

ТЕРМОПОЛЕВАЯ ЭМИССИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ ПАРАБОЛОИДАЛЬНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОСТРИЯ

*А. Б. Петрин**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 января 2017 г.

На основе разработанного теоретического метода нахождения электрического поля в окрестности металлического острия параболоидальной формы, расположенного у плоской металлической поверхности, и теории термополевой электронной эмиссии из металла рассмотрена задача определения тока эмиссии в зависимости от напряжения, радиуса закругления острия и расстояния между острием и проводящей плоскостью. Приводятся универсальные вольт-амперные характеристики для медного острия при различных расстояниях от острия до плоскости, пригодные для количественных оценок величин токов в различных физических задачах.

DOI: 10.7868/S0044451017060025

ве теоретического подхода работы [7] определяется полный ток электронной эмиссии с острия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема нахождения эмиссии электронов с вершины металлического заряженного острия, расположенного над проводящей плоскостью, возникает во многих физических задачах. Указанная проблема является важной при изучении инициации коронного и стримерного разрядов и связанных с ними предпробойных явлений [1, 2], в задачах о кипении жидкостей в электрическом поле [3]. Решение данной проблемы необходимо при исследовании сканирования поверхности металлическим острием, возбужденным сходящейся к нему поверхностной плазмонной волной оптического диапазона частот, в задачах локальной рамановской спектроскопии поверхности [4, 5], а также в сканирующей туннельной микроскопии [6]. В данной работе граница металлического острия приближается поверхностью параболоида вращения.

Для решения задачи нахождения термополевой эмиссии электронов из острия в данной работе предлагается эффективный численный метод расчета электрического поля в окрестности вершины острия при различных расстояниях между вершиной острия и проводящей перпендикулярной плоскостью. Из найденного распределения поля на осно-

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ У ВЕРШИНЫ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОСТРИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим металлическое острие с радиусом закругления вершины R , находящееся под постоянным потенциалом U . Пусть поверхность острия вблизи вершины представляется (осесимметричным относительно оси z) параболоидом вращения $z = R/2 - (x^2 + y^2)/2R$ (рис. 1). Пусть вблизи острия находится перпендикулярная его оси металлическая плоскость с нулевым потенциалом, определяемая уравнением $z = z_0$, где $z \geq R/2$. Пусть пространство между острием и металлической плоскостью $z = z_0$ заполнено вакуумом.

Потенциал электростатического поля Φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$. В силу симметрии задачи ищем осесимметричное решение уравнения Лапласа, имеющее максимум на вершине острия. Для автоматического удовлетворения граничных условий на поверхности металлической плоскости используем метод зеркальных изображений. Суть метода, в применении к рассматриваемой задаче, состоит в следующем: пусть потенциал зарядов, находящихся на параболоидальном металлическом острие, описывается функцией $\Phi_{tip}(\mathbf{r}) =$

* E-mail: a_petrin@mail.ru

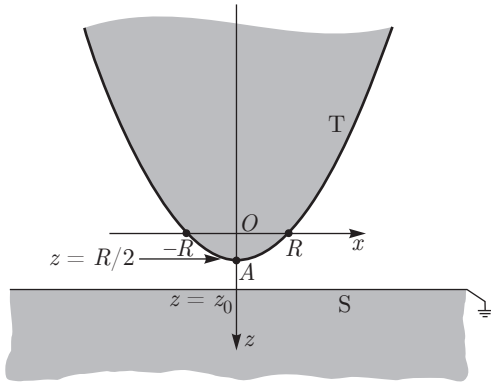


Рис. 1. Геометрия задачи: Т — острие; S — металлическая плоскость

$= \Phi_{tip}(x, y, z)$, где радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ проведен из начала координат в точку нахождения потенциала. Тогда полный потенциал зарядов острия и зеркально-расположенных зарядов будет равен нулю при $z = z_0$, т. е. потенциал

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{tip}(x, y, z) - \Phi_{tip}(x, y, 2z_0 - z)$$

будет автоматически равен нулю при $z = z_0$.

