

# РАЗВИТИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРОБЛЕМЕ МАГНИТОУПРУГОГО РЕЗОНАНСА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*В. А. Игнатченко\**, *Д. С. Полухин*

*Институт физики им. Л. В. Киренского ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.

Проведено обобщение предложенного авторами ранее нового самосогласованного приближения, учитывающего как первый, так и второй члены разложения вершинной функции, на систему двух взаимодействующих волновых полей различной физической природы. Выведена система самосогласованных уравнений для матричной функции Грина и матричной вершинной функции. На основе этого матричного обобщения нового самосогласованного приближения развита теория магнитоупругого резонанса для модели ферромагнетика, в котором параметр магнитоупругой связи  $\varepsilon(x)$  является неоднородным. Исследование уравнений магнитоупругого резонанса проведено для одномерных неоднородностей параметра связи. Рассчитаны диагональные и недиагональные элементы матричной функции Грина системы связанных спиновых и упругих волн при изменении соотношения между средним значением  $\varepsilon$  и среднеквадратичной флуктуацией  $\Delta\varepsilon$  параметра связи между волнами от однородного случая ( $\varepsilon \neq 0$ ,  $\Delta\varepsilon = 0$ ) до предельно стохастизованного ( $\varepsilon = 0$ ,  $\Delta\varepsilon \neq 0$ ) при различных значениях корреляционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ . Для предельного случая бесконечного радиуса корреляций ( $k_c = 0$ ), помимо приближенных, получены также точные аналитические выражения, соответствующие суммированию всех диаграмм элементов матричной функции Грина. Проведено сравнение результатов, полученных для произвольного значения  $k_c$  в новом самосогласованном приближении с результатами, соответствующими стандартному самосогласованному приближению, которое учитывает только первый член разложения вершинной функции. Показано, что новое приближение исправляет недостатки формы функций Грина, рассчитанных в стандартном приближении, такие как куполообразная форма резонансов и изгибы на склонах резонансных пиков. Подтверждено возникновение тонкой структуры спектра в форме узкого резонанса на функции Грина спиновых волн и узкого антирезонанса на функции Грина упругих волн, предсказанной ранее в стандартном самосогласованном приближении. С увеличением  $k_c$  функции Грина, рассчитанные в стандартном и новом приближениях, сближаются друг с другом и при  $k_c/k \geq 0.5$  они практически совпадают между собой. В то же время, результаты данной работы свидетельствуют о том, что новое самосогласованное приближение обладает несомненными преимуществами при исследовании проблем стохастической радиофизики в средах с длинноволновыми неоднородностями (малыми  $k_c$ ), так как значительно лучше, чем стандартное, описывает как форму пиков, так и их ширины.

DOI: 10.7868/S0044451017070100

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Самосогласованное приближение (SCA), которое широко используется в различных областях физики для приближенного вычисления функций Грина, было введено Мигдалом при исследовании электрон-фононного взаимодействия [1]. В те же годы аналогичный вариант SCA был независимо

предложен Крейчнаном [2] при исследовании влияния неоднородностей на динамическую восприимчивость волн в неупорядоченных средах. Аналогичный вариант для исследования рассеяния электронов в неупорядоченных средах был предложен как обобщение хорошо известного приближения Борна и получил название самосогласованного приближения Борна (см., например, [3]). Мы будем использовать для всех этих вариантов название «стандартное SCA». Стандартное SCA соответствует учету только первого члена разложения вершинной функ-

\* E-mail: vignatch@iph.krasn.ru

ции в ряд. В этом приближении отсутствуют диаграммы с пересекающимися линиями корреляций (а таковых большинство). Это налагает ограничения как на область использования стандартного приближения, так и на точность получаемых результатов. Поэтому проводятся интенсивные исследования поправок к собственной энергии, обусловленных учетом следующего члена в разложении вершинной функции (вершинных коррекций) [4–13]. В этих работах достигнут значительный прогресс в исследовании вершинных поправок. Однако расхождение между результатами различных подходов остается пока весьма значительным. В работе [14] выведено самосогласованное приближение более высокого уровня по отношению к стандартному SCA, учитывающее как первый, так и второй члены ряда для вершинной функции, и проведено сравнение нового и стандартного SCA. В работе [15] рассмотрено приложение нового SCA к проблеме волн в неоднородных средах. Показано, что новое SCA обладает несомненными преимуществами при исследовании проблем стохастической радиофизики в средах с длинноволновыми неоднородностями, так как значительно лучше описывает форму, ширину и высоту резонансных линий, чем стандартное SCA. Это делает актуальным приложение нового SCA к проблеме магнитоупругого резонанса в неоднородной среде.

Теория магнитоупругого резонанса в однородной среде была развита в основополагающих работах [16–19], давших стимул многочисленным последующим как теоретическим, так и экспериментальным исследованиям этого явления. Магнитоупругий резонанс приводит к появлению энергетической щели в спектре спиновых и упругих волн в точке пересечения их дисперсионных кривых и, соответственно, двух резонансных пиков на частотных зависимостях функций Грина спиновых и упругих волн. Теория магнитоупругого резонанса в неоднородной среде была развита в работах [20–23] в рамках стандартного SCA. Была исследована матричная функция Грина системы связанных спиновых и упругих волн при изменении соотношения между средним значением  $\varepsilon$  и среднеквадратичной флуктуацией  $\Delta\varepsilon$  параметра связи между волнами от однородного случая ( $\varepsilon \neq 0$ ,  $\Delta\varepsilon = 0$ ) до предельно стохастизованного ( $\varepsilon = 0$ ,  $\Delta\varepsilon \neq 0$ ). Был обнаружен ряд эффектов, возникающих при сближении резонансных пиков и слиянии их в один пик с ростом  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением  $\varepsilon$ : тонкая структура на вершинах функций Грина в форме узкого резонанса на функции Грина спиновых волн и узкого антирезонанса на функции Грина упругих

волн, изгибы на склонах пиков и так далее. Представляет интерес рассмотреть, как модифицируется описание этих эффектов в более точной теории магнитоупругого резонанса, развиваемой в рамках нового SCA.

