

# ТЕОРИЯ СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЫ $S$ -СОСТОЯНИЙ МЮОННОГО ТРИТИЯ

А. П. Мартыненко<sup>а\*</sup>, Ф. А. Мартыненко<sup>а</sup>, Р. Н. Фаустов<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Самарский государственный университет  
443011, Самара, Россия

<sup>б</sup> Институт образовательной информатики ФГУ ФИЦ ИУ Российской академии наук  
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 февраля 2017 г.

В рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике выполнен расчет сверхтонкой структуры спектра энергии  $S$ -уровней мюонного трития. Учтены эффекты порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$  в поляризации вакуума, а также в структуре и отдаче ядра, в релятивистские поправки. Полученные численные значения сверхтонких расщеплений 239.819 мэВ ( $1S$ -состояние), 29.965 мэВ ( $2S$ -состояние) могут рассматриваться как надежная оценка для сравнения с экспериментальными данными коллаборации CREMA, а интервал сверхтонкой структуры  $\Delta_{12} = 8\Delta E^{hfs}(2S) - \Delta E^{hfs}(1S) = -0.100$  мэВ можно использовать для проверки предсказаний квантовой электродинамики. Полученные прецизионные значения сверхтонких расщеплений важны также для вычисления скоростей образования мезомолекул ( $\mu dt$ ) в реакциях мюонного катализа.

DOI: 10.7868/S0044451017060062

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Отрицательно заряженные мюоны как и электроны могут образовывать водородоподобные атомы с ядрами. Мюонный тритий ( $\mu t$ ) состоит из отрицательного мюона и тритона. Тритон является  $\beta^-$ -радиоактивным ядром с периодом полураспада около 12 лет. Время жизни мюонного трития определяется временем распада мюона  $\tau_\mu = 2.19703(4) \cdot 10^{-6}$  с. Хотя мюон нестабильная частица, но его времени жизни вполне достаточно для прецизионного исследования уровней энергии ( $\mu t$ ). Поскольку спин тритона, как и протона, равен  $1/2$ , структура его уровней энергии имеет такой же вид, что и для мюонного водорода. Различие в положении уровней энергии обусловлено прежде всего разностью масс ядер, а также их структурой. Как и для обычного мюонного водорода, существует ряд эффектов в поляризации вакуума, структуре и поляризуемости ядра отдачи, которые существенным образом влияют на сверхтонкую структуру спектра [1–13] (см. ссылки в работах [4, 13]). Эти эффекты характеризуются по величине степенью постоянной тонкой структуры  $\alpha$ . Наши предыдущие исследования [14–16] показы-

вают, что прецизионный расчет сверхтонкой структуры (СТС) уровней энергии должен включать эти поправки в пятом и шестом порядке по  $\alpha$  в первом и втором порядках теории возмущений. Они могут усиливаться появлением логарифмических факторов  $\ln \alpha$ ,  $\ln(m_1/m_2)$  (логарифм отношения масс частиц). Цель данной работы состоит в анализе возможных взаимодействий между мюоном и тритоном, которые приводят к поправкам порядка  $\alpha^5 \div \alpha^6$  в сверхтонком расщеплении  $S$ -уровней энергии, и их последующем аналитическом и численном вычислении. Сравнение сверхтонкой структуры спектра мюонного водорода и мюонного трития, выявление различий между ними представляет значительный интерес в связи с уже проведенными экспериментами с мюонными водородом и дейтерием коллаборацией CREMA (Charge Radius Experiments with Muonic Atoms) [17–20]. Так, в результате измерения частоты перехода  $2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1}$  было получено более точное значение зарядового радиуса протона  $r_p = 0.84184(67)$  фм, которое меньше значения, рекомендованного CODATA на  $7\sigma$ . Значение CODATA основано на спектроскопии атома электронного водорода и экспериментах по электрон-нуклонному рассеянию. Измерение частоты перехода  $2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0}$  для синглетного  $2S$ -состоя-

\* E-mail: a.p.martynenko@samsu.ru

ния ( $\mu p$ ) позволило получить сверхтонкое расщепление  $2S$ -уровня энергии в мюонном водороде, а также значения радиуса Земаха  $r_Z = 1.082(37)$  фм и магнитного радиуса  $r_M = 0.87(6)$  фм. Выполненное впервые в 2016 г. измерение методами лазерной спектроскопии трех частот перехода между уровнями энергии  $2P$  и  $2S$  для мюонного дейтерия ( $2S_{1/2}^{F=3/2} - 2P_{3/2}^{F=5/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2} - 2P_{3/2}^{F=3/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2} - 2P_{3/2}^{F=1/2}$ ) позволило получить в 2.7 раза более точное значение зарядового радиуса дейтрона, которое также меньше значения, рекомендованного CODATA, на  $7.5\sigma$  [20]. В результате возникла ситуация, когда имеется расхождение между значениями такого фундаментального параметра ядер, как его зарядовый радиус, полученного из электронных и мюонных атомов. В процессе поиска возможных решений «загадки» зарядового радиуса протона высказывались различные гипотезы, включая идею неуниверсальности взаимодействия электронов и мюонов с нуклонами. Возможно, что включение в область экспериментальных исследований таких мюонных атомов, как мюонный гелий ( $\mu_2^3\text{He}^+$ ), мюонный тритий ( $\mu t$ ) с ядрами, состоящими из трех нуклонов, или других легких мюонных атомов, позволит прояснить возникшую проблему.

В экспериментах коллаборации CREMA ставится одна очень важная задача: получить на порядок более точные значения зарядовых радиусов простейших ядер (протон, дейтрон, гелион, альфа-частица, ...), которые входят в том или ином виде в теоретические выражения для интервалов тонкой или сверхтонкой структуры спектра. При этом используется высокая чувствительность характеристик связанного мюона к распределению плотности заряда и магнитного момента ядра. Успешная реализация этой программы возможна лишь в сочетании с прецизионными теоретическими расчетами различных энергетических интервалов, измеряемых экспериментально. Таким образом, задача более точного теоретического построения оператора взаимодействия частиц в квантовой электродинамике, расчета новых поправок в спектре энергии мюонных атомов приобретает особую актуальность. Важно при этом отметить, что в отличие от электронных водородоподобных атомов, для которых в течение нескольких десятилетий были получены многочисленные теоретические результаты в виде аналитических формул и которые можно использовать для численных оценок вкладов в разных атомах, в случае мюонных атомов всегда имеется определенный набор поправок в спектре энергии, специ-

фичных для каждого мюонного атома. Они должны быть вычислены индивидуально для каждого мюонного атома.

В последние годы точность теоретических расчетов тонкой и сверхтонкой структур спектра мюонных атомов существенно возросла. Это стало возможным в результате более точного построения оператора взаимодействия частиц, учета новых амплитуд взаимодействия частиц в квантовой электродинамике, учета поправок не только во втором, но и в третьем порядке теории возмущений. Определенный прогресс был также достигнут за счет использования современных экспериментальных данных по структурным функциям глубоко неупругого лептон-нуклонного рассеяния. Цель настоящей работы состоит в продолжении наших исследований сверхтонкой структуры спектра в случае мюонного трития. Мы проводим расчет поправок порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$  и получаем сверхтонкие расщепления  $S$ -уровней энергии мюонного трития с точностью 0.001 мэВ, что, как минимум, на порядок лучше предшествующих результатов. Важно также отметить, что точное знание положения уровней энергии мюонного трития имеет особое значение при вычислении скоростей протекания реакций слияния ядер дейтерия и трития в мезомолекулах (мюонный катализ ядерных реакций).