Для нахождения $\Phi_{tip}(\mathbf{r})$ введем параболоидальные координаты α, β, ψ [8] (или систему параболоидальных координат вращения), которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= c\alpha \cos \psi, & y &= c\alpha\beta \sin \psi, \\ z &= \frac{1}{2}c(\beta^2 - \alpha^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где c — масштабный постоянный множитель. В рассматриваемой системе координат с началом в точке O и осью z (см. рис. 1) уравнение Лапласа для электрического потенциала Φ внутри и снаружи острия при аксиальной симметрии (Φ не зависит от ψ) можно записать в виде [8]

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \times \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) = 0. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2) известно [8] и определяется выражением

$$\Phi = \sum [B_1 J_0(p\alpha) + B_2 Y_0(p\alpha)] \times [C_1 I_0(p\beta) + C_2 K_0(p\beta)], \quad (3)$$

где p, B_1, B_2, C_1, C_2 — константы, J_0 и Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, I_0

и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Суммирование проводится по решениям с различными значениями констант.

Пусть граница параболоидального острия определяется уравнением $\beta = \beta_0$. Из (1) следует, что граница острия $\beta = \beta_0$ в декартовых координатах x, y, z определяется уравнением

$$z = \frac{c\beta_0^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2c\beta_0^2}.$$

Несложно показать, что радиус кривизны вершины острия равен $R = c\beta_0^2$.

В дальнейшем будем использовать осесимметричные решения уравнения Лапласа. Поэтому для выполнения граничных условий на всей поверхности вращения острия будет достаточно удовлетворить их на линии пересечения граничной поверхности острия с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось z . В качестве такой плоскости мы будем выбирать плоскость xz . Легко доказать, что в нашем случае достаточно рассмотреть выполнение граничных условий только на границе пересечения полуплоскости $y = 0$ при $x \geq 0$ и поверхности параболоидального острия.

Имея ввиду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta_0}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\beta_0}.$$

Безразмерные параболоидальные $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и декартовы координаты на плоскости $\tilde{x}\tilde{z}$ при положительных \tilde{x} связаны между собой формулами [9]

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{x} / \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}.$$

Кроме того, введем нормированный безразмерный потенциал $\tilde{\Phi} = \Phi/U$. В безразмерных координатах граница острия определяется функцией $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$, а уравнение Лапласа (2) имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\alpha}^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\beta}^2} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\beta}} \right) = 0. \quad (4)$$

В нормированных декартовых координатах в плоскости $\tilde{x}\tilde{z}$ компоненты нормированного электрического поля имеют вид

$$\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{x}}, \quad \tilde{E}_{\tilde{z}} = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{z}}.$$

Нам для дальнейшего удобно рассматривать потенциал $\tilde{\Phi}$ как функцию \tilde{x} и \tilde{z} в плоскости $\tilde{x}\tilde{z}$.

Итак, задача нахождения электрического потенциала формулируется следующим образом. Необходимо найти решение уравнения Лапласа $\Delta\tilde{\Phi} = 0$ (см. (4)), удовлетворяющее на поверхностях острия Т (при $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$) и металлической плоскости S (при $\tilde{z} = \tilde{z}_0$) следующим граничным условиям (см. рис. 1):

$$\tilde{\Phi}|_T = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, 1/2 - \tilde{x}^2/2) = 1, \quad (5)$$

$$\tilde{\Phi}|_S = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{z}_0) = 0. \quad (6)$$

Исходя из общего решения (3), ищем решение граничной задачи для электрического поля в окрестности острия, предполагая, что потенциал $\tilde{\Phi}_{tip}$ снаружи границы металлического острия ($\tilde{\beta} \geq 1$) имеет вид

$$\tilde{\Phi}_{tip} = A_0 J_0(q_0 \tilde{\alpha}) K_0(q_0 \tilde{\beta}) + \sum_{j=1}^N A_j J_0(q_j \tilde{\alpha}) K_0(q_j \tilde{\beta}), \quad (7)$$

где A_j и q_j — константы.

Выбор функциональных зависимостей в (7) из общего решения (3) обусловлен естественным требованием к сконцентрированному у вершины полю (которое и выделяет данную зависимость однозначным образом): потенциал поля острия должен уменьшаться при удалении от поверхности острия, быть конечным и максимальным на вершине острия.