Целью данной работы является обобщение предложенного в работе [14] нового SCA на систему двух взаимодействующих волновых полей и развитие на основе этого обобщения более точной теории магнитоупругого резонанса в неоднородной среде.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим модель ферромагнетика, в котором неоднородным является только безразмерный параметр магнитоупругой связи  $\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ . Для этой среды уравнения движения — это уравнение Ландау–Лифшица для вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  и уравнение движения теории упругости для вектора упругих смещений  $\mathbf{u}$ :

$$\dot{\mathbf{M}} = -g[\mathbf{M} \times \mathbf{H}^e], \quad (1)$$

$$p\ddot{u}_i = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j + f_i, \quad (2)$$

где  $g$  — гиромангнитное отношение,  $p$  — плотность среды,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $i, j = x, y, z$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — внешняя объемная сила. Эффективное магнитное поле  $\mathbf{H}^e$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  имеют вид

$$\mathbf{H}^e = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{x})}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{ij}}, \quad (4)$$

где  $u_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$  — тензор упругих деформаций. Плотность энергии  $\mathcal{H}$  запишем в виде

$$\mathcal{H} = \alpha(\partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{x})^2/2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \lambda u_{ii}^2/2 + \mu u_{ij}^2 + \varepsilon(\mathbf{x})M_i M_j u_{ij}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — параметр обмена,  $\lambda$  и  $\mu$  — силовые упругие константы,  $\mathbf{H} = H_0\mathbf{z} + \mathbf{h}$ ,  $H_0$  — внешнее постоянное магнитное поле вдоль оси  $z$ ,  $\mathbf{h}$  — внешнее переменное магнитное поле, перпендикулярное оси  $z$ . Представим магнитоупругий параметр  $\varepsilon(\mathbf{x})$  в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon + \Delta\varepsilon\rho(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  — среднее значение этого параметра,  $\Delta\varepsilon$  — его среднеквадратичная флуктуация, а  $\rho(\mathbf{x})$  — центрированная ( $\langle\rho(\mathbf{x})\rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle\rho^2(\mathbf{x})\rangle = 1$ ) случайная функция координат. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций этой случайной функции.

Стохастические свойства неоднородностей  $\rho(\mathbf{x})$  характеризуются корреляционной функцией, зависящей от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,

$$K(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (7)$$

или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью неоднородностей

$$S(\mathbf{k}) = \int K(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Подставив плотность энергии (5) в уравнения движения (1) и (2), получим связанную систему уравнений для векторов намагниченности  $\mathbf{M}$  и смещения  $\mathbf{u}$ :

$$-\frac{\dot{\mathbf{M}}}{g} = \left[ \mathbf{M} \times \left\{ \alpha \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H} - \varepsilon(\mathbf{x}) M_j \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \right], \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = v_t^2 \Delta \mathbf{u} + (v_1^2 - v_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon(\mathbf{x}) M_j \mathbf{M}) + \frac{\mathbf{f}}{p}, \quad (10)$$

где  $v_1 = [(\lambda + 2\mu)/p]^{1/2}$  и  $v_t = [\mu/p]^{1/2}$  — соответственно продольные и поперечные скорости упругих волн.

Уравнение Ландау–Лифшица (9) мы линеаризуем обычным образом ( $M_z \approx M$ ;  $M_x, M_y \ll M$ ), а для упругих волн ограничимся здесь модельной задачей: помимо условия  $v_1 = v_t = v_u$  наложим усло-

вие  $u_z = 0$ . Полагая  $M_x, M_y \propto e^{i\omega t}$  и вводя циркулярные проекции

$$\begin{aligned} m^\pm &= M_x \pm iM_y, & h^\pm &= h_x \pm ih_y, \\ u^\pm &= u_x \pm iu_y, & f^\pm &= f_x \pm if_y, \end{aligned} \quad (11)$$

получаем для резонансных проекций  $m^+$  и  $u^+$  (здесь и в дальнейшем индекс «+» опускаем) связанную систему двух скалярных уравнений

$$\alpha(\nabla^2 + \nu_m)m - \varepsilon M \frac{\partial u}{\partial z} - (\Delta \varepsilon) M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial z} = -h, \quad (12)$$

$$\mu(\nabla^2 + \nu_u)u + \varepsilon M \frac{\partial m}{\partial z} + (\Delta \varepsilon) M \frac{\partial}{\partial z} (\rho(\mathbf{x})m) = -f. \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\nu_m = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M}, \quad \nu_u = \frac{\omega^2}{v_u^2}, \quad (14)$$

где  $\omega_0$  — частота однородного ФМР, которая зависит от магнитного поля и размагничивающих факторов образца,  $v_u = \sqrt{\mu/p}$  — скорость упругой волны.

Запишем систему уравнений (12) и (13) в матричном виде:

$$\left[ \hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x}) \right] \hat{Z}(\mathbf{x}) = \hat{F}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

где

$$\hat{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 + \nu_m & -\frac{\varepsilon M}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon M}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} & \nabla^2 + \nu_u \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\hat{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta \varepsilon}{\mu} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\Delta \varepsilon}{\mu} M \left( \frac{\partial}{\partial z} \rho(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha m \\ \mu u \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -h \\ -f \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Из этой формы записи следует, что нормированными переменными для связанной системы уравнений являются величины  $\alpha m$  и  $\mu u$ . Эту нормировку мы используем и при введении матричной функции Грина системы, записав для нее уравнение в виде

$$\left[ \hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x}) \right] \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \hat{E}. \quad (19)$$

Здесь

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & \tilde{G}_{mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ \tilde{G}_{um}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & \tilde{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $\tilde{G}_{mm}$  и  $\tilde{G}_{mu}$  — спиновые функции Грина соответственно при магнитном и упругом точечном возбуждениях, а  $\tilde{G}_{uu}$  и  $\tilde{G}_{um}$  — упругие функции Грина соответственно при упругом и магнитном точечном возбуждении,  $\hat{E}$  — единичная матрица:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Представим функцию Грина  $\hat{G}$  в виде

$$\hat{G} = \hat{g} + \hat{G}', \quad (22)$$

где  $\hat{g}$  — исходная функция Грина,  $\hat{G}'$  — поправка, обусловленная неоднородной частью параметра взаимодействия.

