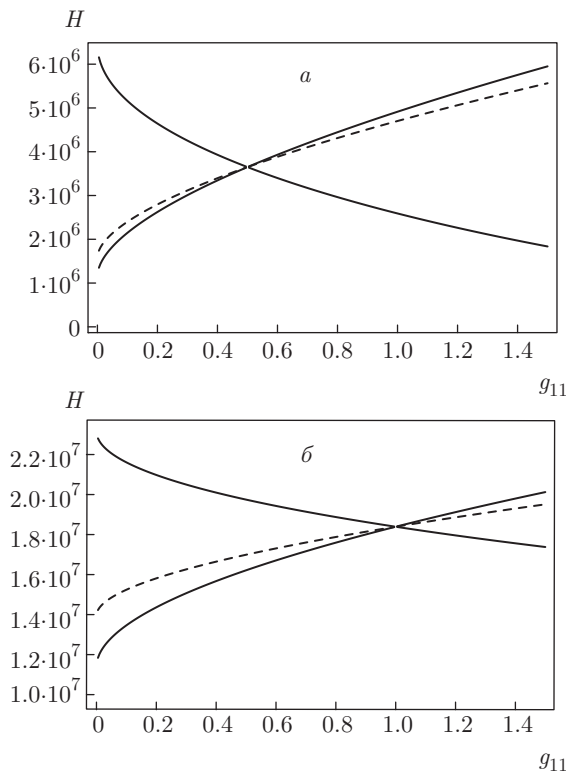
$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2}. \quad (24)$$

Из этого условия и формул (20) получим для области, где  $g_{12}^2 < g_{11}g_{22}$ , уравнение для штрихпунктирной кривой:

$$\frac{g_{12}}{g_{22}} = \left\{ \frac{N_1}{N_2} \frac{m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2} \frac{g_{11}}{g_{12}} + \frac{m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2} - \frac{N_1}{N_2} \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Как мы видим, она является гиперболой на плоскости  $(g_{11}/g_{12}, g_{12}/g_{22})$ . В случае несмешивающихся компонент сравнение энергий для симметричных конфигураций показывает (см. рис. 3), что внутренняя и внешняя компоненты меняются местами (см. рис. 2*e* и 2*f*) также при переходе через гиперболу, на которой имеет место равенство  $g_{22} = g_{11}$ . Численные расчеты показывают, что такая гипербола не зависит от числа частиц в компонентах. Это завершает построение фазовой диаграммы в приближении Томаса – Ферми.

В общих чертах построенная диаграмма дает правильное представление о характере распределений компонент в ловушках за исключением области вблизи части гиперболы, разделяющей распределения типов рис. 2*e* и 2*a*. Дело в том, что на этой кривой не только энергии симметричных распределений 2*e* и 2*f*, но и энергия несимметричного распределения, в котором компоненты находятся по разные стороны от центра ловушки (см. рис. 2*k*), равна тому же самому значению. Такое вырождение энергий, которое иллюстрируется на рис. 3, приводит к тому, что даже малое возмущение делает одно из распределений более энергетически выгодным. Как



**Рис. 3.** Сравнение энергий для симметричных фаз (сплошные линии) и несимметричной несмешивающейся фазы (штриховая линия) в зависимости от константы взаимодействия  $g_{11}$ . Для симметричного случая сплошные кривые соответствуют двум конфигурациям, когда первая компонента находится внутри, а вторая снаружи, и наоборот. На рис. *a* кривые соответствуют  $g_{22} = 0.5$  и одинаковому количеству частиц в обеих компонентах:  $N_1 : N_2 = 10000 : 10000$ . На рис. *б* принято  $g_{22} = 1$  и  $N_1 : N_2 = 10000 : 30000$ . Массы частиц и частоты ловушек одинаковы:  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$

показывают численные расчеты, учет дисперсии дает преимущество несимметричной фазе рис. 2*к*. Это различие не улавливается приближением Томаса–Ферми и требует более точного расчета. Для наших целей достаточно указанной здесь классификации возможных начальных состояний, которые имеет конденсат перед выключением ловушки.

Следует отметить, что найденные распределения имеют изломы в точках перехода от областей перекрытия к синглетным областям. Ясно, что в этих точках дисперсионные эффекты также становятся существенными и приводят к сглаживанию кривых. В частности, на сплошных кривых заострение в распределении в центре, где плотность второй компоненты в приближении Томаса–Ферми равна нулю, сглаживается и численное решение уравнения Грос-

са–Питаевского дает в центре относительно малую, но ненулевую плотность (см., например, [15]).

На рис. 1 показан общий вид диаграммы для одинаковых масс и частот ловушек. Число частиц во второй компоненте в два раза больше, чем в первой. Если изменить отношение частот ловушек и масс, то точка пересечения перпендикулярных прямых будет двигаться вдоль диагонали  $g_{11}/g_{12} = g_{12}/g_{22}$ . Так, например, при увеличении параметров первой компоненты точка пересечения будет двигаться вверх, а при увеличении констант второй компоненты — вниз. При изменении же количества частиц точка пересечения прямых будет неподвижной, но изменится штрихпунктирная кривая, переход через которую меняет местами внутреннюю и внешнюю компоненты в области смешивания. Для несмешивающихся же компонент штрихпунктирная линия останется неизменной. Области между кривыми, где внешняя компонента обращается в нуль в центре симметрии, и диагональ также изменятся. В частности, при увеличении количества частиц в первой компоненте область, где вторая компонента выталкивается из центра ловушки, увеличится, а область, где первая компонента обращается в нуль, уменьшится.

В результате мы пришли к полной классификации возможных начальных распределений и можем теперь обратиться к нашей основной задаче о разлете конденсата после выключения ловушки.

#### 4. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМИКИ РАЗЛЕТА КОНДЕНСАТА

Как было найдено в работах [4–8], при разлете однокомпонентного конденсата с хорошей точностью можно считать, что характер зависимости распределения плотности от пространственной координаты не меняется и вся зависимость от времени заключается лишь в эволюции параметров этого распределения и возникновении распределения скорости течения, пропорциональной координате. В результате задача может быть сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров распределений, и в наиболее интересных характерных случаях решение может быть найдено в замкнутом виде. В двухкомпонентном случае этот подход может иметь лишь ограниченную применимость. Например, если отталкивание между атомами внутренней компоненты много больше сил взаимодействия между атомами внешней компоненты, так что начальное распределение внутрен-

ней компоненты формируется главным образом потенциалом ловушки, то после выключения ловушки давление во внутренней компоненте будет доминирующей силой и внутренняя компонента будет действовать на внешнюю аналогично «поршню». Тем не менее, если различие между параметрами двух компонент не слишком велико, то эволюционирующие со временем распределения будут с хорошей точностью сохранять при разлете свою начальную форму и, как и в однокомпонентном случае, задача может быть сведена к решению уравнений для параметров распределений. Условием применимости такого приближения является то, что каждая компонента эволюционирует преимущественно под действием собственного давления. Кроме того, если компоненты разделены, то должно выполняться условие механического равновесия на границе между ними. Это означает, что механическое равновесие устанавливается за время, много меньшее, чем характерное время разлета до стадии движения по инерции, т. е.  $R/c_s \ll 1/\omega$ , где  $R$  — характерный размер конденсата,  $c_s = \sqrt{g\rho/m}$  — скорость звука в компоненте конденсата. Начнем обсуждение динамики разлета именно с такого случая.

Итак, будем искать зависящее от времени решение в виде, аналогичном начальным распределениям (18) и (19), а именно, предположим, что плотность зависит от координаты квадратично, а скорость течения — линейно, с зависящими от времени коэффициентами:

$$\rho_i^n(x, t) = \alpha_{i,0}^n(t) - \alpha_i^n(t)x^2, \quad u_i^n(x, t) = \beta_i^n(t)x, \quad (26)$$

где  $n = o, s$ . Здесь по-прежнему индексом « $o$ » обозначаются величины, соответствующие области перекрытия, а индексом « $s$ » — величины, соответствующие синглетной области.