## 2. ЭФФЕКТЫ ОДНОПЕТЛЕВОЙ И ДВУХПЕТЛЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для исследования сверхтонкой структуры спектра энергии мюонного трития мы используем квази-потенциальный метод в квантовой электродинамике, в котором связанное состояние мюона и тритона описывается в лидирующем порядке по постоянной тонкой структуры уравнением Шредингера с кулоновским потенциалом [21–23]. Первая часть важных поправок в спектре энергии  $S$ -состояний определяется гамильтонианом Брейта [21, 22, 24] (далее используется индекс « $hfs$ » для обозначения вклада в СТС спектра энергии):

$$H_B = H_0 + \Delta V_B^{fs} + \Delta V_B^{hfs}, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r}, \quad (1)$$

$$\Delta V_B^{fs} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left( \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta V_B^{hfs} = \frac{8\pi\alpha\mu_t}{3m_1m_p} (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $m_1, m_2$  — соответственно массы мюона и тритона,  $m_p$  — масса протона,  $\mu_t$  — магнитный момент тритона. Усредняя потенциал спин-спинового взаимодействия (3) по волновым функциям 1S- и 2S-состояний

$$\begin{aligned} \psi_{100}(r) &= \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \\ \psi_{200}(r) &= \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi} e^{-Wr/2} \left(1 - \frac{Wr}{2}\right), \quad W = \mu Z\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

получим основной вклад порядка  $\alpha^4$  в сверхтонкое расщепление S-уровней (энергия Ферми) ( $Z = 1$  для тритона):

$$E_F(nS) = \frac{8\mu^3\alpha^4\mu_t}{3m_1m_p n^3} = \begin{cases} 1S: 239.9192 \text{ мЭВ}, \\ 2S: 29.9899 \text{ мЭВ}. \end{cases} \quad (5)$$

Поправку к (5), связанную с аномальным магнитным моментом (АММ) мюона, удобно представить отдельно, используя экспериментальное значение АММ мюона  $a_\mu = 1.16592091(63) \cdot 10^{-3}$  [25]:

$$\Delta E_{a_\mu}^{hfs}(nS) = a_\mu E_F(nS) = \begin{cases} 1S: 0.2797 \text{ мЭВ}, \\ 2S: 0.0350 \text{ мЭВ}. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что в настоящее время имеется расхождение между экспериментальным значением и теоретической пятипетлевой КЭД величиной АММ мюона, которое не превышает  $3\sigma$  [26, 27]. Это различие никак не сказывается на численных значениях различных вкладов, полученных в данной работе с точностью 0.0001 мЭВ. Так, например, лидирующий вклад порядка  $O(\alpha^5)$ , связанный с АММ мюона, имеет численное значение 0.2797 мЭВ (формула (6) для 1S-состояний). Расхождение между теорией и экспериментом по АММ мюона влияет лишь на шестую цифру после запятой. В других же вкладах это различие существенно меньше.

В аналитическом виде известна также релятивистская поправка порядка  $\alpha^6$  в сверхтонкой структуре спектра, которая была получена в рамках релятивистской теории Дирака [1, 28]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel}^{hfs}(nS) &= \left[1 + \frac{11n^2 + 9n - 11}{6n^2} (Z\alpha)^2 + \dots\right] \times \\ &\times E_F(nS) = \begin{cases} 1S: 0.0192 \text{ мЭВ}, \\ 2S: 0.0034 \text{ мЭВ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

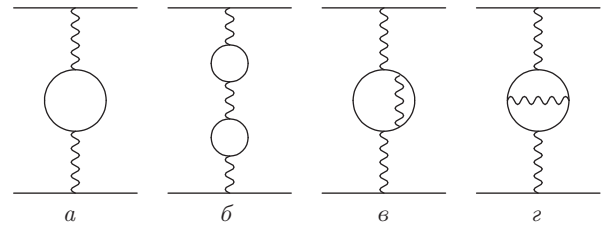


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

Имеются многочисленные поправки к гамильтониану Брейта, которые дают в СТС вклады порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$ . Их анализ мы начнем с эффекта поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (см. рис. 1), используя координатное представление. Вклад однопетлевой электронной поляризации вакуума в потенциал сверхтонкого взаимодействия частиц определяется следующим выражением [8, 10, 24]:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma, vp}^{hfs}(r) &= \frac{8\alpha\mu_t(1+a_\mu)}{3m_1m_2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) \frac{\alpha}{3\pi} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(s) ds \left( \pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2\xi^2}{r} \right) e^{-2m_e\xi r}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\rho(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)/\xi^4$ . При вычислении средних значений (8) по волновым функциям (4) интегрирование по координатам частиц и по спектральному параметру можно выполнить аналитически. В результате мы получаем следующие вклады порядка  $\alpha^5$  в сверхтонкое расщепление уровней ( $a_1 = m_e/W$ ):

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, vp}^{hfs}(1S) &= \frac{8\mu^3\alpha^5\mu_t(1+a_\mu)}{9m_1m_p\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{m_e^2\xi^2}{W^2} \int_0^\infty x dx \exp\left\{-x\left(1 + \frac{m_e\xi}{W}\right)\right\} \right] = \\ &= E_F(1S) \frac{\alpha(1+a_\mu)}{9\pi\sqrt{1-a_1^2}} \left[ \sqrt{1-a_1^2}(1+6a_1^2-3\pi a_1^3) + \right. \\ &\left. + (6-3a_1^2+5a_1^4) \ln \frac{1+\sqrt{1-a_1^2}}{a_1} \right] = 0.5133 \text{ мЭВ}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, vp}^{hfs}(2S) &= \frac{\mu^3 \alpha^5 \mu_t (1 + a_\mu)}{9m_1 m_p \pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{4m_e^2 \xi^2}{W^2} \int_0^\infty x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \times \right. \\ &\times \left. \exp \left\{ -x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right) \right\} \right] = \\ &= E_F(2S) \frac{\alpha(1 + a_\mu)}{18\pi(4a_1^2 - 1)^{5/2}} \left\{ \sqrt{4a_1^2 - 1} \times \right. \\ &\times [11 + 2a_1^2(-29 + 8a_1(-22a_1 + 48a_1^3 - 3\pi(4a_1^2 - 1)^2))] + \\ &+ 12(1 - 10a_1^2 + 66a_1^4 - 160a_1^6 + 256a_1^8) \operatorname{arctg} \sqrt{4a_1^2 - 1} \left. \right\} = \\ &= 0.0661 \text{ мЭВ}. \quad (10) \end{aligned}$$

Мы подробно представили результаты (9), (10), чтобы продемонстрировать общую структуру полученных аналитических выражений. После интегрирования по координатам частиц результаты имеют достаточно простой вид, но следующее интегрирование по спектральным параметрам дает, как правило, довольно громоздкие выражения, которые мы в дальнейшем опускаем. Заменяя массу электрона  $m_e$  на массу мюона  $m_1$  в (9), (10), получим вклад мюонной поляризации вакуума в СТС. Он имеет более высокий порядок  $\alpha^6$ , поскольку характерный параметр  $W/m_1 \ll 1$ . Численное значение этого вклада включено в итоговую таблицу отдельной строкой (строка 6). Чтобы увеличить точность вычислений, мы рассмотрели также вклад адронной поляризации вакуума (АПВ), который получается при следующей замене в фотонном пропагаторе:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \int_{s_{th}}^\infty \frac{\rho_{had}(s) ds}{k^2 + s}. \quad (11)$$

Основной вклад в адронную спектральную плотность  $\rho_{had}(s)$  определяется областью  $\rho$ ,  $\omega$ -мезонов, в которой  $\rho_{had}(s)$  выражается в терминах пионного формфактора:

$$\rho_{had}(s) = \frac{(s - 4m_\pi^2)^{3/2}}{12s^{5/2}} |F_\pi(s)|^2. \quad (12)$$

Учитывая далее неравенство  $W^2 \ll s$ , можно представить вклад АПВ в  $1\gamma$ -взаимодействие в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, hvp}^{hfs}(nS) &= E_F(nS) \frac{8\alpha(1 + a_\mu)W}{\pi} \times \\ &\times \int_{s_{th}}^\infty \rho_{had}(s) ds. \quad (13) \end{aligned}$$

Используя известные параметризации пионного формфактора в указанной области энергий [29, 30], получим следующие численные значения для уровней  $1S$ ,  $2S$ :

$$\Delta E_{1\gamma, hvp}^{hfs} = \begin{cases} 1S: 0.0033 \text{ мЭВ}, \\ 2S: 0.0004 \text{ мЭВ}. \end{cases} \quad (14)$$

Учет других энергетических интервалов по энергии  $s$  увеличивает эти значения примерно на 50%. В итоговую таблицу этот результат включен в строке 20 в сумме с двумя другими вкладками, полученными во втором порядке теории возмущений и от амплитуд двухфотонного обмена (см. ниже разд. 4).