Подставляя выражение (22) в (19), получаем уравнения для  $\hat{g}$  и  $\hat{G}'$ :

$$\hat{L}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\hat{E}, \quad (23)$$

$$\hat{L}(\mathbf{x})\hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{R}(\mathbf{x})\hat{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (24)$$

Решение уравнения (23) для исходной функции Грина  $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ , которая описывает связанные магнитоупругие волны в однородной среде, может быть найдено точно. Перейдем к исследованию уравнения (24) для поправки  $\hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ . Согласно общим правилам, формальное решение уравнения (24) можно представить в виде интеграла от произведения невозмущенной функции Грина и правой части этого уравнения. Подставляя это решение в формулу (22), получаем генерирующее интегральное уравнение для матричной функции Грина  $\hat{G}'$

$$\hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \int \hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{R}(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'. \quad (25)$$

В уравнении (25) мы поменяли местами функции  $\hat{g}$  и  $\hat{G}'$  под знаком интеграла; необходимость такой перестановки обоснована в работе [14]. Элементы матрицы  $\hat{R}$  содержат производные случайной функции  $\rho(\mathbf{x})$ , что неудобно для последующего использования. Поэтому мы преобразуем интеграл в уравнении (25) методом интегрирования по частям каждого элемента матрицы, как это было сделано ранее в работе [21]. Вынося  $\gamma$  и  $\rho$  из матрицы  $\hat{R}$ , мы получаем генерирующее интегральное уравнение матричной функции Грина  $\hat{G}$  в виде

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma \int \rho(\mathbf{x}')\hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{J}\hat{Y}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}', \quad (26)$$

где

$$\hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \frac{\partial \tilde{G}_{mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \\ \tilde{G}_{um}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \frac{\partial \tilde{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\hat{Y}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} g_{mm}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) & g_{mu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial g_{um}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial z'} & \frac{\partial g_{uu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial z'} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\alpha/\mu} \\ \sqrt{\mu/\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\gamma = \frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{\alpha\mu}} M. \quad (30)$$

Перепишывая формулы (27) и (28) в виде

$$\hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{E}_1(\mathbf{x}'), \quad (31)$$

$$\hat{Y}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) = \hat{E}_1(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0), \quad (32)$$

где

$$\hat{E}_1(\mathbf{x}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

получаем генерирующее интегральное уравнение матричной функции Грина  $\hat{G}$  в окончательном виде

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma \int \rho(\mathbf{x}'')\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \times \times \hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}''. \quad (34)$$

Для удобства последующих выкладок мы заменили в уравнении (34) переменную интегрирования  $\mathbf{x}'$  на  $\mathbf{x}''$ . Используя обычную процедуру последовательных итераций уравнения (34), получаем бесконечный ряд для матричной функции Грина  $\hat{G}$ :

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma \int \rho(\mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \times \times \hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'' + \gamma^2 \iint \rho(\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}'') \times \times \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{E}_1(\mathbf{x}')\hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \times \hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' + \dots \quad (35)$$

Усредняя этот ряд по ансамблю реализаций случайных функций  $\rho(\mathbf{x})$  и расцепляя корреляторы по формуле Гаусса, получаем ряд для усредненной матричной функции Грина:

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \times \times \hat{E}_1(\mathbf{x}')\hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')\hat{E}_1(\mathbf{x}'') \times \times \hat{J}\hat{E}_1(\mathbf{x}'')\hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' + \dots \quad (36)$$

Представляем полученный ряд в форме матричного уравнения Дайсона

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{E}_1(\mathbf{x}') \times \\ \times \hat{\Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \hat{E}_1(\mathbf{x}'') \hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (37)$$

где собственная энергия  $\hat{\Sigma}$  имеет вид

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 \iint K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'') \hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \times \\ \times \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') \hat{J} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (38)$$

Здесь матричная вершинная функция представляет собой бесконечный ряд по  $\gamma^2$ . Ограничиваясь двумя первыми членами этого разложения, получаем

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \approx \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1) \hat{E} + \\ + \gamma^2 \iiint K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_4) \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) \times \\ \times \hat{\Gamma}(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6; \mathbf{x}_2) \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 d\mathbf{x}_5 d\mathbf{x}_6, \quad (39)$$

где

$$\hat{X}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') = \hat{E}_1(\mathbf{x}_1) \hat{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') \hat{E}_1(\mathbf{x}''). \quad (40)$$

Индексы при аргументах всех вершинных функций соответствуют аналогичным индексам формулы (21) работы [14]. Это обусловлено тем, что в обоих случаях используется одна и та же форма генерирующего интегрального уравнения (25), соответствующая переставленным функциям  $\hat{g}$  и  $\hat{G}$ . Поэтому дальнейший вывод самосогласованного приближения для матричной вершинной функции (39) аналогичен выводу такого же приближения для скалярной вершинной функции в работе [14].

### 3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

Проводим преобразование Фурье всех матричных величин:

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int \hat{Y}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (41)$$

$$\hat{Y}_{\mathbf{k}} = \int \hat{Y}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (42)$$

где  $d$  — размерность пространства. Затем находим приближенное выражение для собственной энергии

$\hat{\Sigma}$  в  $\mathbf{k}$ -пространстве, подставляя фурье-трансформанту уравнения (39) в фурье-трансформанту уравнения (38). Приравнявая точное и приближенное выражения для собственной энергии  $\hat{\Sigma}$ , находим матричный аналог нового самосогласованного приближения, выведенного для скалярных функций в работе [14]:

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \hat{E} \left\{ \hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} - \gamma^2 (2\pi)^{-d} \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} \times \right. \\ \left. \times \int S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_1} \hat{\Gamma}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} d\mathbf{k}_1 \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\}^{-1}, \quad (43)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \approx \hat{E} \left\{ \hat{E} - \gamma^2 (2\pi)^{-d} \times \right. \\ \left. \times \int S_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \hat{\Gamma}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_2} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_2 \right\}^{-1}. \quad (44)$$

Здесь

$$\hat{X}_{\mathbf{k}_1} = \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \hat{G}_{\mathbf{k}_1} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(1)}, \quad (45)$$

$$\hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} = \begin{bmatrix} \nu_m - k^2 & -i(\varepsilon/\mu) M k_z \\ i(\varepsilon/\alpha) M k_z & \nu_u - k^2 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\hat{g}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} g_{mm}(\mathbf{k}) & i g_{mu}(\mathbf{k}) \\ -i g_{um}(\mathbf{k}) & g_{uu}(\mathbf{k}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i k_z \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i k_z \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Матричную функцию Грина  $\hat{G}_{\mathbf{k}}$  представим аналогично исходной матричной функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  в виде

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} G_{mm}(\mathbf{k}) & i G_{mu}(\mathbf{k}) \\ -i G_{um}(\mathbf{k}) & G_{uu}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Компоненты исходной матричной функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  имеют вид

$$g_{mm}(\mathbf{k}) = \frac{\nu_u - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{mu}(\mathbf{k}) = \frac{(\varepsilon/\mu) M k_z}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{um}(\mathbf{k}) = \frac{(\varepsilon/\alpha) M k_z}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{uu}(\mathbf{k}) = \frac{\nu_m - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \quad (49)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\mu}} M. \quad (50)$$