Подстановка (26) в уравнение непрерывности (14) и в уравнение Эйлера (15) дает

$$-\dot{\alpha}_{i,0}^n = \alpha_{i,0}^n \beta_i^n, \quad -\dot{\alpha}_i^n = 3\alpha_i^n \beta_i^n, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\beta}_i^o &= (\beta_i^o)^2 - 2\frac{g_{ii}}{m_i}\alpha_i^o - 2\frac{g_{ij}}{m_i}\alpha_j^o + \omega_i(t)^2, \\ -\dot{\beta}_i^s &= (\beta_i^s)^2 - 2\frac{g_{ii}}{m_i}\alpha_i^s + \omega_i(t)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

(точкой обозначена производная по времени). Вводя новую переменную  $\zeta_i^n$ , определяемую соотношением

$$\alpha_i^n = \frac{m_i}{2g_{ii}(\zeta_i^n)^3}, \quad (29)$$

мы существенно упрощаем эти уравнения: из (27) находим, что  $\beta_i^n = \dot{\zeta}_i^n/\zeta_i^n$ , и тогда уравнения (28) примут вид

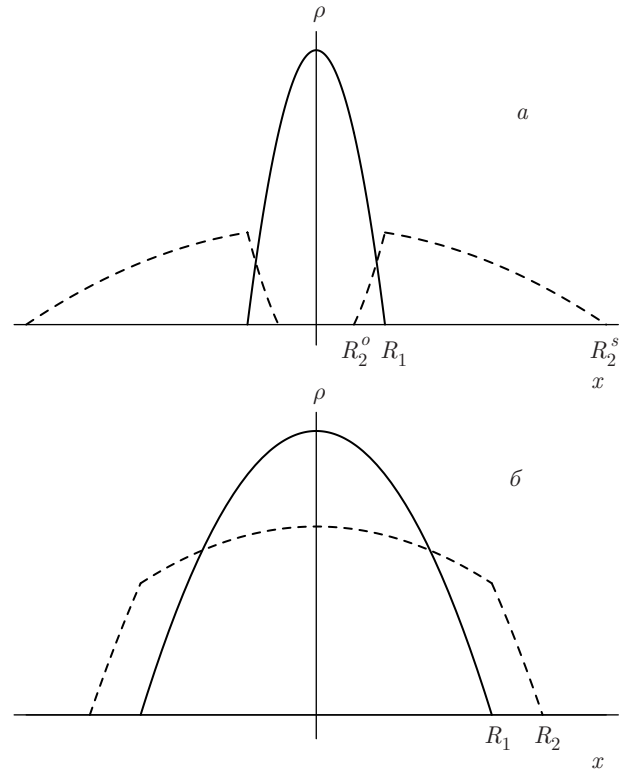


Рис. 4. Два характерных случая для плотностей числа частиц:  $a$  — первая компонента (сплошная линия) имеет синглетную область,  $b$  — повсюду имеется смешивание компонент. Компоненты пронумерованы так, чтобы первая все время находилась в окружении второй

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_i^o &= \frac{1}{(\zeta_i^o)^2} + \frac{m_j}{m_i} \frac{g_{ij}}{g_{ii}} \frac{\zeta_i^o}{(\zeta_j^o)^3} - \omega_i(t)^2 \zeta_i^o, \\ \ddot{\zeta}_i^s &= \frac{1}{(\zeta_i^s)^2} - \omega_i(t)^2 \zeta_i^s. \end{aligned} \quad (30)$$

Эта система из шести дифференциальных уравнений второго порядка определяет движение компонент бозе-эйнштейновского конденсата. Последние члены уравнений отражают влияние удерживающего потенциала на движение, в то время как остальные слагаемые возникают из-за взаимодействия между атомами. В дальнейшем нас будет интересовать динамика конденсата после выключения ловушки, т. е. следует положить  $\omega_i(t) = 0$  при  $t > 0$ . Начальные условия для этих уравнений определяются исходными конфигурациями, которые были описаны в предыдущем разделе. При заданных значениях нелинейных констант они зависят от параметров ловушки и чисел частиц в каждой компоненте.

Решив систему уравнений (30), можно найти скорости  $u_i^n(x, t)$  и коэффициенты  $\alpha_i^n(t)$ . Для находж-



дения  $\alpha_{i,0}^n(t)$  воспользуемся нормировкой волновых функций (20) и тем, что на границе между синглетной областью и областью перекрытия давления в них и, следовательно, плотности равны друг другу. Для определенности нумеруем компоненты конденсата так, чтобы первая компонента находилась в окружении второй, как показано на рис. 4 (первая компонента изображена сплошной линией, вторая – штриховой), так что имеем

$$\int_0^{R_2^o} \rho_1^o dx + \int_{R_2^s}^{R_1} \rho_1^o dx = \frac{1}{2} N_1,$$

$$\int_{R_2^o}^{R_1} \rho_2^o dx + \int_{R_1}^{R_2^s} \rho_2^o dx = \frac{1}{2} N_2;$$

$$\rho_2^o(R_1, t) = \rho_2^s(R_1, t).$$
(31)

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  – числа частиц соответственно первой и второй компоненты,  $R_1$  – координата, где первая компонента обращается в нуль ( $\rho_1^o(R_1, t) = \alpha_{1,0}^o(t) - \alpha_1^o(t)R_1^2 = 0$ ),  $R_2^o$  и  $R_2^s$  – координаты, где вторая компонента конденсата обращается в нуль ( $\rho_2^n(R_2^n, t) = \alpha_{2,0}^n(t) - \alpha_2^n(t)R_2^{n2} = 0$ ). Точка  $R_2^o$  соответствует обращению в нуль плотности второй компоненты в области перекрытия, а  $R_2^s$  обозначает координату обращения в нуль плотности второй компоненты в синглетной области (см. рис. 4а). Следовательно, эти параметры определяются соотношениями

$$R_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{1,0}^o(t)}{\alpha_1^o(t)}}, \quad R_2^o = \sqrt{\frac{\alpha_{2,0}^o(t)}{\alpha_2^o(t)}},$$

$$R_2^s = \sqrt{\frac{\alpha_{2,0}^s(t)}{\alpha_2^s(t)}}.$$
(32)

Координаты  $R_1$ ,  $R_2^o$  и  $R_2^s$  являются функциями времени. Таким образом, мы свели задачу к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (30) с начальными условиями, определяемыми исходными распределениями плотностей компонент в ловушке. Вообще говоря, эта система должна решаться численно, что существенно проще, чем решение уравнений Гросса–Питаевского. Однако стоит отметить важный случай, когда система (30) существенно упрощается и допускает вывод некоторых соотношений в замкнутом виде.

### 4.1. Случай смешивания

Пусть мы имеем начальную конфигурацию перекрытия, когда первая компонента не имеет синглет-

ной области (см. рис. 2а–с и рис. 2h–j), т. е. компоненты «смешиваются». Система (31) тогда запишется в виде

$$\int_0^{R_1} \rho_1^o dx = \frac{1}{2} N_1,$$

$$\int_0^{R_1} \rho_2^o dx + \int_{R_1}^{R_2} \rho_2^s dx = \frac{1}{2} N_2;$$

$$\rho_2^o(R_1, t) = \rho_2^s(R_1, t).$$
(33)

Здесь  $R_2$  – координата, где плотность числа частиц второй компоненты обращается в нуль (см. рис. 4б). В этом случае соотношения для  $\alpha_{i,0}^n(t)$ , выраженных через  $\alpha_i^n(t)$ , можно найти аналитически и решение этой системы будет иметь вид

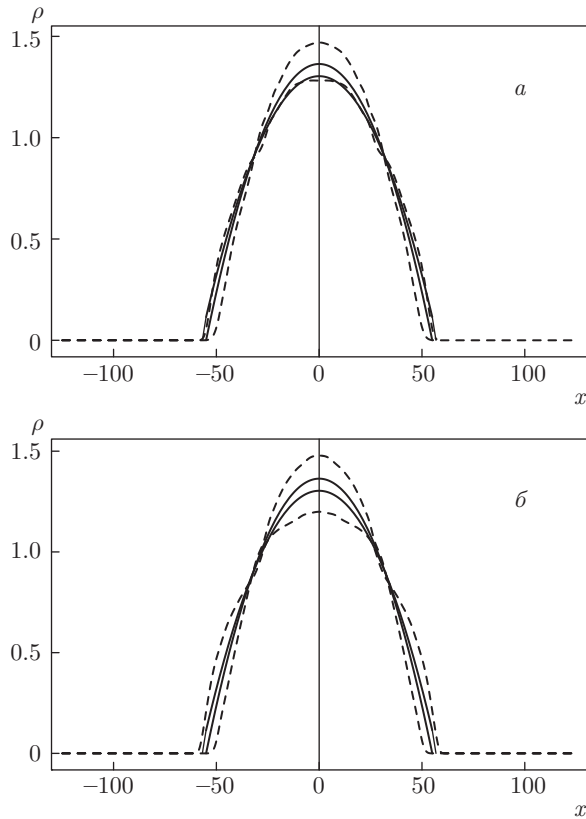
$$\alpha_{1,0}^o = \left( \frac{3}{4} N_1 \sqrt{\alpha_1^o} \right)^{2/3},$$

$$\alpha_{2,0}^s = \left[ \frac{3\sqrt{\alpha_2^s}}{4\alpha_1^o} (N_2 \alpha_1^o - N_1 (\alpha_2^o - \alpha_2^s)) \right]^{2/3},$$

$$\alpha_{2,0}^o = \alpha_{2,0}^s + \left( \frac{3N_1}{4\alpha_1^o} \right)^{2/3} (\alpha_2^o - \alpha_2^s).$$
(34)

Случай разлета конденсата, имеющего несимметричный начальный профиль (см. рис. 2k), рассмотрим отдельно ниже.