Вклад порядка  $\alpha^6$  дают амплитуды двухпетлевой электронной поляризации вакуума, представленные на рис. 1б, в, г. Эффекты двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии можно разделить на две части: вклад с двумя последовательными петлями ( $vp-vp$ ) и вклад двухпетлевого поляризационного оператора ( $2-loop vp$ ). Для получения оператора взаимодействия частиц по амплитуде с двумя последовательными петлями (см. рис. 1б) в импульсном представлении необходимо два раза использовать следующую замену в пропагаторе обменного фотона:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2}. \quad (15)$$

Затем после перехода в координатное представление мы получим для двухпетлевого потенциала взаимодействия мюона и тритона с двумя последовательными петлями следующее выражение (в числителе сохранен АММ мюона  $a_\mu$ , хотя он дает поправку более высокого порядка):

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma, vp-vp}^{hfs}(r) &= \frac{8\pi\alpha\mu_t(1 + a_\mu)}{3m_1 m_p} (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(\eta^2 - \xi^2)} (\eta^4 e^{-2m_e \eta r} - \xi^4 e^{-2m_e \xi r}) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Исходное выражение для матричного элемента (16) в СТС уровней  $1S$  и  $2S$  содержит три интеграла:

Таблица. Сверхтонкая структура 1S- и 2S-состояний мюонного трития ( $\mu t$ )

	Вклад в СТС	1S, мэВ	2S, мэВ	Ссылка
1	Энергия Ферми	239.9192	29.9899	(5), [1]
2	Поправка АММ мюона порядка $\alpha^5$ , $\alpha^6$	0.2797	0.0350	(6), [1]
3	Релятивистская поправка порядка $\alpha^6$	0.0192	0.0034	(7), [1]
4	Вклад однопетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^5$	0.5133	0.0661	(9), (10)
5	Вклад двухпетлевой ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^6$	0.0040	0.0005	(17), (18) (21), (22)
6	Вклад однопетлевой мюонной ПВ в $1\gamma$ -взаимодействии порядка $\alpha^6$	0.0046	0.0006	(9), (10)
7	Вклад однопетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^5$	1.0186	0.1062	(27), (28)
8	Вклад двухпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^6$	0.0110	0.0012	(35)–(37)
9	Вклад однопетлевой мюонной ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^6$	0.0047	0.0006	(27), (28)
10	Поправка на структуру ядра порядка $\alpha^5$	$-3.83 \pm 0.08$ $-3.96 \pm 0.08$	$-0.48 \pm 0.01$ $-0.49 \pm 0.01$	(43)
11	Вклад ПВ и структуры ядра порядка $\alpha^6$	$-0.0616$ $-0.0637$	$-0.0077$ $-0.0080$	(46)
12	Вклад мюонной ПВ и структуры ядра порядка $\alpha^6$	$-0.0072$	$-0.0009$	(44)
13	Поправка на структуру ядра порядка $\alpha^6$	0.0205	0.0021	(48), (51), (52)
14	Радиационные поправки на структуру ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	$-0.0232$	$-0.0029$	(53)–(56)
15	Радиационные поправки с отдачей на структуру ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5 m_1/m_2$	$-0.0025$	$-0.0003$	[39]
16	Поправка на отдачу ядра порядка $(Z\alpha)^6 m_1/m_2$ , $(Z\alpha)^6 \ln(Z\alpha) m_1/m_2$	0.0004	0.00005	[40–42]
17	Вклад поляризуемости тритона порядка $\alpha^5$	$1.86 \pm 0.18$	$0.24 \pm 0.02$	[54, 55]
18	Вклад адронной поляризуемости тритона порядка $\alpha^5$	0.0840	0.0105	[8, 21]
19	Вклад слабого взаимодействия	0.0025	0.0003	[59]
20	Вклад адронной ПВ	0.0020	0.0003	(11), [8, 21]
21	Суммарный вклад	239.8192	29.9649	

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, vp-vp}^{hfs}(1S) &= E_F(1S) \frac{\alpha^2(1+a_\mu)}{9\pi^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left[ 1 - \frac{m_e^2}{W^2(\eta^2 - \xi^2)} \times \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty x dx \left( \eta^4 e^{-x(1+m_e\eta/W)} - \xi^4 e^{-x(1+m_e\xi/W)} \right) \right] = \\ &= 0.0018 \text{ мЭВ}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, vp-vp}^{hfs}(2S) &= E_F(2S) \frac{\alpha^2(1+a_\mu)}{9\pi^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left[ 1 - \frac{4m_e^2}{W^2(\eta^2 - \xi^2)} \times \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty x \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 dx \left( \eta^4 \exp\{-x(1+2m_e\eta/W)\} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \xi^4 \exp\{-x(1+2m_e\xi/W)\} \right) \right] = 0.0002 \text{ мЭВ}. \quad (18) \end{aligned}$$

Интегрирование в (18) по координатам частиц выполнено аналитически, а затем численно по параметрам  $\xi, \eta$ . Аналогично можно вычислить вклад двухпетлевой поляризации вакуума порядка  $\alpha^6$ , показанной на рис. 1 *б, г*. В этом случае потенциал взаимодействия мюона и тритона определяется формулой [1, 21]

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma, 2-loop\ vp}(r) &= \frac{16\alpha^3\mu^3\mu_t(1+a_\mu)}{9\pi m_1 m_p} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(1-v^2)} \times \right. \\ &\times \left. \exp\left\{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right\} \right], \quad (19) \end{aligned}$$

где спектральная функция

$$\begin{aligned} f(v) &= v \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + \right. \right. \\ &+ 2 \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \left. \right] + \\ &+ \left[ \frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2}v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \\ &\left. + \frac{3}{8}v(5-3v^2) \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

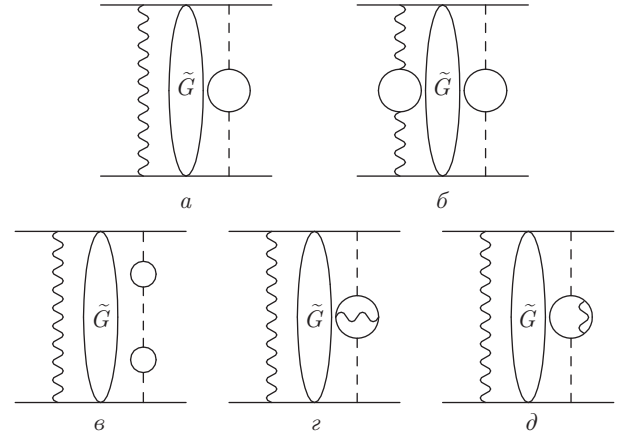


Рис. 2. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке ТВ. Штриховой линией обозначен кулоновский фотон,  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская ФГ

$\text{Li}_2(z)$  — дилогарифм Эйлера. Соответствующие вклады в СТС  $1S$ - и  $2S$ -состояний представим в виде ( $a_2 = m_e/W\sqrt{1-v^2}$ )

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, 2-loop\ vp}^{hfs}(1S) &= E_F(1S) \frac{2\alpha^2(1+a_\mu)}{3\pi^2} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \frac{(2a_2+1)}{(a_2+1)^2} = 0.0022 \text{ мЭВ}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, 2-loop\ vp}^{hfs}(2S) &= E_F(2S) \frac{2\alpha^2(1+a_\mu)}{3\pi^2} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \frac{(32a_2^3 + 22a_2^2 + 8a_2 + 1)}{(2a_2+1)^4} = \\ &= 0.0003 \text{ мЭВ}. \quad (22) \end{aligned}$$

Влияние поляризации вакуума на СТС уровней энергии этим не исчерпывается. Имеются и другие вклады, которые содержат наряду с поляризацией вакуума эффекты структуры и отдачи ядра, а также релятивистские эффекты как в первом, так и во втором порядках теории возмущений. Часть из них рассмотрена в следующих разделах.