Первый член в формуле (7) является решением задачи для одиночного острия. В работе [10] было найдено решение задачи для одиночного острия в квазистатической формулировке с учетом зависимости диэлектрической проницаемости металла от частоты. Было показано, что потенциал электрического поля снаружи острия имеет вид $\tilde{\Phi}_0 \sim J_0(q_0 \tilde{\alpha}) K_0(q_0 \tilde{\beta})$, причем $q_0 \rightarrow 0$ при стремлении частоты к нулю. В первом члене соотношения (7) используем это выражение с достаточно малой величиной q_0 и считаем его нулевым приближением решения задачи (4), (5). Конкретное значение q_0 выбиралось таким образом, чтобы вблизи вершины острия в рассматриваемой области изменения $\tilde{\alpha}$ отличие функции $J_0(q_0 \tilde{\alpha})$ от единицы было много меньше заданной точности вычислений в рассматриваемой задаче и не приводило к проблемам при численной реализации (дальнейшие вычисления показали, что $q_0 = 0.001$ — отличный выбор).

Второй член в выражении (7) дает приближенное представление потенциала поляризационных рядов на поверхности острия, вызванных наличием

проводящей плоскости рядом. Значения q_j выбирались в виде $q_j = \mu_j/L$, где μ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) — первые N корней уравнения Бесселя $J_0(\mu_j) = 0$, а L — некоторое безразмерное расстояние от вершины, на котором мы будем удовлетворять граничным условиям на поверхности острия. В пределе $N \rightarrow \infty$ система функций $J_0(q_j \tilde{\alpha})$ с указанным выше выбором q_j на отрезке $0 \leq \tilde{\alpha} \leq L$ образуют полную систему функций [11].

Полный потенциал поля между острием и плоскостью в декартовых координатах, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{tip}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{\Phi}_{tip}(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_0 - \tilde{z})$, на плоскости $\tilde{x}\tilde{z}$ при положительных значениях \tilde{x} можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{z}) = & \sum_{j=0}^N A_j J_0 \left(q_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}} \right) \times \\ & \times K_0 \left(\frac{q_j \tilde{x}}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}} \right) - \\ & - \sum_{j=0}^N A_j J_0 \left(q_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + (2\tilde{z}_0 - \tilde{z})^2} - (2\tilde{z}_0 - \tilde{z})} \right) \times \\ & \times K_0 \left(\frac{q_j \tilde{x}}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + (2\tilde{z}_0 - \tilde{z})^2} - (2\tilde{z}_0 - \tilde{z})}} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где $\tilde{z}_0 = z_0/R$ — нормированная ордината плоской границы.

На границе острия (при $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$) условие (5) представляется в явном виде уравнением

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N A_j J_0 \left(q_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \left(\frac{1 - \tilde{x}^2}{2}\right)^2} - \frac{1 - \tilde{x}^2}{2}} \right) \times \\ \times K_0 \left(\frac{q_j \tilde{x}}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \left(\frac{1 - \tilde{x}^2}{2}\right)^2} - \frac{1 - \tilde{x}^2}{2}}} \right) - \\ - \sum_{j=0}^N A_j J_0 \left(q_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + z_{ref}^2(\tilde{x})} - z_{ref}(\tilde{x})} \right) \times \\ \times K_0 \left(\frac{q_j \tilde{x}}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + z_{ref}^2(\tilde{x})} - z_{ref}(\tilde{x})}} \right) = 1, \quad (9) \end{aligned}$$

где $z_{ref}(\tilde{x}) = 2\tilde{z}_0 - (1 - \tilde{x}^2)/2$, а условие (6) при этом удовлетворяется автоматически.