Дифференциальные уравнения (30) являются уравнениями типа Ньютона, которые имеют в качестве интегралов движения полную энергию системы (16) и сохранение числа частиц в синглетной области и области перекрытия каждой из компонент. В общем случае этих интегралов недостаточно для нахождения аналитического решения системы, поэтому мы обращаемся к ее численному решению. На рис. 5 изображены примеры сравнения численного решения уравнений Гросса–Питаевского (13) (штриховые кривые) с результатом численного расчета уравнений движения (30) (сплошные кривые) для разных констант взаимодействия в фиксированные моменты времени. Как видно из рисунков, в области хорошего смешивания компонент распределения плотности частиц сохраняют свою форму в процессе разлета и автомодельное решение количественно описывает динамику системы очень хорошо. При этом изменение константы нелинейного взаимодействия между компонентами в 10 раз не оказывает существенного влияния на точность приближения до тех пор, пока критерий смешивания (5) выполняется с запасом (в случае рис. 5б имеем  $g_{12}^2 = 4$  в три раза меньше, чем  $g_{11}g_{22} = 12$ ).



**Рис. 5.** Сравнение численного решения уравнений Гросса – Питаевского (13) (штриховые кривые) с автомодельным решением уравнений движения (30) (сплошные кривые) для  $g_{11} = 3, g_{22} = 4, g_{12} = 0.1$  (а) и  $g_{11} = 3, g_{22} = 4, g_{12} = 2$  (б) с одинаковым количеством частиц в компонентах  $N_1 = N_2 = 100$  в момент времени  $t = 5$ . Массы частиц и частоты ловушек равны  $m_1 = m_2 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 1$

На практике во многих случаях константы взаимодействия имеют практически одинаковое значение. К примеру, для атома  $^{87}\text{Rb}$ , находящегося в разных состояниях сверхтонкой структуры ( $|1, -1\rangle$  и  $|2, -2\rangle$ ), длины рассеяния примерно равны:  $a_{11} = 98.98a_0, a_{12} = 98.98a_0$  и  $a_{22} = 100.4a_0$ , где  $a_0$  – радиус Бора (см., например, [20, 21]), т. е. равны и константы взаимодействия  $g_{11} = g_{12}$ . Массы компонент и частоты ловушек часто тоже могут быть равными ( $m_1 = m_2, \omega_1 = \omega_2$ ). Тогда вторая («внешняя») компонента бозе-эйнштейновского конденсата будет постоянной в области перекрытия и, следовательно,  $\alpha_2^o(t) = 0$ . Рассмотрим несколько более общий случай, когда выполняется условие (23). Тогда автомодельное решение будет записываться в виде

$$\begin{aligned} \rho_1^o(x, t) &= \alpha_{1,0}^o(t) - \alpha_1^o(t)x^2, \\ \rho_2^o(x, t) &= \alpha_{2,0}^o(t), \\ \rho_2^s(x, t) &= \alpha_{2,0}^s(t) - \alpha_2^s(t)x^2; \\ u_i^n(x, t) &= \beta_i^n(t)x. \end{aligned} \tag{35}$$

После подстановки в уравнения (10) и (11) автомодельное решение даст уравнения, аналогичные (27) и (28):

$$\begin{aligned} -\dot{\alpha}_{1,0}^o &= \alpha_{1,0}^o\beta_1^o, & -\dot{\alpha}_{2,0}^o &= \alpha_{2,0}^o\beta_2^o, \\ -\dot{\alpha}_{2,0}^s &= \alpha_{2,0}^s\beta_2^s; \\ -\dot{\alpha}_1^o &= 3\alpha_1^o\beta_1^o, & -\dot{\alpha}_2^s &= 3\alpha_2^s\beta_2^s; \\ -\dot{\beta}_1^o &= (\beta_1^o)^2 - 2\frac{g_{11}}{m_1}\alpha_1^o, \\ -\dot{\beta}_2^o &= (\beta_2^o)^2 - 2\frac{g_{12}}{m_2}\alpha_1^o, \\ -\dot{\beta}_2^s &= (\beta_2^s)^2 - 2\frac{g_{22}}{m_2}\alpha_2^s. \end{aligned} \tag{36}$$

Заменой  $\alpha_1^o = m_1/2g_{11}(\zeta_1^o)^3$  и  $\alpha_2^s = m_2/2g_{22}(\zeta_2^s)^3$  система уравнений сводится при  $\omega_1(t) = \omega_2(t) = 0$  к следующей:

$$\ddot{\zeta}_1^o = \frac{1}{(\zeta_1^o)^2}, \quad \ddot{\zeta}_2^s = \frac{1}{(\zeta_2^s)^2}. \tag{37}$$

Из первого уравнения (37) найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\Omega t &= \Omega^{1/3}\sqrt{\zeta_1^o(\Omega^{2/3}\zeta_1^o - 1)} + \\ &+ \frac{1}{2}\ln\left(2\Omega^{2/3}\zeta_1^o + 2\Omega^{1/3}\sqrt{\zeta_1^o(\Omega^{2/3}\zeta_1^o - 1)} - 1\right), \end{aligned} \tag{38}$$

где введена эффективная частота потенциала, в котором находится первая компонента конденсата:

$$\Omega = \left(\frac{g_{11}g_{22}m_1\omega_1(0)^2 - g_{12}m_2\omega_2(0)^2}{m_1g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\right)^{1/2}.$$

А из второго уравнения (37) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\omega_2 t &= \omega_2^{1/3}\sqrt{\zeta_2^s(\omega_2^{2/3}\zeta_2^s - 1)} + \\ &+ \frac{1}{2}\ln\left(2\omega_2^{2/3}\zeta_2^s + 2\omega_2^{1/3}\sqrt{\zeta_2^s(\omega_2^{2/3}\zeta_2^s - 1)} - 1\right). \end{aligned} \tag{39}$$

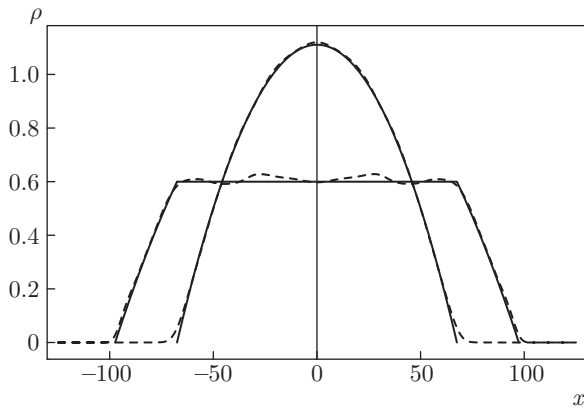
Уравнения (38) и (39) задают неявно  $\zeta_i^n$  как функции от  $t$ . Распределения плотностей, полученные из этих уравнений и численным решением уравнения Гросса – Питаевского, приведены на рис. 6.