### 3. ЭФФЕКТЫ ОДНОПЕТЛЕВОЙ И ДВУХПЕТЛЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЙ ВАКУУМА ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Во втором порядке теории возмущений (sop) также есть вклады однопетлевой и двухпетлевой

поляризаций вакуума в СТС, представленные на рис. 2. Наряду с уже использованным потенциалом (8) в них входят также кулоновские потенциалы возмущения с учетом эффекта однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума. Основной вклад в СТС порядка  $\alpha^5$  определяется следующей формулой (см. рис. 2а):

$$\Delta E_{sopt\,vp}^{hfs} = 2\langle\psi|\Delta V_{vp}^C \tilde{G} \Delta V_B^{hfs}|\psi\rangle, \quad (23)$$

где  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская функция Грина (ФГ), а кулоновский потенциал, модифицированный однопетлевой поляризацией вакуума, равен

$$\Delta V_{vp}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) e^{-2m_e \xi r}. \quad (24)$$

Сверхтонкая часть потенциала Брейта  $\Delta V_B^{hfs}(r)$  содержит  $\delta(\mathbf{r})$ , поэтому при вычислении матричных элементов в (22) возникает редуцированная кулоновская ФГ с одним нулевым аргументом. Она была получена на основе представления Хостлера после вычитания полюсного члена в следующем виде [31, 32]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x}}{x} g_{1S}(x), \quad g_{1S}(x) = \\ &= [4x(\ln 2x + C) + 4x^2 - 10x - 2], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) &= -\frac{\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x/2}}{2x} g_{2S}(x), \quad g_{2S}(x) = \\ &= [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4], \end{aligned} \quad (26)$$

где  $C = 0.5772\dots$  — постоянная Эйлера,  $x = Wr$ . В результате необходимые поправки порядка  $\alpha^5$  в СТС ( $\mu t$ ) можно представить в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt, vp}^{hfs}(1S) &= -E_F(1S) \frac{2\alpha(1+a_\mu)}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left\{-2x\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right\} g_{1S}(x) dx = \\ &= 1.0186 \text{ мЭВ}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt, vp}^{hfs}(2S) &= E_F(2S) \frac{\alpha(1+a_\mu)}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} g_{2S}(x) dx = \\ &= 0.1062 \text{ мЭВ}. \end{aligned} \quad (28)$$

В выражения (27), (28) включен множитель  $(1+a_\mu)$ , так что они содержат поправки порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$ . Интегрирование по координатам частиц в формулах (27), (28) выполнено аналитически и численно по  $\xi$ . Аналогично может быть получен вклад мюонной и адронной поляризации вакуума во втором порядке ТВ (см. строки 9, 20 в таблице).

Поправки двухпетлевой поляризации вакуума (см. рис. 2б, в, г, д) имеют порядок  $\alpha^6$ . Рассмотрим первый из этих вкладов на рис. 2б, который определяется потенциалами (8), (24) редуцированной кулоновской ФГ (25), (26), а также редуцированной кулоновской ФГ с ненулевыми аргументами. Компактное представление для нее было получено в работе [32]:

$$\tilde{G}_{1S}(r, r') = -\frac{\alpha\mu^2}{\pi} e^{-(x_1+x_2)} g_{1S}(x_1, x_2), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} g_{1S}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2x_<} - \ln 2x_> - \ln 2x_< + Ei(2x_<) + \\ &+ \frac{7}{2} - 2C - (x_1 + x_2) + \frac{1 - e^{2x_<}}{2x_<}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{2S}(r, r') = -\frac{\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2} e^{-(x_1+x_2)} g_{2S}(x_1, x_2), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} g_{2S}(x_1, x_2) &= 8x_< - 4x_<^2 + 8x_> + 12x_<x_> - 26x_<^2 x_> + \\ &+ 2x_<^3 x_> - 4x_>^2 - 26x_<x_>^2 + 23x_<^2 x_>^2 - \\ &- x_<^3 x_>^2 + 2x_<x_>^3 - x_<^2 x_>^3 + 4e^{x_<}(1-x_<)(x_>-2)x_> + \\ &+ 4(x_<-2)x_<(x_>-2)x_> \times \\ &\times [-2C + Ei(x_<) - \ln(x_<) - \ln(x_>)]. \end{aligned}$$

Потенциал (8) состоит из двух слагаемых, поэтому промежуточное выражение для поправки к уровням 1S и 2S содержит по два вклада:

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt\,vp, vp}^{hfs, (1)}(1S) &= -E_F(1S) \frac{2\alpha^2(1+a_\mu)}{9\pi^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty dx \exp\left\{-2x\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right\} \times \\ &\times g_{1S}(x), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt\ vp, vp}^{hfs, (2)}(1S) &= -E_F(1S) \frac{32\alpha^2(1+a_\mu)m_e^2}{9\pi^2 W^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \int_0^\infty x_1 dx_1 \times \\ &\times \exp \left\{ -2x_1 \left( 1 + \frac{m_e \xi}{W} \right) \right\} \times \\ &\times \int_0^\infty x_2 dx_2 \exp \left\{ -2x_2 \left( 1 + \frac{m_e \eta}{W} \right) \right\} \times \\ &\times g_{1S}(x_1, x_2), \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt\ vp, vp}^{hfs, (1)}(2S) &= E_F(2S) \frac{\alpha^2(1+a_\mu)}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x}{2} \right) dx \exp \left\{ -x \left( 1 + \frac{2m_e \xi}{W} \right) \right\} \times \\ &\times g_{2S}(x), \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{sopt\ vp, vp}^{hfs, (2)}(2S) &= -E_F(2S) \frac{2\alpha^2(1+a_\mu)m_e^2}{9\pi^2 W^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x_1}{2} \right) dx_1 \times \\ &\times \exp \left\{ -x_1 \left( 1 + \frac{2m_e \xi}{W} \right) \right\} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x_2}{2} \right) dx_2 \times \\ &\times \exp \left\{ -x_2 \left( 1 + \frac{2m_e \eta}{W} \right) \right\} g_{2S}(x_1, x_2). \quad (34) \end{aligned}$$

Вклады (31), (32), (33), (34) содержат по отдельности расходящиеся интегралы по спектральному параметру, но их сумма является конечной и имеет следующие значения:

$$\Delta E_{sopt\ vp, vp}^{hfs, (1+2)} = \begin{cases} 1S: 0.0033 \text{ мЭВ,} \\ 2S: 0.0004 \text{ мЭВ.} \end{cases} \quad (35)$$

Вклады других двухпетлевых поправок во втором порядке ТВ вычисляются аналогично с помощью следующих потенциалов [16]:

$$\begin{aligned} \Delta V_{vp-vp}^C(r) &= \left( \frac{\alpha}{3\pi} \right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \left( -\frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (\xi^2 e^{-2m_e \xi r} - \eta^2 e^{-2m_e \eta r}), \quad (36) \end{aligned}$$

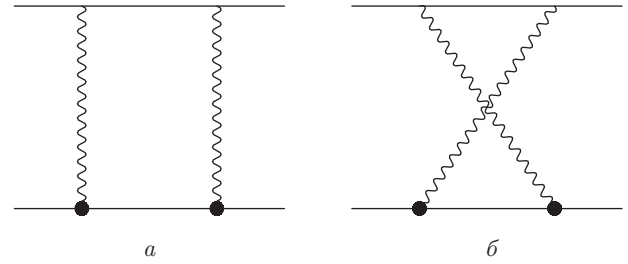


Рис. 3. Эффекты структуры ядра порядка  $\alpha^5$ . Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор тритона

$$\begin{aligned} \Delta V_{2-loop\ vp}^C(r) &= -\frac{2\alpha^3}{3\pi^2 r} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}} \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Опуская дальнейшие промежуточные вычисления, которые вполне аналогичны (27), (28), мы включили в таблицу полные численные значения двухпетлевых поправок для поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений (строка 8).