Отметим, что при разложении вершинной функции (44) в ряд по  $\gamma^2$  мы получаем в каждом члене ряда повторяющиеся произведения матриц  $\hat{J}\hat{X}$ . Такое же повторение матричных произведений мы получим для искомой функции Грина (43), многократно подставляя в уравнения (43) и (44) и разлагая в ряд по  $\gamma^2$  полученную бесконечную ветвящуюся цепную дробь. Для примера выпишем один член ряда с пересекающимися линиями корреляциями, который пропорционален  $\gamma^4$ :

$$\gamma^4(2\pi)^{-2d} \hat{X}_{\mathbf{k}}^{(0)} \iint S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} S_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \times \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_2}^{(0)} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}^{(0)} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}}^{(0)} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (51)$$

Перемножая  $\hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} \hat{J}$  и  $\hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}^{(0)} \hat{J}$ , где  $\hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} = \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \hat{g}_{\mathbf{k}_1} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(1)}$ , мы получаем матрицы, элементы которых поменяются местами по отношению к  $\hat{X}^{(0)}$ , например:

$$\hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} = \begin{bmatrix} g_{mm}(\mathbf{k}_1) & k_{1z} g_{mu}(\mathbf{k}_1) \\ k_{1z} g_{um}(\mathbf{k}_1) & k_{1z}^2 g_{uu}(\mathbf{k}_1) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$\hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} = \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} \hat{J} = \begin{bmatrix} k_{1z}^2 g_{uu}(\mathbf{k}_1) & (\alpha/\mu) k_{1z} g_{um}(\mathbf{k}_1) \\ (\mu/\alpha) k_{1z} g_{mu}(\mathbf{k}_1) & g_{mm}(\mathbf{k}_1) \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Избавившись таким образом от недиагональных матриц  $\hat{J}$ , получаем

$$\gamma^4(2\pi)^{-2d} \hat{X}_{\mathbf{k}}^{(0)} \iint S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} S_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \times \hat{X}_{\mathbf{k}_1}^{(0)} \hat{X}_{\mathbf{k}_2}^{(0)} \hat{X}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}^{(0)} \hat{X}_{\mathbf{k}}^{(0)} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (54)$$

Чередование матриц  $\hat{X}$  и  $\hat{X}$  характерно для всех членов бесконечного ряда, так как взаимодействие передается от спиновой волны к упругой, от нее — снова к спиновой, и так далее.

Матричный аналог нового самосогласованного приближения (43) и (44) содержит в себе все матричные аналоги приближений более низкого уровня. Пренебрегая в знаменателе уравнения (44) членом порядка  $\gamma^2$ , мы получаем  $\hat{\Gamma}_{k_1, k-k_1}^{(m)} = \hat{E}$ . Подставляя это значение в уравнение (43), получаем матричный аналог стандартного SCA:

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \hat{E} \left\{ \hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} - \gamma^2(2\pi)^{-d} \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} \times \int S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \hat{G}_{\mathbf{k}_1} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(1)} \hat{J} d\mathbf{k}_1 \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\}^{-1}. \quad (55)$$

Ограничиваясь первой итерацией уравнения (55),  $\hat{G}_{\mathbf{k}_1} = \hat{g}_{\mathbf{k}_1}$ , мы получаем матричный аналог несамосогласованного приближения Бурре (Борна) [3, 24, 25]:

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \hat{E} \left\{ \hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} - \gamma^2(2\pi)^{-d} \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} \times \int S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \hat{g}_{\mathbf{k}_1} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(1)} \hat{J} d\mathbf{k}_1 \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right\}^{-1}. \quad (56)$$

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

В дальнейшем мы ограничиваемся одномерными неоднородностями параметра связи  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(z)$ . Тогда во всех уравнениях (43)–(54)  $d = 1$  и вектор  $\mathbf{k}$  имеет одну компоненту  $k_z = k$ . Моделируем корреляционные свойства случайной функции  $\rho(x)$  экспоненциальной корреляционной функцией

$$K(r) = e^{-k_c|x-x'|}, \quad S_k = \frac{2k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad (57)$$

где  $r = |x-x'|$ ,  $k_c$  — корреляционное волновое число ( $r_c = k_c^{-1}$  — корреляционный радиус неоднородностей).

Для численного анализа систему уравнения (43) и (44) записываем в виде рекуррентных формул:

$$\hat{G}_k^{(n)} = \hat{E} \left\{ \hat{g}_k^{-1} - \gamma^2(2\pi)^{-1} \hat{E}_k^{(1)} \int S_{k-k_1} \times \hat{J} \hat{E}_{k_1}^{(2)} \hat{G}_{k_1}^{(n-1)} \hat{E}_{k_1}^{(1)} \hat{\Gamma}_{k_1, k-k_1}^{(m)} \hat{J} dk_1 \hat{E}_k^{(2)} \right\}^{-1}, \quad (58)$$

$$\hat{\Gamma}_{k_1, k-k_1}^{(m)} \approx \hat{E} \left\{ \hat{E} - \gamma^2(2\pi)^{-d} \int S_{k_1-k_2} \times \hat{\Gamma}_{k_2, k_1-k_2}^{(m-1)} \hat{J} \hat{E}_{k_2}^{(2)} \hat{G}_{k_2}^{(n)} \hat{E}_{k_2}^{(1)} \hat{J} \hat{E}_{k-k_1+k_2}^{(2)} \times \hat{G}_{k-k_1+k_2}^{(n)} \hat{E}_{k-k_1+k_2}^{(1)} dk_2 \right\}^{-1}, \quad (59)$$

где индекс  $n$  соответствует итерационному процессу для функции Грина, а индекс  $m$  — итерационному процессу для вершинной функции.

С ростом неоднородностей величина  $\varepsilon$  уменьшается от своего начального значения  $\varepsilon_0$  до нуля, а  $\Delta\varepsilon$  увеличивается от нуля до некоторого максимального значения  $\varepsilon'$ , близкого к  $\varepsilon_0$ . Для простоты положим  $\varepsilon' = \varepsilon_0$  и исследуем изменение элементов функций Грина в точке кроссинг-резонанса  $k = k_r$  с ростом  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением  $\varepsilon$  при сохранении суммы



квадратов этих величин, как это было предложено в работе [22]:

$$\varepsilon^2 + (\Delta\varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2. \quad (60)$$

Разумеется, экспериментальные образцы, в которых путем изменения их состава или способа обработки созданы промежуточные состояния между двумя предельными случаями — однородным ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\Delta\varepsilon = 0$ ) и полностью стохастизованным ( $\varepsilon = 0$ ,  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0$ ), — не обязаны подчиняться закономерности (60). Эта закономерность введена лишь для того, чтобы нам было удобно упорядоченно рассматривать все промежуточные состояния с различным соотношением  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ . В точке пересечения невозмущенных законов дисперсии ( $k = k_r$ ,  $\omega = \omega_r$ ) в спектре магнитоупругих волн возникает щель, ширина которой  $\Lambda$  пропорциональна параметру связи в однородной среде  $\varepsilon_0$ ,

$$\Lambda = \frac{\varepsilon_0 M}{\sqrt{\mu}} \sqrt{2\omega_M \omega_r}, \quad (61)$$

где  $\omega_m = gM$ . Величина  $\Lambda$  определяет также расстояние между двумя максимумами на частотной зависимости мнимой части функции Грина как спиновых, так и упругих волн в области магнитоупругого резонанса в однородной среде. В величинах  $\Lambda$  мы выражаем безразмерную частоту на всех приведенных ниже графиках.