Из системы (37) также можно легко найти скорости, выраженные через  $\zeta_i^n$ :

$$\begin{aligned} u_1^o &= \frac{\sqrt{2}x}{\zeta_1^o}\sqrt{\Omega^{2/3} - \frac{1}{\zeta_1^o}}, \\ u_2^s &= \frac{\sqrt{2}x}{\zeta_2^s}\sqrt{\omega_2^{2/3} - \frac{1}{\zeta_2^s}}. \end{aligned} \tag{40}$$

При  $t \gg \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}$  из (38) и (39) находим асимптотические формулы

$$\zeta_1^o \approx \sqrt{2}\Omega^{1/3}t, \quad \zeta_2^s \approx \sqrt{2}\omega_2^{1/3}t. \tag{41}$$



**Рис. 6.** Сравнение численного решения уравнений Гросса–Питаевского (13) (штриховая кривая) и численного решения уравнений (38), (39) (сплошная кривая) для  $g_{11} = g_{12} = 1$ ,  $g_{22} = 2$  с одинаковым количеством частиц в компонентах  $N_1 : N_2 = 100 : 100$  в моменты времени  $t = 10$ . Массы частиц и частоты ловушек равны  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$

Эти решения соответствуют движению атомов конденсата по инерции, когда плотность в облаке конденсата становится настолько малой, что давление больше не ускоряет конденсат.

Для того чтобы найти скорость второй компоненты в области перекрытия, используем (41) и второе уравнение (36) и найдем дифференциальное уравнение для  $\beta_2^o$ :

$$-\dot{\beta}_2^o \approx (\beta_2^o)^2 - \frac{m_1}{m_2} \frac{g_{12}}{g_{11}} \frac{1}{(\sqrt{2}t)^3 \Omega}. \quad (42)$$

Из этого уравнения получим

$$\beta_2^o \sim \frac{1}{t}, \quad t \gg \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}. \quad (43)$$

Зная асимптотические решения для  $\zeta_i$  и скорости, выраженные через эти  $\zeta_i$ , мы легко сможем найти асимптотическое решение для скоростей каждой из компонент  $u_i^n$ :

$$u_i^n(x, t) \sim \frac{x}{t}. \quad (44)$$

Крайние точки распределения каждой компоненты конденсата будут двигаться с наибольшими скоростями:

$$u_{1,max}^o \approx \left( 3\sqrt{2}N_1 \frac{g_{11}\Omega}{m_1} \right)^{1/3}, \quad (45)$$

$$u_{2,max}^s \approx \left( 3\sqrt{2} \left( N_2 \frac{g_{22}\omega}{m_2} + N_1 \frac{g_{11}\Omega}{m_1} \right) \right)^{1/3}.$$

Первая формула (45) соответствует скорости границы распределения первой компоненты конденсата,

когда движение происходит по инерции, а вторая формула представляет такую же скорость для второй компоненты. Также из найденной асимптотики для  $\zeta_i$  можно найти простые формулы для распределений плотности при  $t \gg \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}$ :

$$\rho_1^o(x, t) \approx \frac{m_1}{4\sqrt{2}g_{11}\Omega} u_{1,max}^{o2} \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{x^2}{(u_{1,max}^o t)^2} \right), \quad (46)$$

$$\rho_2^o(x, t) \approx \frac{m_2}{4\sqrt{2}g_{22}\omega_2} \left( u_{2,max}^{s2} - u_{1,max}^{o2} \right) \frac{1}{t}, \quad (47)$$

$$\rho_2^s(x, t) \approx \frac{m_2}{4\sqrt{2}g_{22}\omega_2} u_{2,max}^{s2} \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{x^2}{(u_{2,max}^s t)^2} \right). \quad (48)$$

Итак, в случае сильного смешивания компонент конденсата с начальными распределениями вида рис. 2*a,b,i,j* автомодельное решение дает вполне удовлетворительное описание процесса разлета конденсата после выключения ловушки. Если же мы подходим к границе смешивания–несмешивания с начальными распределениями вида рис. 2*c,d,g,h*, то приближение Томаса–Ферми теряет точность уже при расчете стационарных распределений из-за появления больших скачков производных в распределениях плотности. Динамика разлета в таких случаях также существенно отличается от предсказаний автомодельной теории. В частности, в процессе эволюции в распределениях плотности и скорости могут образовываться характерные области нелинейных осцилляций, что означает, что при их деформации вследствие нелинейных эффектов происходит «опрокидывание» волны, так что дисперсионными эффектами пренебрегать уже нельзя. Учет же одновременно нелинейных и дисперсионных эффектов приводит к формированию области осцилляций, соединяющей области течений с различными параметрами. Эти области осцилляций аналогичны ударным волнам в системах с малой диссипацией и они получили название «дисперсионных ударных волн». Однако прежде чем переходить к их изучению, рассмотрим случай сильного несмешивания компонент, который также описывается автомодельным решением, аналогичным полученным выше для смешивающихся компонент.

#### 4.2. Случай несмешивающихся компонент

Здесь мы предполагаем, что компоненты бозе-эйнштейновского конденсата абсолютно не смешиваются, т. е. область перекрытия имеет величину порядка корреляционной длины. Как было указано в разд. 3, в этом случае могут реализоваться симметричные (рис. 2*e,f*) и несимметричные (рис. 2*k*)

распределения. Теперь автомодельное решение примет вид

$$\rho_i^s(x, t) = \alpha_{i,0}^s(t) - \alpha_i^s(t) x^2, \quad u_i^s(x, t) = \beta_i^s(t) x, \quad (49)$$

а из уравнений (30) останутся только те, которые отвечают за синглетные области. Начальные распределения  $\alpha_{i,0}^s(0)$ ,  $\alpha_i^s(t)$  определяются стационарными решениями

$$\rho_i^s(x, 0) = |\psi_i^s|^2 = \frac{2\mu_i - m_i\omega_i^2 x^2}{2g_{ii}}. \quad (50)$$

На границе между несмешивающимися компонентами значения давления в них равны друг другу,  $p_i = p_j$ , что служит условием, определяющим координату границы. В гидродинамическом приближении давления равны  $p_i = g_{ii}\rho_i^{s2}/2m_i$ , так что из этого условия находим, что координата  $R_b$ , где граничат компоненты, представляется формулой

$$R_b = \left( \frac{\sqrt{g_{11}m_2}\alpha_{1,0}^s - \sqrt{g_{22}m_1}\alpha_{2,0}^s}{\sqrt{g_{11}m_2}\alpha_1^s - \sqrt{g_{22}m_1}\alpha_2^s} \right)^{1/2}. \quad (51)$$

Итак, задача сведена к определению шести функций времени, являющихся коэффициентами в (49).

Выражения для  $\alpha_i^s(t)$  могут быть найдены в замкнутом виде. При  $t > 0$ , когда  $\omega_i(t) = 0$ , получим простые уравнения движения для параметров синглетных распределений:

$$\ddot{\zeta}_i^s = \frac{1}{(\zeta_i^s)^2}, \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

( $\alpha_i^s = m_i/2g_{ii}(\zeta_i^s)^3$ ). Нетрудно найти решение этой системы:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\omega_i t &= \omega_i^{1/3} \sqrt{\zeta_i^s(\omega_i^{2/3}\zeta_i^s - 1)} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left( 2\omega_i^{2/3}\zeta_i^s + 2\omega_i^{1/3} \sqrt{\zeta_i^s(\omega_i^{2/3}\zeta_i^s - 1)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Эти уравнения задают неявным образом  $\zeta_i^s$  как функции от  $t$ . Функции  $\beta_i^s(t) = \dot{\zeta}_i^s/\zeta_i^n$  выражаются через найденные функции  $\zeta_i^s$ . В результате получаем выражения для скорости каждой компоненты  $u_i^s$ , выраженные через  $\zeta_i^s$ :

$$u_i^s = \beta_i^s x = \frac{\dot{\zeta}_i^n}{\zeta_i^n} x = \frac{\sqrt{2}x}{\zeta_i^s} \sqrt{\omega_i^{2/3} - \frac{1}{\zeta_i^s}}. \quad (54)$$

Наконец, связь между параметрами  $\alpha_{i,0}^s$  и  $\alpha_i^s$  следует из условий нормировки<sup>1)</sup>

$$\int_0^{R_b} \rho_1^s dx = \frac{N_1}{2}, \quad \int_{R_b}^{R_2} \rho_2^s dx = \frac{N_2}{2} \quad (55)$$

<sup>1)</sup> Здесь, как и прежде,  $R_1 = \sqrt{\alpha_{1,0}^s/\alpha_1^s}$  и  $R_2 = \sqrt{\alpha_{2,0}^s/\alpha_2^s}$ .

для симметричного профиля и из уравнений

$$\int_{R_1}^{R_b} \rho_1^s dx = N_1, \quad \int_{R_b}^{R_2} \rho_2^s dx = N_2 \quad (56)$$

— для несимметричного. В принципе эти уравнения позволяют выразить  $\alpha_{i,0}^s$  через уже известные функции  $\alpha_i^s$  посредством легко решаемых численно алгебраических уравнений (которые мы здесь не выписываем из-за их громоздкости).