#### 4. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ И ОТДАЧИ ЯДРА

До сих пор при построении оператора взаимодействия частиц предполагалось, что тритон представляет собой точечный объект. Вместе с тем эксперименты по рассеянию лептонов на ядрах показывают, что структура тритона описывается двумя электромагнитными формфакторами, которые необходимо учитывать в случае прецизионных расчетов СТС  $S$ -уровней. Основной вклад порядка  $\alpha^5$  от структуры ядра определяется двухфотонными обменными диаграммами (см. рис. 3). Он включает в себя поправку Земаха и эффекты отдачи. Как обычно, вершинный оператор тритона параметризуется электрическим  $G_E$  и магнитным  $G_M$  формфакторами, информацию о которых дает изучение рассеяния лептонов на тритонах. В наших расчетах СТС мы используем дипольную и гауссову параметризации для формфакторов:

$$\begin{aligned} G_E^D(k) &= \frac{1}{(1+k^2/\Lambda^2)^2}, \\ G_E^D(k) &= \frac{\mu_t m_2/m_p}{(1+k^2/\Lambda^2)^2}, \quad \Lambda^2 = \frac{12}{r_t^2}, \end{aligned} \quad (38)$$



$$G_E^G(k) = \exp \left\{ -\frac{1}{6} k^2 r_t^2 \right\},$$

$$G_M^G(k) = \mu_t \frac{m_2}{m_p} \exp \left\{ -\frac{1}{6} k^2 r_t^2 \right\}. \quad (39)$$

В обоих случаях значение зарядового радиуса тритона взято из работы [33]:  $r_t = (1.7591 \pm 0.0363)$  фм.

Чтобы выделить сверхтонкую часть потенциала взаимодействия мюона и тритона для  $S$ -состояний в амплитудах двухфотонного взаимодействия, удобно использовать проекционные операторы на состояния с полным спином системы, равным нулю и единице [15]:

$$\hat{\Pi}_{S=0} = [u(0)\bar{v}(0)]_{S=0} = \frac{1 + \gamma^0}{2\sqrt{2}} \gamma_5,$$

$$\hat{\Pi}_{S=1} = [u(0)\bar{v}(0)]_{S=1} = \frac{1 + \gamma^0}{2\sqrt{2}} \hat{\varepsilon}, \quad (40)$$

где  $\varepsilon^\mu$  — вектор поляризации состояния  $^3S_1$ . Введение (40) позволяет использовать для расчета двухфотонных амплитуд систему аналитических вычислений Form [34]. В результате поправка на структуру тритона в СТС мюонного трития примет вид (здесь и далее для обозначения поправки на структуру ядра использован индекс «str») [7, 21, 35]:

$$\Delta E_{str,2\gamma}^{hfs} = -\frac{\alpha^5}{3\pi m_1 m_2} \delta_{I0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k), \quad (41)$$

$$V(k) = \frac{2F_2^2 k^2}{m_1 m_2} + \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_1^2 + k^2})} \times$$

$$\times \left[ -128F_1^2 m_1^2 - 128F_1 F_2 m_1^2 + 16F_1^2 k^2 + 64F_1 F_2 k^2 + \right.$$

$$\left. + 16F_2^2 k^2 + \frac{32F_2^2 m_1^2 k^2}{m_2^2} + \frac{4F_2^2 k^4}{m_1^2} - \frac{4F_2^2 k^4}{m_2^2} \right] +$$

$$+ \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_2^2 + k^2})} [128F_1^2 m_2^2 +$$

$$+ 128F_1 F_2 m_2^2 - 16F_1^2 k^2 - 64F_1 F_2 k^2 - 48F_2^2 k^2].$$

При получении (41) использовалась кулоновская калибровка для пропагатора фотона. Выражение (41) содержит инфракрасную расходимость при  $k^2 \rightarrow 0$ , для устранения которой необходимо учесть вклад итерационного слагаемого квазипотенциала в СТС атома ( $\mu t$ ):

$$\Delta E_{iter,str}^{hfs} = -\langle V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma} \rangle_{str}^{hfs} =$$

$$= -\frac{64}{3} \frac{\mu^4 \alpha^5 \mu_t}{m_1 m_p \pi n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2}, \quad (42)$$

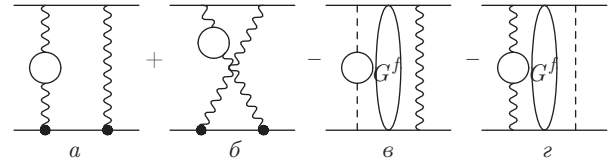


Рис. 4. Эффекты структуры ядра и поляризации вакуума порядка  $\alpha^6$ . Штриховой линией обозначен кулоновский фотон,  $G^f$  — свободный двухчастичный пропагатор

где угловые скобки обозначают усреднение оператора взаимодействия по кулоновской волновой функции, а индекс «hfs» указывает на выделение сверхтонкой части в итерационном слагаемом квазипотенциала;  $V_{1\gamma}$  — квазипотенциал однофотонного взаимодействия,  $G^f$  — свободный двухчастичный пропагатор. При интегрировании в (41) использовались две параметризации (38), (39), а паулиевский  $F_1$  и дираковский  $F_2$  формфакторы выражены через  $G_E, G_M$ . В результате были получены следующие значения сверхтонких расщеплений:

$$\Delta E_{str,2\gamma}^{hfs} =$$

$$= \begin{cases} 1S: -3.8274 \text{ мэВ (D)}, -3.9617 \text{ мэВ (G)}, \\ 2S: -0.4784 \text{ мэВ (D)}, -0.4952 \text{ мэВ (G)}. \end{cases} \quad (43)$$

Таким образом, изменение формы параметризации приводит к 5-процентному изменению результата. Теоретическая ошибка вычисления вклада (43), связанная с величиной зарядового радиуса тритона, остается самой значительной. Более подробно все теоретические ошибки расчета рассмотрены в заключительном разделе работы. Поскольку зависимость от главного квантового числа  $n$  в (43) определяется фактором  $1/n^3$ , численные значения поправки на структуру ядра для уровней 1S и 2S сокращаются в сверхтонком интервале  $\Delta_{12} = (8\Delta E_{str,2\gamma}^{hfs}(2S) - \Delta E_{str,2\gamma}^{hfs}(1S))$ . Следовательно, теоретический расчет интервала  $\Delta_{12}$  не содержит неопределенностей, связанных со структурой ядра по крайней мере в лидирующем порядке и может быть использован для проверки предсказаний квантовой электродинамики.

Имея в виду значительную величину вклада (43), рассмотрим также вклад шестого порядка по  $\alpha$  в СТС, связанный как со структурой ядра, так и с электронной поляризацией вакуума (см. рис. 4). Аналитическое выражение для этого вклада отличается от (41) заменой (15) в пропагаторе одного из обменных фотонов и определяется следующей формулой:

$$\Delta E_{str,2\gamma}^{hfs,vp} = \frac{2\alpha^6\mu^3}{9m_1m_2\pi^2n^3} \int_0^\infty V_{vp}(k) \frac{dk}{k^5} \times \left[ 5k^3 - 12km_e^2 + 6(k^2 - 2m_e^2)\sqrt{k^2 + 4m_e^2} \times \ln \frac{2m_e}{\sqrt{k^2 + 4m_e^2} + k} \right], \quad (44)$$

где потенциал  $V_{vp}(k)$  отличается от  $V(k)$  в формуле (41) только дополнительным множителем  $k^2$ . Амплитудный вклад (44) в спектр энергии необходимо дополнить двумя итерационными членами, которые показаны на диаграммах рис. 4*б,з*:

$$\begin{aligned} \Delta E_{iter,str\ vp}^{hfs} &= -2\langle V^C \times G^f \times \Delta V_{vp}^{hfs} \rangle^{hfs} = \\ &= -2\langle V_{vp}^C \times G^f \times \Delta V_B^{hfs} \rangle^{hfs} = \\ &= -E_F(nS) \frac{4\mu\alpha^2}{m_e\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3) dv}{k^2(1-v^2)+1}. \quad (45) \end{aligned}$$

Численные значения вклада (44) в СТС мюонного трития равны (как и ранее, указаны два значения для дипольной и гауссовой параметризаций):

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,2\gamma}^{hfs,vp} + 2\Delta E_{iter,str\ vp}^{hfs} &= \\ = \begin{cases} 1S: -0.0616 \text{ мэВ} (D), -0.0637 \text{ мэВ} (G), \\ 2S: -0.0080 \text{ мэВ} (D), -0.0080 \text{ мэВ} (G). \end{cases} \quad (46) \end{aligned}$$

В случае мюонной и адронной поляризаций вакуума вклады для указанных двух параметризаций практически совпадают (см. строки 12, 20 таблицы). Вклад мюонной поляризации вакуума определяется (44) с заменой  $m_e \rightarrow m_1$ , а вклад АПВ может быть получен при использовании (12).