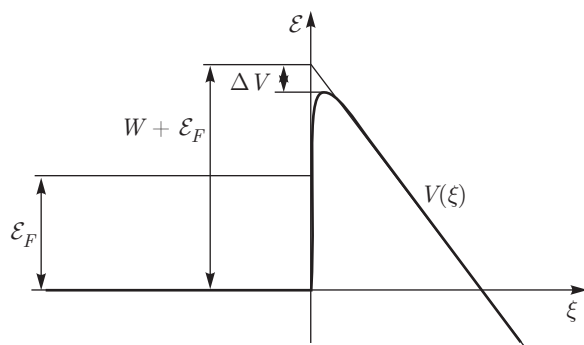


Рис. 2. Зависимость потенциальной энергии электрона от координаты ξ , которая перпендикулярна поверхности металла (барьер Шоттки)

В данной работе задача нахождения потенциала решалась методом коллокаций. Так, уравнение (9) записывалось в точках $\tilde{x}_i = iL/N$, где $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Полученная в результате система линейных уравнений относительно A_j решалась численно. Остальные параметры вычислений были следующие: $L = 20$, $N = 100$, $q_0 = 0.001$, а величина \tilde{z}_0 изменялась в соответствии с геометрией задачи (расстоянием от острия до плоскости).

Необходимо отметить, что задачи нахождения электрического поля, подобные исследуемой в данной работе, рассматривались многими численными методами [12–14]. Однако ясность физического подхода, вычислительная эффективность, простота и точность предлагаемого решения, как кажется, заслуживают внимания читателя.

3. ТЕРМОПОЛЕВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ИЗ МЕТАЛЛА

Термополевая электронная эмиссия из металла острия исследовалась с помощью подхода, изложенного в работах [7, 15]. Плотность тока j с поверхности металла вычислялась по известной формуле

$$j = \frac{4\pi e m k T}{h^3} \int_0^\infty D(\mathcal{E}_n) \times \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_F}{kT} \right) \right] d\mathcal{E}_n, \quad (10)$$

где e и m — заряд и масса электрона, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, T — абсолютная температура катода, \mathcal{E}_F — энергия Ферми металла, \mathcal{E}_n — кинетическая энергия электрона, соответствующая составляющей скорости электрона,

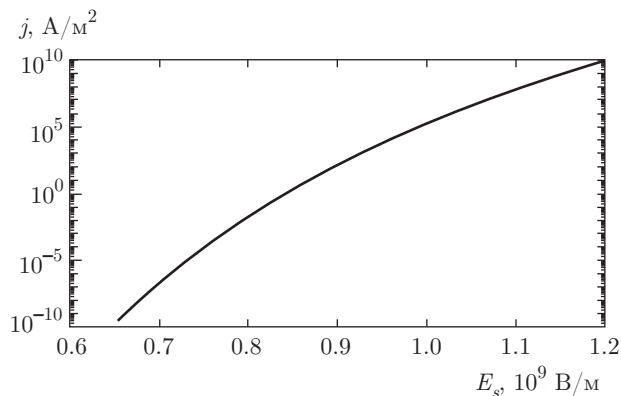


Рис. 3. Зависимость плотности тока термополевой эмиссии для меди ($W = 4.5$ эВ, $\mathcal{E}_F = 7.0$ эВ при температуре $T = 300$ К) от напряженности электрического поля E_s на поверхности металла

перпендикулярной поверхности, $D(\mathcal{E}_n)$ — квантовомеханический коэффициент прохождения электрона с энергией \mathcal{E}_n потенциального барьера на границе металла и окружающего вакуума.

Потенциальный барьер $V(\xi)$ на границе металла для выходящих из него электронов описывался барьером Шоттки (рис. 2) с потенциальной энергией электрона

$$V(\xi) = \begin{cases} W + \mathcal{E}_F - e^2/16\pi\epsilon_0\xi - eE_s\xi, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq \xi_l, \end{cases} \quad (11)$$

где ξ — координата по оси, перпендикулярной поверхности металла, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, W — работа выхода из металла, E_s — напряженность внешнего электрического поля на поверхности металла, ξ_l — меньший из корней уравнения $W + \mathcal{E}_F - e^2/16\pi\epsilon_0\xi - eE_s\xi = 0$.

Квантовомеханическая задача прохождения через барьер Шоттки (11) и нахождения коэффициента $D(\mathcal{E}_n)$ сводится к решению уравнения Шредингера для падающей на барьер волны единичной амплитуды. Она решалась численным методом, подробно рассмотренным в работе [7]. Поэтому, для экономии места, в данной работе не обсуждается.