Из системы уравнений (53) можно, как и в случае  $g_{11} = g_{12}$ , найти асимптотическое решение для  $\zeta_i^s$ , соответствующее временам  $t \gg \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}$ :

$$\zeta_i^s \approx \sqrt{2}\omega_i^{1/3}t. \quad (57)$$

Как и раньше, они описывают течение конденсатного облака по инерции после того, как потенциальная энергия конденсата, сжатого в ловушке, перейдет в кинетическую энергию их течения. Крайние точки распределений каждой компоненты конденсата движутся с максимальными скоростями:

$$u_{1max}^s \approx \frac{R_b(t)}{t}, \quad u_{2max}^s \approx \frac{R_2(t)}{t}; \quad (58)$$

$$u_{1max}^s \approx \frac{R_1(t)}{t}, \quad u_{2max}^s \approx \frac{R_2(t)}{t}, \quad (59)$$

соответственно для симметричного и несимметричного профилей плотности числа частиц. Выражения для плотностей числа частиц и скоростей при асимптотически больших  $t$  имеют вид

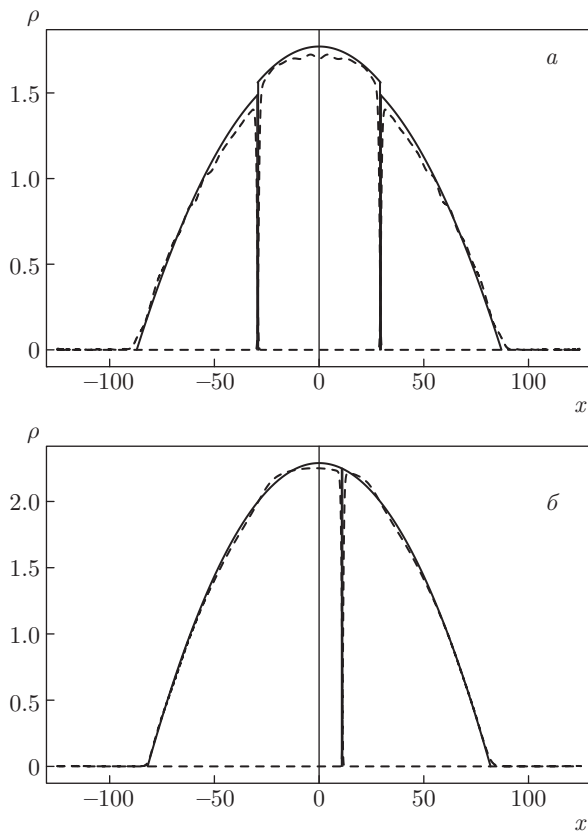
$$\rho_i^s(x, t) \approx \alpha_{i,0}^s(t) - \frac{m_i}{4\sqrt{2}g_{ii}\omega_i} \frac{x^2}{t^3}, \quad u_i^s(x, t) \sim \frac{x}{t}. \quad (60)$$

Входящие сюда функции  $\alpha_{i,0}^s(t)$  находятся численным решением систем уравнений (55) в симметричном случае и систем (56) в несимметричном случае для каждого момента времени  $t$ . Зная  $\alpha_{1,0}^s$  и  $\alpha_{2,0}^s$ , можно найти виды плотностей числа частиц и максимальные скорости каждой из компонент конденсата в этот момент времени.

Таким образом, полученные формулы дают решение нашей задачи. Оно иллюстрируется на рис. 7, где показаны плотности числа частиц для симметричной и несимметричной фаз в фиксированный момент времени.

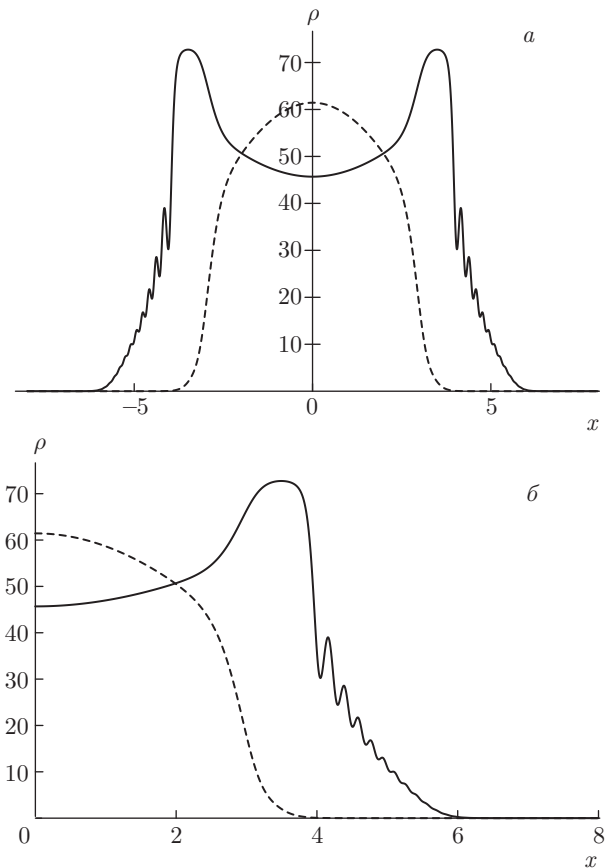
## 5. ДИСПЕРСИОННЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Характерной особенностью разлета двухкомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата является возможность появления в нем дисперсионных



**Рис. 7.** Плотности числа частиц для симметричной фазы с  $g_{11} = 1, g_{22} = 1.1$  и одинаковым количеством частиц в компонентах  $N_1 : N_2 = 100 : 100$  (а) и несимметричной фазы с  $g_{11} = 1, g_{22} = 1$  и  $N_1 : N_2 = 150 : 100$  (б) в момент времени  $t = 10$ . Массы частиц и частоты ловушек равны  $m_1 = m_2 = 1, \omega_1 = \omega_2 = \omega = 1$

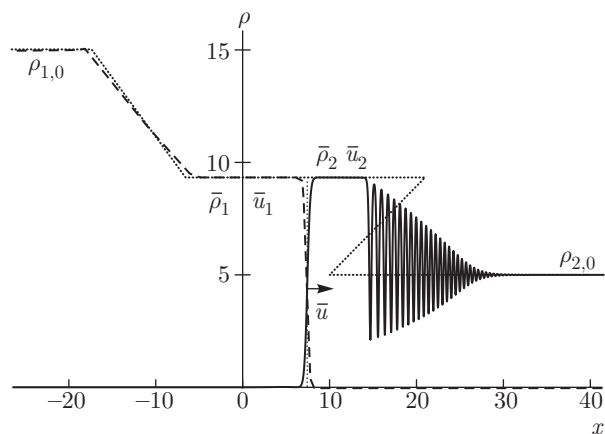
ударных волн (см. [22, 23]). На рис. 8 приведен пример таких волн, когда внутренняя компонента выталкивает внешнюю настолько сильно, что это приводит к опрокидыванию плотности числа частиц внешней компоненты, что означает начало образования дисперсионной ударной волны. В случае, когда внешняя компонента много больше, чем размер ударной волны, можно приближенно считать, что в месте образования ударной волны внешняя компонента однородна, а граница внутренней компоненты является поршнем, толкающим внешнюю компоненту. Аналогичным образом для несмешивающихся компонент также возможно образование дисперсионных ударных волн. Например, в конденсате, удерживаемом в ловушке, образуется граница между конденсатами, на которой давления обеих компонент равны. В случае, если частоты ловушек, удерживающие различные компоненты, сильно различаются, сразу после выключения ловушек на грани-



**Рис. 8.** Пример ударной волны для смешивающихся компонент. Рис. б — правая часть рис. а в увеличенном масштабе

це между конденсатами возникнет скачок давления, так что снова одна компонента будет действовать на другую как поршень. На начальном этапе наибольший интерес представляет область вблизи границы между конденсатами, а параметры конденсата вдали от границы можно считать заданными постоянными величинами. Подобного рода задачи о поршне как с постоянной скоростью движения, так и с равноускоренным или произвольным законом его движения, были рассмотрены в работах [24, 25] и могут быть использованы в приложении к задаче о разлете конденсата после выключения ловушек.