Рассмотрим сначала предельный случай, соответствующий бесконечному радиусу корреляций ( $k_c = 0$ ). Тогда спектральная плотность представляется в виде дельта-функции,  $S(k - k_1) = 2\pi\delta(k - k_1)$ , и интегральные члены цепных дробей (58) и (59) превращаются в алгебраические. Это резко упрощает расчеты функций Грина как для нового, так и для стандартного SCA. Более того, в этом случае может быть найдена точная функция Грина (аналог модели Келдыша [26] для матричной функции Грина). В этом случае случайные функции  $\rho(\mathbf{x})$  превращаются в случайные величины, стохастические свойства которых описываются некоторой функцией распределения  $f(\rho)$ . Расчет точной функции Грина для этой ситуации проводим тем же методом, который был использован нами для нахождения точной скалярной функции Грина волн в неоднородной среде [22]. Для этого мы возвращаемся к исходной системе двух скалярных уравнений для резонансных проекций  $m^+$  и  $u^+$  (12) и (13). Эти уравнения при  $k_c = 0$  превращаются в уравнения с постоянными коэффициентами и их аналитические решения легко находятся после выполнения преобразования Фурье. Также легко находятся в  $\mathbf{k}$ -пространстве

точные аналитические решения матричного уравнения (19) для неусредненной функции Грина системы

$$\hat{G}(\omega, k; \rho) = \begin{bmatrix} \check{G}_{mm}(\omega, k; \rho) & i\check{G}_{mu}(\omega, k; \rho) \\ -i\check{G}_{um}(\omega, k; \rho) & \check{G}_{uu}(\omega, k; \rho) \end{bmatrix}, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \check{G}_{mm}(\omega, k; \rho) &= \frac{\nu_u - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma_0 + \gamma\rho)^2 k^2}, \\ \check{G}_{mu}(\omega, k; \rho) &= \frac{\sqrt{\alpha/\mu} k (\gamma_0 + \gamma\rho)}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma_0 + \gamma\rho)^2 k^2}, \\ \check{G}_{um}(\omega, k; \rho) &= \frac{\sqrt{\mu/\alpha} k (\gamma_0 + \gamma\rho)}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma_0 + \gamma\rho)^2 k^2}, \\ \check{G}_{uu}(\omega, k; \rho) &= \frac{\nu_m - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma_0 + \gamma\rho)^2 k^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Заметим, что эти выражения отличаются от выражений для исходной матричной функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  (49) только присутствием случайных величин  $\rho$ , и при  $\gamma = 0$  совпадают с выражениями (49).

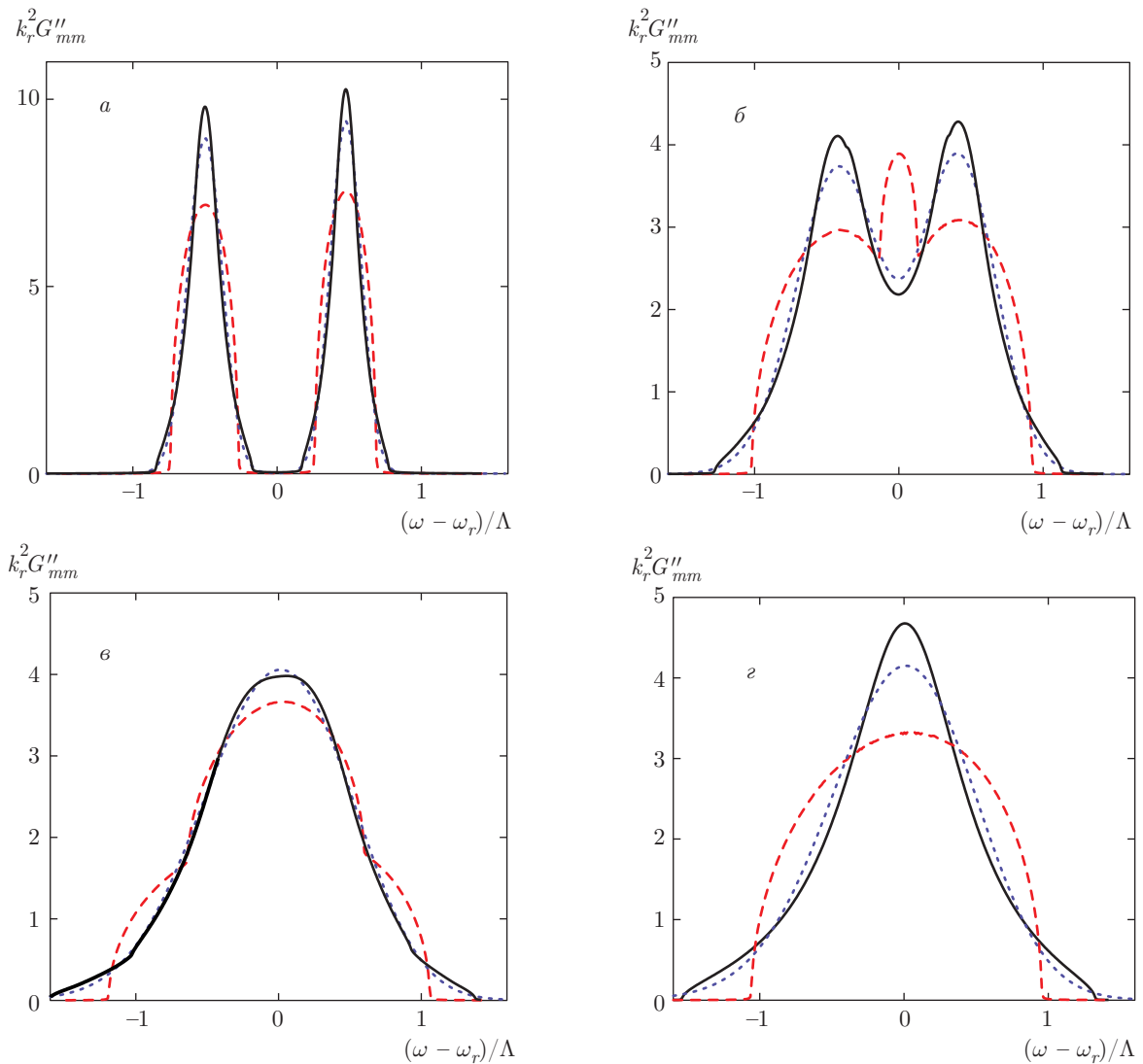
Усредненная матричная функция Грина определяется выражением