Была решена задача нахождения зависимости плотности тока термополевой эмиссии для меди ($W = 4.5$ эВ, $\mathcal{E}_F = 7.0$ эВ) при температуре $T = 300$ К от напряженности электрического поля E_s на поверхности металла. Результаты расчетов зависимости $j = j(E_s)$ по формуле (10) показаны на рис. 3.

Эта зависимость будет использована для нахождения тока эмиссии с поверхности параболаидального медного острия.

4. ТЕРМОПОЛЕВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОСТРИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО У ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Для нахождения тока термополевой электронной эмиссии из острия мы примем следующие предположения. Во-первых, будем считать, что с физически бесконечно малой площадки на поверхности острия плотность тока эмиссии такая же, как с такой же площадки плоской поверхности того же металла, т.е. плотность тока эмиссии (10) определяется локальными параметрами элемента поверхности, его температурой и электрическим полем в данной точке поверхности. Во-вторых, будем считать, что объемный заряд между острием и проводящей плоскостью пренебрежимо мал и электрическое поле между ними такое же, как в отсутствие тока. Такое приближение разумно, так как задача будет рассматриваться при относительно небольших полях и низких (комнатных) температурах.

Рассмотрим для примера конкретное параболоидальное медное острие. Пусть радиус кривизны вершины острия равен R , а расстояние от вершины острия до металлической плоскости равно d . Безразмерная координата проводящей плоскости (см. рис. 1) равна $\tilde{z}_0 = 0.5 + d/R$. Тогда можно решить задачу нахождения электрического поля описанным выше методом и получить распределение нормированного электрического потенциала, а затем и модуля нормированного электрического поля $\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{z})$. Можно показать, что это распределение поля определяется только одним параметром — \tilde{z}_0 . Затем на поверхности острия можно найти поле

$$\tilde{E}_s = \tilde{E}_s(\tilde{x}) = \tilde{E}\left(\tilde{x}, \frac{1}{2} - \frac{\tilde{x}^2}{2}\right).$$

Для рассматриваемого острия размерное поле на поверхности равно

$$E_s(x) = \frac{U}{R} \tilde{E}_s\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{U}{R} \tilde{E}\left(\frac{x}{R}, \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2R^2}\right),$$

где U — модуль напряжения острия, полярность которого отрицательна по отношению к заземленной плоскости.

Тогда полный ток эмиссии с острия определится интегралом по его поверхности:

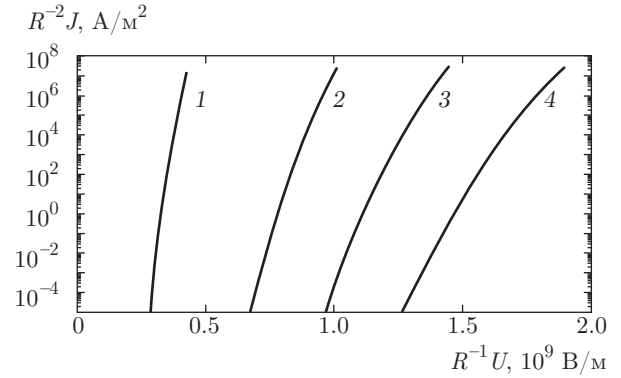


Рис. 4. Зависимости $R^{-2}J$ от $R^{-1}U$ для четырех значений нормированных расстояний $\tilde{d} = d/R$ от вершины острия до плоскости: 0.5, 2, 4.5, 10 (соответственно кривые 1, 2, 3, 4)

$$J = \int j dS = \int_0^\infty j(E_s(x)) 2\pi x \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}} dx = R^2 \int_0^\infty j\left(\frac{U}{R} \tilde{E}_s(\tilde{x})\right) 2\pi \tilde{x} \sqrt{1 + \tilde{x}^2} d\tilde{x}.$$