Рассмотрим в качестве примера несмешивающийся конденсат на такой стадии эволюции, когда размер области, занимаемой дисперсионной ударной волной, много меньше размера всего облака конденсата. Будем также предполагать, что роль поршня играет внутренняя компонента. Тогда эволюция внешней компоненты описывается решением, аналогичным найденным в работах [24, 25], однако с учетом того, что теперь скорость поршня не задана, а



**Рис. 9.** Численное решение эволюции ступеньки для несмешивающихся компонент в момент времени  $t = 2$ . Константы взаимодействия  $g_{11} = 5, g_{22} = 5, g_{12} = 5.5$ . Начальные плотности  $\rho_{1,0} = 15$  и  $\rho_{2,0} = 5$ . Штриховой линией показана левая компонента, сплошной линией — правая, пунктирная линия отображает бездисперсионный предел

должна находиться самосогласованным образом из условия того, что давления двух компонент на границе между ними равны друг другу. Это означает, что для внутренней компоненты мы также имеем дело с задачей о поршне, но в этом случае поршень не сжимает конденсат, а наоборот, «вытягивается» из него. В результате вглубь внутреннего конденсата будет распространяться волна разрежения, описываемая известным решением гидродинамических уравнений (14) и (15) для внутренней компоненты. Характерный профиль плотности возникающей волновой структуры показан на рис. 9, он получен численным решением уравнений Гросса–Питаевского. Наша задача в этом разделе — вычислить основные характеристики этой структуры, выразив их через параметры конденсата и начальные условия.

Итак, будем считать, что в начальный момент сразу после выключения ловушек первая компонента расположена слева от поверхности раздела при  $x = 0$  и имеет плотность  $\rho = \rho_{1,0}$ , а вторая компонента расположена справа от поверхности раздела и имеет плотность  $\rho = \rho_{2,0}$ . Скорости течения обеих компонент равны нулю,  $u_1 = u_2 = 0$ , в начальный момент времени  $t = 0$ . Для определенности будем также считать, что давление слева от границы раздела в начальный момент больше давления справа от границы раздела:

$$p_1 = \frac{1}{2}g_{11}\rho_{1,0}^2 > p_2 = \frac{1}{2}g_{22}\rho_{2,0}^2. \tag{61}$$

Именно такое условие соответствует формированию волновой структуры, показанной на рис. 9. Ясно,

что это условие не ограничивает общности рассмотрения — если неравенство обратное, то волны будут распространяться в противоположном направлении и в полученных ниже формулах достаточно будет заменить  $x$  на  $-x$ , чтобы они описывали этот случай.

Из теории движения сжимаемых сред [26] следует в согласии с рис. 9, что левая волна разрежения соединяет две области однородного течения — покоящийся конденсат с плотностью  $\rho_{1,0}$  и «полочку» справа от волны разрежения с некой плотностью  $\bar{\rho}_1$  и скоростью течения  $\bar{u}_1$ . Эта полочка простирается до границы со вторым конденсатом, которая движется со скоростью  $\bar{u}$ , равной скорости течения  $\bar{u}_1$  левого конденсата. Как указывалось выше, граница между компонентами служит «поршнем» для второго конденсата, так что, в согласии с известным решением [24], правее границы также возникает полочка течения второго конденсата с плотностью  $\bar{\rho}_2$  и скоростью течения  $\bar{u}_2$ , снова равной скорости границы  $\bar{u}$ . Эта вторая полочка соединяется дисперсионной ударной волной с областью покоящейся второй компоненты с плотностью  $\rho_{2,0}$ . Граница между двумя конденсатами является аналогом контактного разрыва, известного из классификации распадов начальных разрывов в газовой динамике (см. [26]). Благодаря равенству нелинейных постоянных,  $g_{11} = g_{22}$ , из равенства давлений на таком разрыве следует равенство плотностей. Для простоты на рис. 9 предполагался именно такой случай. В сформулированной таким образом задаче требуется найти параметры полочек  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ , скорость движения границы  $\bar{u} = \bar{u}_1 = \bar{u}_2$  (контактного разрыва), а также скорости движения границ волны разрежения и дисперсионной ударной волны.

Обратимся сначала к обсуждению этой задачи в рамках бездисперсионных гидродинамических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + g_{ii} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Они являются частным случаем уравнений (14) и (15), в которых учтено, что в этом случае компоненты пространственно разделены, так что индекс  $i = 1$  относится к компоненте слева от границы раздела, а индекс  $i = 2$  — к компоненте справа от этой границы. Взаимодействие между компонентами отсутствует повсюду за исключением узкой области вблизи разделяющей их границы, но ее наличие учитывается соответствующим граничным условием равенства давлений с обеих сторон границы. Кроме

того, мы считаем массы атомов в обеих компонентах одинаковыми и равными единице, а потенциал ловушки на стадии расширения очевидным образом роли не играет. Решение такого рода задач существенно упрощается, если от обычных физических переменных  $\rho_i, u_i$  перейти к так называемым «римановым инвариантам». Для уравнений (62), совпадающих по форме с уравнениями газовой динамики, римановы инварианты хорошо известны и могут быть записаны в виде (см., например, [27])

$$r_{\pm}^{(i)} = u_i \pm 2\sqrt{g_{ii}\rho_i}. \quad (63)$$

В этих переменных гидродинамические уравнения (62) приобретают простой симметричный вид:

$$\frac{\partial r_{\pm}^{(i)}}{\partial t} + v_{\pm}^{(i)}(r_{+}^{(i)}, r_{-}^{(i)}) \frac{\partial r_{\pm}^{(i)}}{\partial x} = 0, \quad (64)$$

где «римановы скорости»  $v_{\pm}^{(i)} = u_i \pm c_i$  выражаются через римановы инварианты соотношениями

$$v_{+}^{(i)} = \frac{3}{4}r_{+}^{(i)} + \frac{1}{4}r_{-}^{(i)}, \quad v_{-}^{(i)} = \frac{1}{4}r_{+}^{(i)} + \frac{3}{4}r_{-}^{(i)}. \quad (65)$$

Если решение уравнений (64) найдено и римановы инварианты известны, то физические переменные выражаются через них формулами

$$\rho_i = \frac{(r_{+}^{(i)} - r_{-}^{(i)})^2}{16g_{ii}}, \quad u_i = \frac{1}{2}(r_{+}^{(i)} + r_{-}^{(i)}). \quad (66)$$

Как известно [26], волна разрежения относится к классу «простых волн», характеризуемых тем, что один из римановых инвариантов имеет вдоль течения постоянное значение. Для случая, изображенного на рис. 9, волна разрежения распространяется налево в первом конденсате, так что для нее постоянен инвариант

$$r_{+}^{(1)} = u_1 + 2\sqrt{g_{11}\rho_1} = 2\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}}, \quad (67)$$

где мы приравняли его значение величине на границе с покоящимся конденсатом. Это же значение он должен иметь на границе волны разрежения с полочкой справа от нее:

$$\bar{u} + 2\sqrt{g_{11}\bar{\rho}_1} = 2\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}}. \quad (68)$$

Значения давления компонент на границе между ними равны друг другу, что дает соотношение

$$g_{11}\bar{\rho}_1^2 = g_{22}\bar{\rho}_2^2. \quad (69)$$

Наконец, после прохождения через дисперсионную ударную волну во второй компоненте сохраняет свое

значение риманов инвариант  $r_{-}^{(2)}$ , что дает соотношение

$$\bar{u} - 2\sqrt{g_{22}\bar{\rho}_2} = -2\sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}. \quad (70)$$

Три уравнения (68)–(70) позволяют найти плотности компонент на полочках и скорость движения границы:

$$\bar{\rho}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left( \frac{\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} + \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}} \right)^2, \quad (71)$$

$$\bar{\rho}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left( \frac{\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} + \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}} \right)^2,$$

$$\bar{u} = \frac{2 \left( g_{22}^{1/4} \sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} - g_{11}^{1/4} \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}} \right)}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}}. \quad (72)$$

При выполнении неравенства (61) имеем  $\bar{u} > 0$ , т. е. граница между компонентами движется направо, как и должно быть. Полученные формулы существенно упрощаются, если нелинейные константы равны друг другу  $g_{11} = g_{22} \equiv g$ :

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 = \frac{1}{4} (\sqrt{\rho_{1,0}} + \sqrt{\rho_{2,0}})^2, \quad (73)$$

$$\bar{u} = \sqrt{g\rho_{1,0}} - \sqrt{g\rho_{2,0}}.$$

В этом случае амплитуда  $\sqrt{\rho}$  волны на плато между волной разрежения и дисперсионной ударной волной равна среднему арифметическому амплитуд компонент в начальном состоянии, а скорость границы между компонентами равна разности скоростей звука в начальном состоянии компонент.