Поправки на структуру ядра порядка  $\alpha^6$  имеются также в потенциале однофотонного взаимодействия. Сверхтонкая часть потенциала пропорциональна магнитному формфактору ядра в импульсном представлении. В точечном приближении для ядра потенциал представлен формулой (1). Чтобы теперь учесть эффекты структуры тритона разложим магнитный формфактор по степеням переданного импульса  $k^2$  и удержим слагаемое, пропорциональное  $k^2$ . Такое разложение формфактора и соответствующего ему потенциала показано на рис. 5*а,б,в*. Оно справедливо не только для магнитного формфактора, но и для электрического формфактора. В результате в координатном представлении поправка на структуру ядра в СТС будет определяться потенциалом, пропорциональным  $r_M^2$  и содержащим производную второго порядка от  $\delta$ -функции Дирака в виде

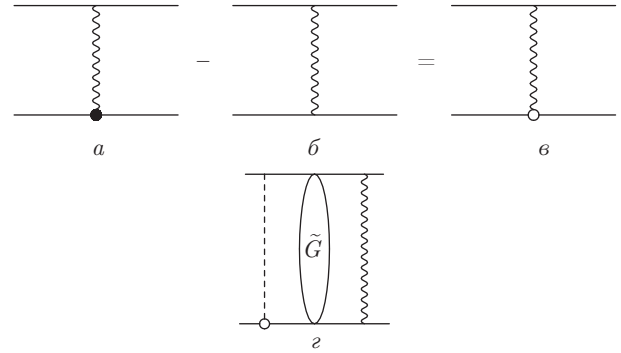


Рис. 5. Эффекты структуры ядра порядка  $\alpha^6$  в однофотонном взаимодействии и во втором порядке ТВ,  $\tilde{G}$  — редуцированная кулоновская ФГ

$$\Delta V_{1\gamma\ str}^{hfs}(r) = \frac{4\pi\alpha\mu_t(1+a_\mu)}{9m_1m_p} r_M^2 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) \nabla^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (47)$$

Используя при вычислении соответствующего матричного элемента определение производной обобщенной функции, получим вклад в СТС мюонного трития:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, str}^{hfs}(nS) &= \frac{2}{3}(\alpha)^2 \mu^2 r_M^2 E_F(nS) \frac{3n^2 + 1}{n^2} = \\ &= \begin{cases} 1S: 0.0281 \text{ мэВ}, \\ 2S: 0.0029 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (48) \end{aligned}$$

Для получения численной оценки вклада в (48) использовалось приближение  $r_M^2 \approx r_E^2 = r_t^2$ . Во втором порядке теории возмущений также имеется поправка на структуру ядра, представленная на рис. 5. В этом случае один из потенциалов определяется разложением электрического формфактора по степеням  $k^2$  и пропорционален  $\delta(\mathbf{r})$  в координатном представлении. В результате искомый вклад определяется значением редуцированной кулоновской ФГ при нулевых аргументах  $\tilde{G}(0, 0)$  и является расходящимся. Причина появившейся расходимости связана с использованным разложением потенциалов при малых относительных импульсах и их последующем интегрировании по всем значениям импульсов. Чтобы избежать появления  $\tilde{G}(0, 0)$ , используем дипольную параметризацию для электрического формфактора и представим второй потенциал возмущения в виде

$$\begin{aligned} \Delta V_{str,1\gamma}^C(k) &= -\frac{\alpha}{k^2} \left[ \frac{1}{(1+k^2/\Lambda^2)^2} - 1 \right] = \\ &= \frac{\alpha(2+k^2/\Lambda^2)}{\Lambda^2(1+k^2/\Lambda^2)^2}. \quad (49) \end{aligned}$$

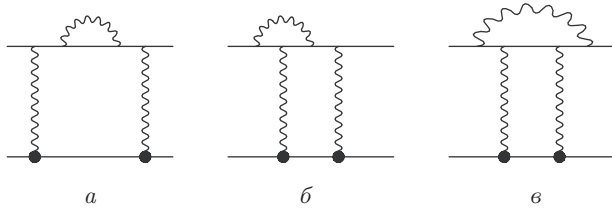


Рис. 6. Двухфотонные обменные амплитуды с радиационными поправками в мюонную линию

Переходя в координатное представление, получим следующий потенциал возмущения, связанный с эффектами структуры ядра:

$$\Delta V_{str,1\gamma}^C(r) = \frac{\alpha(2 + \Lambda r)}{8\pi r} e^{-\Lambda r}. \quad (50)$$

При вычислении поправок в СТС уровней 1S и 2S воспользуемся (25), (26). Учтем при этом дополнительное итерационное слагаемое квазипотенциала  $2\langle V_{1\gamma}^{hfs} \times G^f \times \Delta V_{str,1\gamma}^C \rangle$ , в которое входит свободная функция Грина. Тогда при вычислении данного вклада необходимо выполнить замену:  $\tilde{G} \rightarrow (\tilde{G} - G^f)$ . В результате поправку на структуру ядра во втором порядке теории возмущений можно представить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,sopt}^{hfs}(1S) = E_F(1S) \frac{\mu^2 \alpha^2 (1+a_\mu)}{2\pi \Lambda^2} \frac{2}{(1+2W/\Lambda)^4} \times \\ \times \left[ -5 - 2\frac{W}{\Lambda} \left( 3 + 2\frac{W}{\Lambda} \right) + 4 \ln \left( 2\frac{W}{\Lambda} \right) + \right. \\ \left. + 4\frac{W}{\Lambda} \left( 3 + 2\frac{W}{\Lambda} \right) \ln \left( 2\frac{W}{\Lambda} \right) - 4 \left( 1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2\frac{W}{\Lambda} \right) \ln \left( 1 + 2\frac{W}{\Lambda} \right) \right] = -0.0076 \text{ мэВ}, \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,sopt}^{hfs}(2S) = -E_F(2S) \frac{\mu^2 \alpha^2 (1+a_\mu)}{8\pi \Lambda^2} \times \\ \times \frac{2}{(1+W/\Lambda)^6} \left[ -8 + \frac{W}{\Lambda} \left( -38 + \frac{W}{\Lambda} \left( 1 + \frac{W}{\Lambda} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + 8 \left( 1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \left( 4 + \frac{W^2}{\Lambda^2} \left( 3 + \frac{W}{\Lambda} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arccth} \left( 1 + 2\frac{W}{\Lambda} \right) \right] = -0.0008 \text{ мэВ}. \quad (52) \end{aligned}$$