Итак, мы получили вольт-амперную характеристику рассматриваемой системы электродов:

$$J = J(U) = R^2 \int_0^\infty j\left(\frac{U}{R} \tilde{E}_s(\tilde{x})\right) 2\pi \tilde{x} \sqrt{1 + \tilde{x}^2} d\tilde{x}. \quad (12)$$

Если построить зависимость (12) в координатах $R^{-2}J, R^{-1}U$, то мы получим универсальную вольт-амперную характеристику, конкретный вид которой определяется только \tilde{z}_0 (или нормированным расстоянием от вершины острия до плоскости $\tilde{d} = d/R = \tilde{z}_0 - 0.5$) и видом металла острия (зависимостью $j = j(E_s)$). На рис. 4 показаны такие зависимости для четырех значений $\tilde{d} = 0.5, 2, 4.5, 10$ (или, что то же самое, для четырех значений $\tilde{z}_0 = 1, 2.5, 5, 10.5$). При вычислении интеграла в (12) верхний предел интегрирования принимался равным $L = 20$, что было отличным приближением, так как ток в основном определяется эмиссией из малой области вблизи вершины острия.

Верхняя граница напряжений для каждой из кривых (см. рис. 4) выбиралась таким образом, чтобы максимальное электрическое поле на вершине при максимальном напряжении было равно значению $E_{max} = 1.13 \cdot 10^9$ В/м. Как было показано в работе [15], при этом значении поля происходит переход от охлаждения поверхности (из-за эмиссии электронов) к эмиссионному нагреву поверх-

ности, причем нагрев возникает лавинообразно из-за положительной обратной связи по температуре, что приводит к разрушению или изменению формы острия. Указанное значение напряженности $E_{max} = 1.13 \cdot 10^9$ В/м перехода от охлаждения к нагреву соответствует медной поверхности ($W = 4.5$ эВ, $\mathcal{E}_F = 7.0$ эВ) при температуре $T = 300$ К. Таким образом, кривые на рис. 4 могут использоваться и для определения диапазона рабочих напряжений стабильной эмиссии.

Отметим, что каждая кривая на рис. 4 соответствует набору подобных геометрий. Указанная универсальная зависимость была получена в предположении локально-плоской эмиссии электронов и отсутствия пространственного заряда. Поэтому интересно было бы экспериментально исследовать указанные зависимости в широких пределах изменения коэффициента подобия задачи для нахождения пределов применимости указанных предположений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод нахождения электрического поля в окрестности металлического острия параболаидальной формы, расположенного у проводящей плоскости. На основе теории термополевой эмиссии электронов из металла найдены универсальные вольт-амперные характеристики эмиссии из металлических острий в подобной геометрии. Приведенные закономерности будут полезны для решения различных физических задач и проведения инженерных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (научный проект «Оптические транзисторы на основе метаматериалов». Соглашение о предоставлении субсидии с Министерством образования и науки Российской Федерации от

29.09.2016 г. № 14.577.21.0219, уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI 57716 X 0219).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
2. А. А. Белевцев, ТВТ **53**, 824 (2015).
3. В. С. Воробьев, С. П. Малышенко, А. Б. Петрин, ТВТ **44**, 892 (2006).
4. L. Langelüddecke, P. Singh, and V. Deckert, Appl. Spectrosc. **69**, 1357 (2015).
5. V. Deckert, T. Deckert-Gaudig, M. Diegel et al., Faraday Discuss. **177**, 9 (2015).
6. E. Stoll, A. Baratoff, A. Selloni, and P. Carnevali, J. Phys. C **17**, 3073 (1984).
7. А. Б. Петрин, ЖЭТФ **136**, 369 (2009).
8. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров*, Наука, Москва (1967).
9. А. Б. Петрин, Усп. прикл. физ. **3**, 236 (2015).
10. А. Б. Петрин, КЭ **45**, 658 (2015).
11. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва (1984).
12. П. Хокс, Э. Каспер, *Основы электронной оптики*, т. 1, 2, Мир, Москва (1993).
13. Ch. Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics*, Artech, Boston (1990).
14. А. Б. Петрин, Физика плазмы **36**, 671 (2010).
15. А. Б. Петрин, ТВТ **49**, 492 (2011).