Установив граничные значения параметров по обе стороны от волны разрежения и дисперсионной ударной волны, мы можем обратиться к отысканию решений для самих волн. Начнем с волны разрежения. Как мы знаем, вдоль нее постоянен риманов инвариант  $r_{+}^{(1)}$  (см. (67)), так что для него уравнение (64) удовлетворяется тождественно. Второй риманов инвариант  $r_{-}^{(1)}$  зависит лишь от автомодельной переменной  $\zeta = x/t$ , поскольку наше начальное условие в виде скачка давления на границе между компонентами не содержит параметра с размерностью длины. Поэтому уравнение (64) сводится к уравнению

$$\frac{dr_{-}^{(1)}}{d\zeta} (v_{-}^{(1)} - \zeta) = 0 \quad (74)$$

с очевидным решением

$$v_{-}^{(1)} = \frac{1}{4}r_{+}^{(1)} + \frac{3}{4}r_{-}^{(1)} = \frac{x}{t}. \quad (75)$$

Таким образом, вдоль волны разрежения римановы инварианты даются выражениями

$$r_+^{(1)} = 2\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}}, \quad r_-^{(1)} = \frac{4}{3} \left( \frac{x}{t} - \frac{1}{2}\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} \right). \quad (76)$$

Подставляя их в (66), найдем плотность конденсата и скорость его течения в волне разрежения:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{9g_{11}} \left( 2\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} - \frac{x}{t} \right)^2, \\ u_1 &= \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + \sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Скорость течения обращается в нуль на границе с покоящимся конденсатом при  $x_-^{(1)} = -\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}}t$ , т. е. левый край волны разрежения распространяется вглубь покоящегося конденсата со скоростью  $s_-^{(1)} = -\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}}$  звука в нем. Правый край сшивается с полочкой, когда  $u_1 = \bar{u}$ , откуда следует скорость движения правого края:

$$\begin{aligned} s_+^{(1)} &= \frac{x_+^{(1)}}{t} = \\ &= \frac{\left( 2g_{22}^{1/4} - g_{11}^{1/4} \right) \sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} - 3g_{11}^{1/4} \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}}. \end{aligned} \quad (78)$$

При  $g_{11} = g_{22} = g$  скорости краев волны разрежения равны

$$s_-^{(1)} = -\sqrt{g\rho_{1,0}}, \quad s_+^{(1)} = \frac{\sqrt{g}}{2} (3\sqrt{\rho_{2,0}} - \sqrt{\rho_{1,0}}). \quad (79)$$

Если мы попытаемся найти волну между плато  $\bar{\rho}_2, \bar{u}_2$  и покоящейся второй компонентой  $\rho_{2,0}, u_{2,0} = 0$  в бездисперсионном приближении, то приходим к многозначному решению, показанному на рис. 9 пунктирной линией. Это означает, что бездисперсионное приближение в этом случае неприменимо и учет дисперсии приводит к замене многозначного решения областью быстрых осцилляций, называемой бездисперсионной ударной волной. Эту область можно приближенно описать как промодулированное периодическое решение уравнения Гросса–Питаевского с медленно меняющимися параметрами. Уравнения, описывающие эволюцию параметров можно получить, усреднив должное число законов сохранения. Такой способ вывода модуляционных уравнений для нелинейных волн был предложен Уиземом [28, 29], причем для уравнения Кортевега–де Фриза эти уравнения были преобразованы им к диагональной римановой форме, аналогичной уравнениям (64) газовой динамики. Развитый Уиземом метод был применен к задаче о

формировании дисперсионных ударных волн Гуревичем и Питаевским в работе [30]. С тех пор теория дисперсионных ударных волн на основе метода Уизема получила большое развитие (см., например, недавний обзор [31]). В частности, модуляционные уравнения Уизема для периодических решений уравнения Гросса–Питаевского (нелинейного уравнения Шредингера) были выведены в [32, 33], задача об эволюции ступеньки была проанализирована в работах [34, 35], и развитая теория была приложена к задачам об эволюции конденсата под действием движущегося поршня в работах [24, 25]. В нашем случае эволюция второй компоненты справа от границы раздела между компонентами сводится к задаче о течении конденсата под действием поршня, движущегося со скоростью (72). Поэтому результаты указанных работ непосредственно применимы к нашей задаче и ниже мы приведем основные формулы, описывающие течение второго конденсата.

Периодическое решение уравнений Гросса–Питаевского в «гидродинамической форме» можно написать в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)^2 + \\ &+ (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1) \times \\ &\times \operatorname{sn}^2 \left( \sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} \theta, m \right), \\ u &= V - \frac{C}{\rho}, \end{aligned} \quad (80)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= x - Vt, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i, \\ m &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad 0 \leq m \leq 1; \\ C &= \frac{1}{8}(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \times \\ &\times (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4); \end{aligned} \quad (81)$$

а действительные параметры  $\lambda_i$  упорядочены согласно неравенствам

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4.$$

Как мы видим, через эти параметры выражаются фазовая скорость волны  $V$ , ее амплитуда  $a = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)$  и фоновая плотность  $\rho_0 = (\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)^2/4$ , по которой распространяется волна. Эти параметры являются в дисперсионной ударной волне медленными функциями от  $x$  и  $t$ . Запись периодического решения в виде (80) обладает тем пре-



имуществом, что параметры  $\lambda_i$  являются римановыми инвариантами и их эволюция определяется уравнениями Уизема в диагональной римановой форме (см. [32, 33]):

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (82)$$

Здесь  $v_i$  — характеристические скорости Уизема,

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E}, \quad (83)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E}, \quad (84)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E}, \quad (85)$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E}, \quad (86)$$

где  $K = K(m)$ ,  $E = E(m)$  — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. В пределе  $m \rightarrow 1$  ( $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ ) бегущая волна трансформируется в солитонное решение на фоне постоянной плотности:

$$\rho = \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_1)^2 - \frac{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\text{ch}^2\left(\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}\theta\right)}, \quad (87)$$

$$\theta = x - \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4)t.$$

В другом (малоамплитудном) пределе  $m \rightarrow 0$  ( $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$  или  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ ) амплитуда волны стремится к нулю, а плотность принимает фоновое значение. Чрезвычайно существенно, что в этих пределах пара уиземовских скоростей переходит (с точностью до постоянного коэффициента) в римановы скорости бездисперсионного предела. В частности, в солитонном пределе при  $\lambda_3 = \lambda_2$

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_4) &= \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_4, \\ v_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_4) &= \frac{3}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_1, \end{aligned} \quad (88)$$

и в нужном для нас малоамплитудном пределе при  $\lambda_3 = \lambda_4$

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_4) &= \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \\ v_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_4) &= \frac{3}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1. \end{aligned} \quad (89)$$

Это означает, что края дисперсионной ударной волны сшиваются с плавными решениями гидродина-

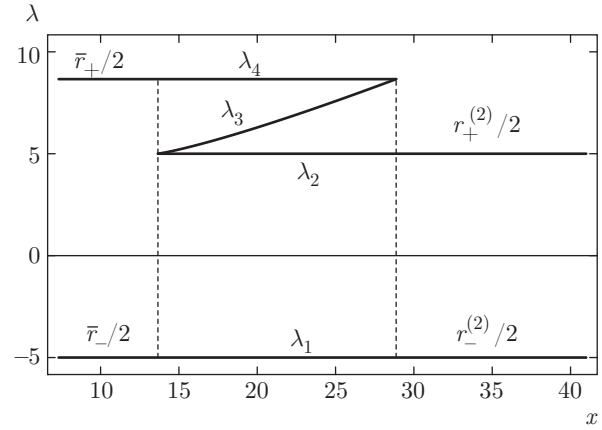


Рис. 10. График для римановых инвариантов при  $g_{11} = 5$ ,  $g_{22} = 5$  и начальными плотностями  $\rho_{1,0} = 15$ ,  $\rho_{2,0} = 5$  в момент времени  $t = 2$

мического приближения, т. е. в нашем случае с полочкой  $\bar{\rho}_2$ ,  $\bar{u}_2$  на солитонном краю и с покоящейся компонентой  $\rho_{2,0}$ ,  $u_{2,0} = 0$  на малоамплитудном краю.