$$\hat{G}(\omega, k) = \int \hat{G}(\omega, k; \rho) f(\rho) d\rho, \quad (64)$$

где  $f(\rho)$  — функция распределения случайных величин  $\rho$ , которая в общем случае может иметь произвольную форму. Для рассматриваемой здесь ситуации, в которой расщепление корреляторов в выражении (35) проводится по формуле Гаусса,  $f(\rho)$  является функцией Гаусса,

$$f(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\rho^2/2}. \quad (65)$$

На рис. 1 показаны мнимые части функции Грина спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  волн в области магнитоупругого резонанса для случая  $k_c = 0$  в стандартном SCA (штриховые красные кривые), новом SCA (сплошные черные кривые) и при точном суммировании всех диаграмм (пунктирные синие кривые). Ширина пиков, обусловленная стохастическим распределением частот, увеличивается с ростом среднеквадратичной флуктуации  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением среднего значения  $\varepsilon$  параметра связи между спиновыми



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Мнимые части функции Грина спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  волн в стандартном SCA (штриховые кривые (красные)), новом SCA (сплошные кривые) и при точном суммировании всех диаграмм (пунктирная кривая (синяя)) при  $k_c = 0$  и различных  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ : а — 0.95 и 0.05, б — 0.7 и 0.3, в — 0.25 и 0.75, г — 0 и 1

и упругими волнами, пики постепенно сближаются друг с другом, пока не сливаются в один широкий пик. Видно, что при использовании стандартного SCA (уравнение (55)) проявляется ряд необычных эффектов: куполообразная форма резонансов, кривые с тремя максимумами (рис. 1б), изгибы на склонах пика (рис. 1в). Аналогичные эффекты были получены в работах [20–23], где теория магнитоупругого резонанса развивалась в рамках стандартного SCA. Там было высказано предположение, что эти эффекты являются следствием недостатков стандартного SCA, и для обоснования этого предположения рассмотрена упрощенная модель перекры-

тия двух не взаимодействующих куполообразных резонансов. В развиваемой здесь более точной теории магнитоупругого резонанса все эти странные эффекты отсутствуют как на графиках точных функций Грина (уравнение (64)), так и на графиках нового SCA, соответствующего системе уравнений (58), (59). Новое SCA значительно лучше, чем стандартное, описывает как форму пиков, так и их ширины, и наиболее близко к точным графикам. Начиная с упорядоченного случая ( $\varepsilon \neq 0, \Delta\varepsilon = 0$ ) и заканчивая случаем полной стохастизации параметра связи ( $\varepsilon = 0, \Delta\varepsilon \neq 0$ ) происходит плавное преобразование двух узких пиков в один широкий пик. Мнимые час-



ти функции Грина упругих волн  $G''_{uu}(\omega)$  на рис. 1 не приведены, так как они отличаются от мнимых частей функции Грина спиновых волн  $G''_{mm}(\omega)$  лишь большей высотой резонансных пиков. Это следует из соотношения, полученного для случая  $k_c = 0$  в работе [22],

$$\frac{G''_{mm}(\omega, k_r)}{G''_{uu}(\omega, k_r)} = \frac{v_m}{v_u}, \quad (66)$$

где  $v_m < v_u$ ,  $v_m = 2\alpha g M k_r$  — скорость спиновых волн в области магнитоупругого резонанса.

Рассмотрим теперь общий случай, соответствующий произвольному значению корреляционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ . На рис. 2 мнимые части диагональных элементов матричных функций Грина соответственно спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  и упругих  $G''_{uu}(\omega)$  волн показаны для случая  $\kappa_c = k_c/k_r = 0.01$ . Видно, что даже столь малое  $\kappa_c$  приводит к существенному изменению формы резонансных пиков. Во-первых, форма резонансных пиков функции Грина упругих волн  $G''_{uu}(\omega)$  не совпадает теперь с формой пиков функции Грина спиновых волн  $G''_{mm}(\omega)$ . Во-вторых, с ростом  $\Delta\varepsilon$  в окрестности  $\omega = \omega_r$  появляется тонкая структура спектра: узкий пик (резонанс) на функции Грина спиновых волн  $G''_{mm}(\omega)$  (рис. 2) и провал (антирезонанс) на функции Грина упругих волн  $G''_{uu}(\omega)$ . Эта тонкая структура спектра была обнаружена и исследована нами в работах [20–23], в которых теория магнитоупругого резонанса в неоднородной среде была развита в рамках стандартного SCA (красные штриховые кривые на рис. 2). Несмотря на существенные различия формы резонансных пиков, рассчитанных в стандартном и новом SCA, основные свойства тонкой структуры спектра проявляются как в новом, так и в стандартном SCA. Так, если наложить графики нижнего ряда рис. 2 (с учетом их масштаба) на соответствующие графики верхнего ряда, то как в стандартном, так и в новом SCA максимум узкого пика на функции Грина спиновых волн  $G''_{mm}(\omega)$  будет касаться минимума провала на функции Грина упругих волн  $G''_{uu}(\omega)$  при любых соотношениях между  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ . В работе [21] мы предположили, что это является следствием закона равномерного распределения энергии между спиновыми и упругими колебаниями, который выполняется только в центре щели, в точке  $k = k_r$ ,  $\omega = \omega_r$ :