Важный для увеличения точности расчета набор амплитуд взаимодействия частиц составляют радиационные поправки в мюонную линию (см. рис. 6). Они дают вклады порядка  $\alpha^6$  в СТС спектра. В случае точечного ядра их расчет дает следующий результат [36–38]:

$$\Delta E_{rad}^{hfs} = (\ln 2 - 13/4)\alpha(Z\alpha)E_F.$$

Учет эффектов структуры ядра проводится также как и для двухфотонных обменных диаграмм. Используя проекционные операторы (40) и калибровку Фрида–Йенни для радиационного фотона, можно получить конечный вклад каждой из трех амплитуд на рис. 6 в виде интеграла по импульсу обменного фотона и фейнмановским параметрам [14, 15]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{se}^{hfs} = 6E_F \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 x dx \int_0^\infty \frac{G_E(k^2)G_M(k^2) dk}{x + (1-x)k^2} = \\ = \begin{cases} 1S: 0.0074 \text{ мэВ}, \\ 2S: 0.0009 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-1}^{hfs} = -24E_F \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 x dx \times \\ \times \int_0^\infty k^{-2} G_E(k^2)G_M(k^2) \ln \left[ \frac{x+k^2z(1-xz)}{x} \right] dk = \\ = \begin{cases} 1S: -0.0116 \text{ мэВ}, \\ 2S: -0.0014 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-2}^{hfs} = 8E_F \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \times \\ \times \left\{ \frac{G_E(k^2)G_M(k^2)}{[x+k^2z(1-xz)]^2} \left[ -2xz^2(1-xz)^2k^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + zk^2(3x^3z-x^2(9z+1)+x(4z+7)-4)+x^2(5-x) \right] - \frac{1}{2} \right\} = \\ = \begin{cases} 1S: -0.0140 \text{ мэВ}, \\ 2S: -0.0018 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{jellyfish}^{hfs} = 4E_F \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 (1-z) dz \int_0^1 (1-x) dx \times \\ \times \int_0^\infty \frac{G_E(k^2)G_M(k^2) dk}{[x+(1-x)k^2]^3} \left[ 6x+6x^2-6x^2z+2x^3 - \right. \\ \left. - 12x^3z - 12x^4z + k^2(-6z+18xz+4xz^2+7x^2z - \right. \\ \left. - 30x^2z^2 - 2x^2z^3 - 36x^3z^2 + 12x^3z^3 + 24x^4z^3) + \right. \\ \left. + k^4(9xz^2 - 31x^2z^3 + 34x^3z^4 - 12x^4z^5) \right] = \\ = \begin{cases} 1S: -0.0050 \text{ мэВ}, \\ 2S: -0.0006 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (56) \end{aligned}$$

В таблицу включен суммарный вклад выражений (53)–(56) (строка 14). Для  $1S$ -состояния он равен  $-0.0232$  мэВ, что на 50% отличается от вклада ( $-0.0327$ ) мэВ в случае точечного ядра. Результаты (53)–(56) не содержат эффектов отдачи ядра порядка  $\alpha(Z\alpha)E_F m_1/m_2$ . Для их учета необходимо использовать более точное выражение для пропагатора тритона в промежуточном состоянии, а интегрирование по энергии обменного фотона  $k^0$  можно выполнить аналитически. В результате данные поправки были представлены в интегральном виде, аналогичном (53)–(56). Опуская эти достаточно громоздкие выражения (см. нашу работу [39]), мы включили в таблицу численные результаты, полученные с их помощью (строка 15). Кроме того, в таблицу включена приближенная оценка вкладов порядка  $E_F(Z\alpha)^2\mu^2/m_1m_2$  и  $E_F(Z\alpha)^2\ln(Z\alpha)\mu^2/m_1m_2$ , полученная с помощью аналитических формул из работ [40–42] в случае точечного ядра (строка 16).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования [8, 14, 15, 21, 35] сверхтонкой структуры спектров энергии мюонных водорода ( $\mu p$ ) и дейтерия ( $\mu d$ ). Мы выполнили расчет квантовоэлектродинамических поправок, эффектов структуры и отдачи ядра, релятивистских эффектов порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$  в сверхтонком расщеплении  $1S$ - и  $2S$ -уровней энергии мюонного трития ( $\mu t$ ). Изучение прежде всего  $1S$ - и  $2S$ -состояний данного атома имеет ясную экспериментальную перспективу. В результате точность расчета квантовоэлектродинамических поправок была увеличена на порядок. В данной работе использовался трехмерный квазипотенциальный метод для описания связанного состояния мюона и тритона. Все вычисленные вклады в СТС мюонного трития можно разделить на две группы. В первую группу входят вклады, специфические для данного мюонного атома. Они связаны, прежде всего, с эффектами электронной поляризации вакуума, а также более сложными поправками, включающими ПВ, релятивистские эффекты и эффекты структуры ядра. В нашем исследовании эти вклады были получены в интегральном виде и вычислены аналитически и численно. Вторую группу составляют поправки, известные в аналитическом виде из вычислений сверхтонкой структуры спектра атома водорода и мюония [1]. На их основе были получены численные значения, которые представлены

в таблице. Отметим, что в нашей работе [8] и в недавней работе [43] имеется небольшое расхождение в численных значениях вклада для поляризации вакуума в сверхтонком расщеплении  $1S$ -уровня мюонного водорода (см. строки 5 и 7 нашей таблицы в [8]), которое связано с неточностью задания фундаментальных физических констант в [8]. Правильные значения этих вкладов равны соответственно  $0.375$  мэВ и  $0.734$  мэВ. Данная неточность была исправлена в нашей последующей работе [21].

В работах по мюонному катализу реакций синтеза легких ядер приводятся следующие значения сверхтонкого расщепления основного состояния:  $\Delta E^{hfs}(\mu t) = 236.5$  мэВ [44],  $237.3$  мэВ [45],  $238.2$  мэВ [46],  $241.0$  мэВ [47]. Различие между этими значениями, а также нашим результатом составляет несколько мэВ. Реакция мюонного катализа синтеза может происходить, когда отрицательный мюон связывает два ядра водородных изотопов в молекулу ( $\mu dt$ ). Такие мюонные молекулы не образуются путем прямого замещения электрона мюоном в обычной молекуле DT. Мюонный молекулярный ион ( $\mu dt$ ) является наиболее предпочтительным для протекания реакции синтеза. Вероятность реакции синтеза ( $dt$ ) для этого иона в 1000 раз больше, чем для других ионов. Эта реакция дает наибольшую энергию на одну реакцию синтеза, равную  $17.6$  МэВ [48, 49]. В реакциях мюонного катализа синтеза ( $dd$ ) и ( $dt$ ) вероятности резонансного образования мезомолекул могут различаться на два порядка по величине при низких температурах из-за различной сверхтонкой структуры уровней энергии. Кинетика процессов мюонного катализа в смеси дейтерия и трития представляет собой достаточно сложный процесс, протекание которого определяется набором параметров: скоростью образования мезомолекул, скоростью ядерных реакций синтеза, концентрацией и плотностью ядер дейтерия и трития, скоростью изотопного обмена, скоростью переворота спина и др. [46, 50]. Многие из этих параметров зависят от сверхтонкой структуры как мезоатомов, так и мезомолекул, а также от температуры смеси изотопов водорода. Так, например, скорости переворота спина при переходах между уровнями сверхтонкой структуры спектра связаны между собой соотношением  $\lambda_{01} = \gamma\lambda_{10}$ ,  $\gamma = 3e\Delta E^{hfs}/T$ , и множитель  $\gamma$  претерпевает значительные изменения при переходе от температур в несколько кельвинов до комнатных температур. При температуре  $T = 300$  К изменение множителя  $\gamma$  за счет изменения  $\Delta E^{hfs}$  на  $0.5$  мэВ определяется отношением  $\gamma(\Delta E_1^{hfs})/\gamma(\Delta E_2^{hfs}) \approx 1$ , а при температуре  $T = 3$  К это отношение состав-

ляет уже величину порядка 10. Поэтому ясно, что при малых температурах увеличение точности СТС является очень важным.