Чтобы выяснить характер решения уравнений (82), снова используем аргумент, что начальное условие не содержит параметров с размерностью длины, так что модуляционные параметры зависят лишь от автомодельной переменной  $\zeta = x/t$ . Поэтому уравнения (82) сводятся к

$$\frac{d\lambda_i}{d\zeta}(v_i - \zeta) = 0. \quad (90)$$

Отсюда следует, что лишь один инвариант Римана является переменным, а остальные три должны иметь постоянные значения. Из условий сшивки на краях дисперсионной ударной волны находим, что на солитонном краю

$$\lambda_1 = \bar{r}_-/2, \quad \lambda_4 = \bar{r}_+/2 \quad \text{при} \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad (91)$$

где  $\bar{r}_\pm$  являются римановыми инвариантами бездисперсионной теории, которые определяются формулами (63) и принимают значения на плато, граничащем с солитонным краем дисперсионной ударной волны. Аналогичным образом на малоамплитудном краю находим

$$\lambda_1 = r_-^{(2)}/2, \quad \lambda_2 = r_+^{(2)}/2 \quad \text{при} \quad \lambda_3 = \lambda_4. \quad (92)$$

Таким образом, приходим к зависимости римановых инвариантов от пространственной координаты, показанной на рис. 10, со следующими значениями постоянных римановых инвариантов:

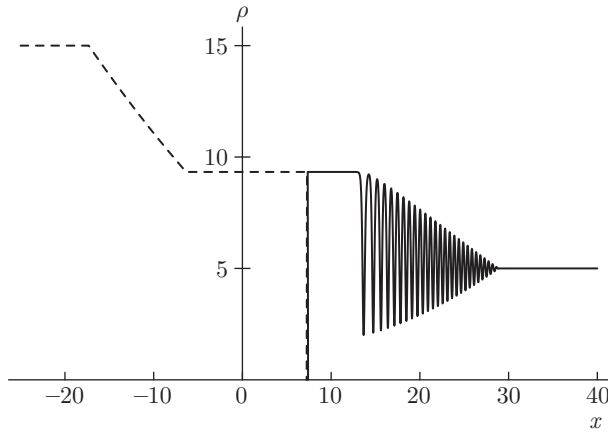


Рис. 11. Аналитическое решение эволюции ступеньки для несмешивающихся компонент. Параметры такие же, как и на рис. 9. Штриховой линией показана левая компонента

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2}\bar{u} + \sqrt{g_{22}\bar{\rho}_2} = \\ &= \frac{2g_{22}^{1/4}\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} + (g_{22}^{1/4} - g_{11}^{1/4})\sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}}. \end{aligned} \tag{93}$$

Зависимость же переменного риманова инварианта  $\lambda_3$  от  $\zeta = x/t$  определяется неявно уравнением

$$v_3 \left( -\sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}, \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}, \lambda_3, \frac{1}{2}\bar{u} + \sqrt{g_{22}\bar{\rho}_2} \right) = \frac{x}{t}. \tag{94}$$

Подстановка найденных значений римановых инвариантов в периодическое решение (80) дает зависимость плотности конденсата от координаты при фиксированном значении времени. Она иллюстрируется на рис. 11 для тех же значений параметров, при которых был сделан численный расчет, результаты которого показаны на рис. 9. Как мы видим, имеется хорошее согласие аналитических результатов с численными.

Полученные формулы дают также аналитические выражения для скоростей краев дисперсионной ударной волны. Солитонный край движется со скоростью

$$\begin{aligned} s_-^{(2)} &= v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_4) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4) = \\ &= \frac{g_{22}^{1/4}(\sqrt{g_{11}\rho_{1,0}} + \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}})}{g_{11}^{1/4} + g_{22}^{1/4}}, \end{aligned} \tag{95}$$

а скорость малоамплитудного края равна

$$\begin{aligned} s_+^{(2)} &= v_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_4) = \\ &= \lambda_4 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{2(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)}{2\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2} = \\ &= \frac{2(\bar{u} + \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}})^2 - g_{22}\rho_{2,0}}{\bar{u} + \sqrt{g_{22}\rho_{2,0}}}. \end{aligned} \tag{96}$$

При равенстве нелинейных постоянных  $g_{11} = g_{22} = g$  эти скорости равны

$$\begin{aligned} s_-^{(2)} &= \frac{\sqrt{g}}{2}(\sqrt{\rho_{1,0}} + \sqrt{\rho_{2,0}}), \\ s_+^{(2)} &= \frac{\sqrt{g}(2\rho_{1,0} - \rho_{2,0})}{\sqrt{\rho_{1,0}}}. \end{aligned} \tag{97}$$

Эти значения также хорошо согласуются с результатами численного расчета.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты этой работы показывают, что динамика разлета двухкомпонентного конденсата отличается большим разнообразием по сравнению с однокомпонентным случаем. Во-первых, начальные состояния двухкомпонентного конденсата могут образовывать различные конфигурации в неоднородном поле ловушки, и мы построили фазовую диаграмму этих состояний, уточнив предыдущие исследования других авторов. Во-вторых, простой автомодельный анзац, с успехом применявшийся в теории разлета однокомпонентного конденсата, имеет теперь ограниченную применимость, описывая в основных чертах разлет двухкомпонентного конденсата лишь вдали от линии перехода от смешиваемых компонент к несмешиваемым. Наконец, в-третьих, если компоненты не смешиваются, то возможны режимы разлета с генерацией дисперсионных ударных волн, что может представлять интерес как для анализа течений конденсата в конкретных экспериментальных условиях, так и для нелинейной физики в целом. Полученные в работе результаты позволяют предсказать основные характеристики динамики разлета и дать оценки основных параметров возникающих волновых структур.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00398).

### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon, Oxford (2003).

2. M. R. Andrews, M.-O. Mewes, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Science* **273**, 84 (1996).
3. U. Ernst, J. Schuster, F. Schreck, A. Marte, A. Kuhn, and G. Rempe, *Appl. Phys. B* **67**, 719 (1998).
4. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, 3 (1996).
5. Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
6. F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, and L. Pitaevskii, *Phys. Lett. A* **227**, 259 (1997).
7. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
8. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **125**, 1041 (2004).
9. G. Ferrari, M. Inguscio, W. Jastrzebski, G. Modugno, G. Roati, and A. Simoni, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 053202 (2002).
10. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
11. S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 040402 (2008).
12. G. Delanno, S. G. Murdoch, V. Boyer, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. A* **63**, 051602 (2001).
13. C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
14. D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
15. J. Quach, *J. Phys. B: Atom., Mol. Opt. Phys.* **47**, 215007 (2014).
16. P. Ao and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **58**, 4836 (1998).
17. K. L. Lee, N. B. Jorgensen, I-K. Liu, L. Wacker, J. J. Arlt, and N. P. Proukakis, *Phys. Rev. A* **94**, 013602 (2016).
18. M. Trippenbach, K. Gral, K. Rzazewski, B. Malomed, and Y. B. Band, *J. Phys. B: Atom., Mol. Opt. Phys.* **33**, 4017 (2000).
19. S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, *Phys. Rev. A* **82**, 033609 (2010).
20. B. J. Verhaar, E. G. M. van Kempen, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, *Phys. Rev. A* **79**, 032711 (2009).
21. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **145**, 719 (2014).
22. А. М. Камчатнов, А. Gammal, and R. A. Kraenkel, *Phys. Rev. A* **69**, 063605 (2004).
23. M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels, and V. Schweikhard, *Phys. Rev. A* **74**, 023623 (2006).
24. M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, and P. Engels, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 084504 (2008).
25. А. М. Камчатнов, С. В. Корнеев, *ЖЭТФ* **137**, 191 (2010).
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика, Физматлит, Москва* (2006).
27. А. М. Камчатнов, *Nonlinear Periodic Waves and their Modulations*, World Sci., Singapore (2000).
28. G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. A* **283**, 238 (1965).
29. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
30. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
31. G. A. El and M. A. Hoefer, *Physica D* **333**, 11 (2016).
32. M. G. Forest and J. E. Lee, in *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness*, ed. by C. Dafermos et al., IMA Volumes on Mathematics and its Applications **2**, Springer, New York (1987).
33. М. В. Павлов, *ТМФ* **71**, 351 (1987).
34. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, *ЖЭТФ* **92**, 1684 (1987).
35. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, *Physica D* **87**, 186 (1995).