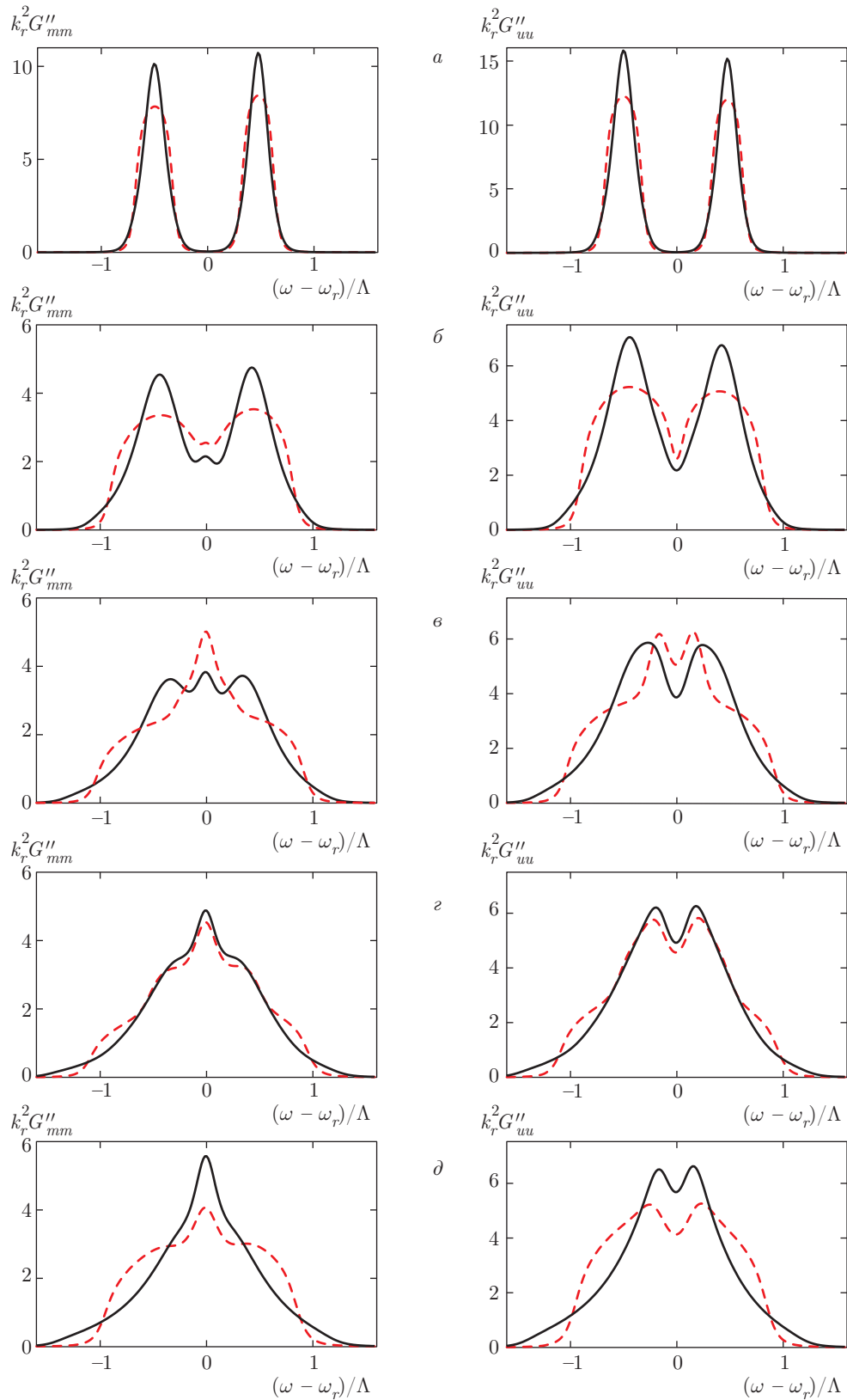
$$G''_{mm}(\omega_r, k_r) = G''_{uu}(\omega_r, k_r). \quad (67)$$

Это предположение подтверждается универсальностью закона (67): он выполняется как при любых

соотношениях между  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ , так и при любых значениях корреляционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ . При этом вне области существования резонансных пиков тонкой структуры спектра соотношение (66), полученное для случая  $k_c = 0$ , приближенно выполняется и при отличных от нуля значениях  $k_c$ .

Рассмотрим теперь случай корреляционного радиуса, на порядок меньшего, чем на рис. 2. На рис. 3 мнимые части диагональных элементов матричных функций Грина соответственно спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  и упругих  $G''_{uu}(\omega)$  волн показаны для случая  $\kappa_c = 0.1$ . Видно, что расхождения между результатами стандартного и нового SCA с ростом  $k_c$  резко уменьшились. Штриховые кривые теперь близки к сплошным кривым. Остались только признаки проявления тонкой структуры на вершинах пиков (нижний ряд, рис. 3*г,д*). Равенство (67) при этом продолжает выполняться. Если мы продолжим увеличивать  $k_c$ , то при  $k_c \gtrsim 0.5$  результаты стандартного и нового SCA совпадут между собой. Это соответствует работе [14], в которой при таких же значениях  $\kappa_c$  совпали между собой результаты расчета в стандартном SCA и новом SCA функции Грина волн в неоднородной среде.

Рассмотрим еще одну ситуацию, которая может проявляться при увеличении  $k_c$ . Слияние двух узких резонансных пиков в один широкий пик с увеличением  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением  $\varepsilon$  при малых  $k_c$  может происходить еще при отличных от нуля  $\varepsilon$  (рис. 4, сплошная красная кривая). Рассмотрим вид мнимых частей диагональных элементов матричной функции Грина при постоянных величинах отношений  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.25$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.75$  и при различных значениях  $\kappa_c$  (рис. 4). При малых  $\kappa_c$  два пика уже слились в один широкий пик (сплошная красная кривая). На вершине этого пика видна тонкая структура спектра: узкий пик (резонанс) на функции Грина спиновых волн  $G''_{mm}(\omega)$  и провал (антирезонанс) на функции Грина упругих волн  $G''_{uu}(\omega)$ . С увеличением  $k_c$  при постоянном соотношении между  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  тонкая структура на вершинах пиков постепенно исчезает и один пик снова расщепляется на два пика (штриховая черная кривая и штрихпунктирная синяя кривая). Ширина каждого из этих пиков уменьшается, а высота увеличивается при дальнейшем возрастании  $k_c$ . Как и для одиночного резонанса, исследованного в работах [14, 15], этот эффект обусловлен частичным усреднением неоднородностей на интервалах, соответствующих половине длины волны  $\lambda$ . В результате такого усреднения форма матричной функции Гри-



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  (левый ряд) и упругих  $G''_{uu}(\omega)$  (правый ряд) волн в стандартном (штриховые кривые (красные)) и новом SCA (сплошные кривые) при  $k_c = 0.01$  и различных  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ : *a* — 0.95 и 0.05, *б* — 0.75 и 0.25, *в* — 0.5 и 0.5, *г* — 0.25 и 0.75, *д* — 0 и 1