Как следует из таблицы величина сверхтонкого расщепления основного состояния согласуется с предыдущими результатами и уточняет последние за счет учета ряда новых поправок порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$ . Несмотря на то что основная часть вкладов (квантовоэлектродинамических) представлена в таблице с точностью 0.0001 мэВ, точность самого теоретического расчета СТС уровней  $1S$  и  $2S$  пока не является столь высокой. Это связано с тем, что поправка на структуру ядра и его поляризуемость порядка  $\alpha^5$  имеет наибольшую неопределенность, которая связана, прежде всего, с ошибками измерения электромагнитных формфакторов тритона. При использовании дипольной параметризации для формфакторов тритона величина теоретической ошибки для поправки на структуру ядра порядка  $\alpha^5$  и определяется ошибкой зарядового радиуса тритона  $r_t = 1.7591 \pm 0.0363$  фм. Она указана явно в таблице. Другой источник неопределенности полного теоретического результата для сверхтонкого расщепления  $S$ -уровней связан с эффектом поляризуемости тритона. В случае дейтрона он был подробно исследован в работах [51, 52] (см. также [53]). В сверхтонкой структуре трития этот эффект был вычислен в работах [54, 55]. При этом необходимо отметить, что как в [51, 52], так и в [54, 55] полный полученный результат содержит как поправку на структуру ядра (поправка Земаха), так и поляризуемость ядра. В данной работе поправка Земаха, а также эффекты отдачи в двухфотонных обменных амплитудах вычислены в (41). Поэтому для оценки собственно вклада на поляризуемость тритона мы воспользовались результатом [54, 55] и нашим значением (43). Наша оценка погрешности в этом случае составляет около 10%, что несколько превышает указанную в [54, 55] 3-процентную погрешность, так как наш результат (43) включает эффекты отдачи. В таблицу мы включили также оценку адронного вклада из-за поляризуемости тритона, используя наши результаты для мюонного водорода. Более точный расчет этого вклада будет выполнен дополнительно в рамках программы MAID (как в [56–58] требует отдельного рассмотрения). Вклад слабого взаимодействия в сверхтонкую структуру мюонного трития вычислен в [59]. Полные теоретические ошибки в сверхтонком расщеплении  $S$ -уровней составляют около  $\pm 0.20$  мэВ для  $1S$ -уровня и  $\pm 0.02$  мэВ для  $2S$ -уровня. Интервал сверхтонкого расщепления  $\Delta_{12}$  не содержит

неопределенностей, связанных со структурой и поляризуемостью ядра. Поэтому полученная в данной работе величина  $\Delta_{12} = -0.0996$  мэВ может быть использована для проверки предсказаний КЭД для мюонного трития с точностью 0.001 мэВ.

Авторы выражают благодарность М. П. Файфману и Р. Полу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00554).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, Springer Tracts in Modern Physics, V. 222, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2007).
2. E. Borie and G. A. Rinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
3. E. Borie, *Z. Phys. A* **275**, 347 (1975).
4. E. Borie, *Ann. Phys.* **327**, 733 (2012).
5. J. L. Friar, *Ann. Phys.* **122**, 151 (1979).
6. G. W. F. Drake and L. L. Byer, *Phys. Rev. A* **32**, 713 (1985).
7. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **53**, 2092 (1996).
8. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **125**, 48 (2004).
9. А. П. Мартыненко, *ЖЭТФ* **128**, 1169 (2005).
10. А. П. Мартыненко, Е. Н. Элекина, *ЯФ* **73**, 2130 (2010).
11. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, E. Yu. Korzinin, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. A* **81**, 060501 (2010).
12. G. A. Miller, A. W. Thomas, J. D. Carroll, and J. Rafelski, *Phys. Rev. A* **84**, 020101(R) (2011).
13. J. J. Krauth, M. Diepold, B. Franke et al., *Ann. Phys.* **366**, 168 (2016).
14. R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, and V. V. Sorokin, *Phys. Rev. A* **90**, 012520 (2014); *ЯФ* **79**, 143 (2016).
15. R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, and V. V. Sorokin, *Phys. Lett. B* **733**, 354 (2014).
16. А. А. Крутов, А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **147**, 85 (2015).
17. R. Pohl, A. Antognini, F. Nez et al., *Nature* **466**, 213 (2010).
18. A. Antognini et al., *Science* **339**, 417 (2013).

19. A. Antognini et al., *Ann. Phys. (NY)* **331**, 127 (2013).
20. R. Pohl, F. Nez, L. M. P. Fernandes et al., *Science* **353**, 669 (2016).
21. A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **71**, 022506 (2005).
22. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **115**, 1221 (1999).
23. A. A. Krutov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, and O. S. Sukhorukova, *Phys. Rev. A* **94**, 062505 (2016).
24. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
25. P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1527 (2012).
26. A. L. Kataev, *Phys. Rev. D* **74**, 073011 (2006).
27. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 111808 (2012).
28. M. E. Rose, *Relativistic Electron Theory*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1961).
29. R. N. Faustov, A. Karimkhodzhaev, and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **59**, 2498 (1999).
30. R. R. Akhmetshin, E. V. Anashkin, A. B. Arbuzov et al., *Phys. Lett. B* **527**, 161 (2002).
31. S. D. Lakdawala and P. J. Mohr, *Phys. Rev. A* **22**, 1572 (1980).
32. H. F. Nemeke, *J. Chem. Phys.* **47**, 2728 (1967).
33. I. Angeli and K. P. Marinova, *Atom. Data and Nucl. Data Tables* **99**, 69 (2013).
34. J. A. M. Vermaseren, FORM, arXiv:math-ph/0010025.
35. А. П. Мартыненко, *ЖЭТФ* **133**, 794 (2008).
36. N. M. Kroll and F. Pollock, *Phys. Rev.* **86**, 876 (1952); **84**, 594 (1951).
37. С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес, *ЖЭТФ* **94**, 42 (1988).
38. С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес, *ЖЭТФ* **92**, 1188 (1987).
39. А. П. Мартыненко, Ф. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов, *Физ. Атом. Ядра и Элем. Частиц* **48**, № 5, 1 (2017).
40. G. P. Lepage, *Phys. Rev. A* **16**, 863 (1977).
41. G. T. Bodwin and D. R. Yennie, *Phys. Rep. C* **43**, 267 (1978).
42. G. T. Bodwin, D. R. Yennie, and M. A. Gregorio, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 723 (1985).
43. C. Peset and A. Pineda, arXiv:1612.05206[nucl-th].
44. С. С. Герштейн, Ю. В. Петров, Л. И. Пономарев и др., *ЖЭТФ* **78**, 2099 (1980).
45. J. S. Cohen, In *Review of Fundamental Processes and Applications of Atoms and Ions*, ed. by C. D. Lin, World Scientific Publishing Co., Singapore (1993), p. 61.
46. С. С. Герштейн, Ю. В. Петров, Л. И. Пономарев, *УФН* **160**, 3 (1990).
47. Л. И. Меньшиков, Л. Н. Сомов, М. П. Файфман, *ЖЭТФ* **94**, 6 (1988).
48. T. A. Percelli et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3763 (2001).
49. V. R. Vom, A. M. Demin, D. L. Demin и др., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **127**, 752 (2005).
50. С. И. Виноцкий, Л. И. Пономарев, И. В. Пузынин и др., *ЖЭТФ* **74**, 849 (1978).
51. А. И. Мильштейн, С. С. Петросян, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **109**, 1146 (1996).
52. А. И. Мильштейн, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **125**, 205 (2004).
53. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **76**, 022508 (2007).
54. J. L. Friar and J. L. Payne, *Phys. Rev. C* **72**, 014002 (2005).
55. J. L. Friar and J. L. Payne, *Phys. Lett. B* **618**, 68 (2005).
56. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *Eur. Phys. J. C* **24**, 281 (2002).
57. E. V. Cherednikova, R. N. Faustov, and A. P. Martynenko, *Nucl. Phys. A* **703**, 365 (2002).
58. A. V. Eskin, R. N. Faustov, A. P. Martynenko, and F. A. Martynenko, *Mod. Phys. Lett.* **31**, 1650104 (2016).
59. M. I. Eides, *Phys. Rev. A* **53**, 2953 (1996); **85**, 034503 (2012).