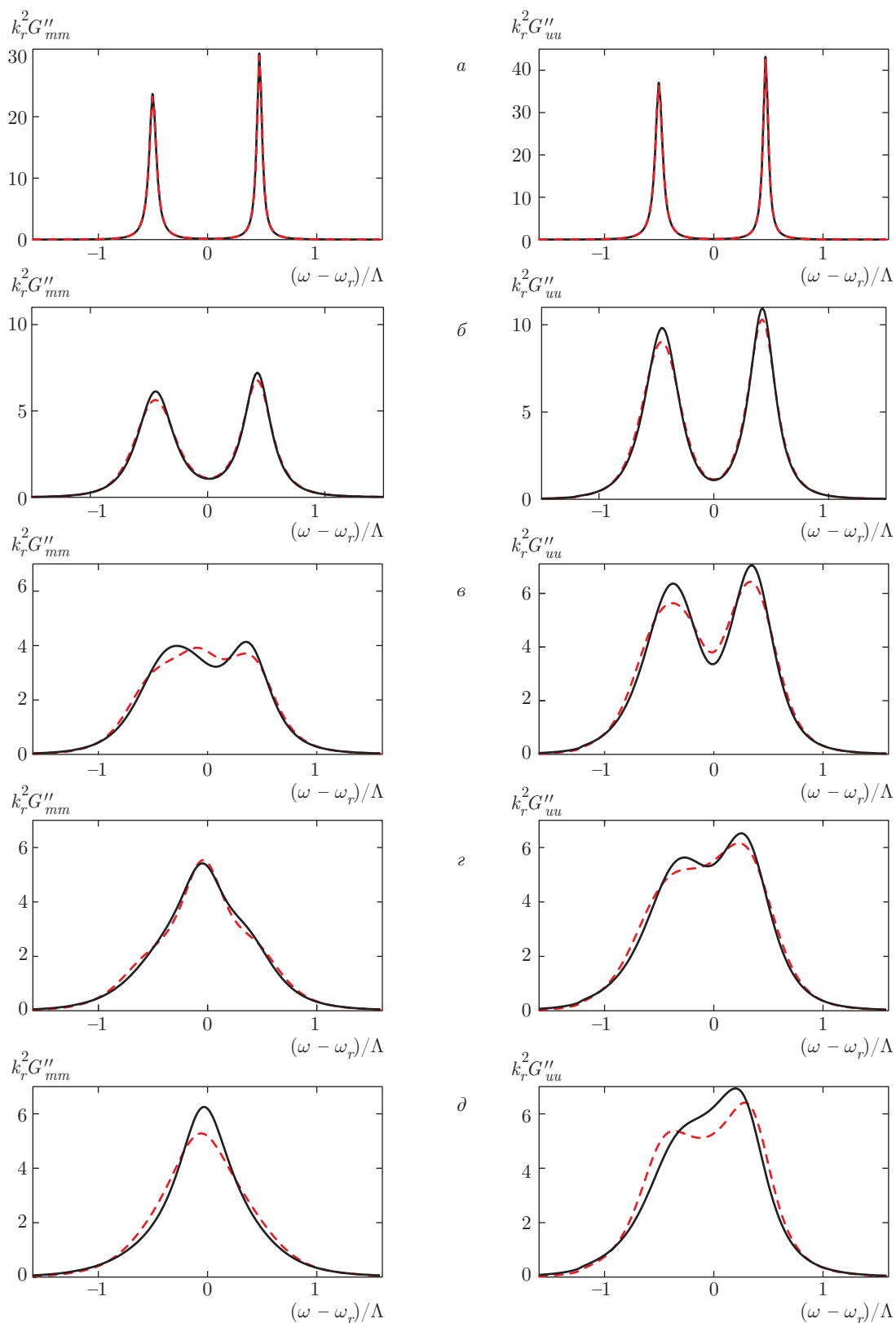
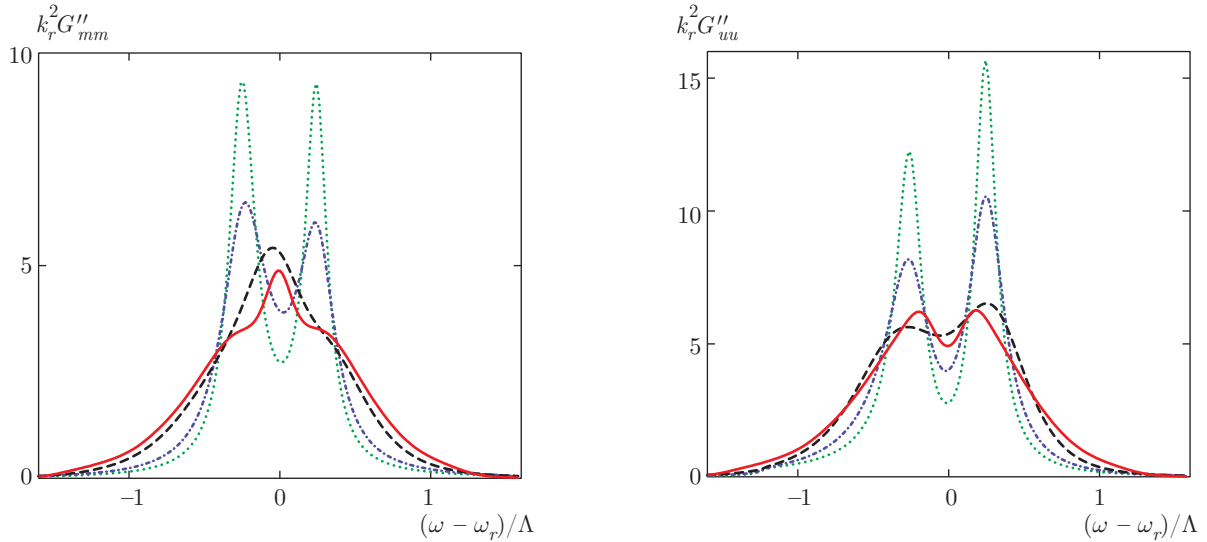


Рис. 3. (В цвете онлайн) Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  (левый ряд) и упругих  $G''_{uu}(\omega)$  (правый ряд) волн в стандартном (штриховые кривые (красные)) и новом SCA (сплошные кривые) при  $k_c = 0.1$  и различных  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ : а — 0.95 и 0.05, б — 0.75 и 0.25, в — 0.5 и 0.5, г — 0.25 и 0.75, д — 0 и 1



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых  $G''_{mm}(\omega)$  и упругих  $G''_{uu}(\omega)$  волн в новом SCA при  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.25$  и  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.75$  и различных  $k_c$ : 0.01 (сплошная кривая (красная)), 0.1 (штриховая кривая), 0.3 (штрихпунктирная кривая (синяя)) и 0.5 (пунктирная кривая (зеленая))

на с ростом  $k_c$  все более приближается к форме магнитоупругого резонанса в эффективной однородной среде с магнитоупругим параметром  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Если мы начнем теперь увеличивать  $\Delta\varepsilon$  и уменьшать  $\varepsilon$  при постоянном  $k_c$ , то пики снова сольются в один пик.

Рассмотрим теперь недиагональные элементы  $G_{mi}$  и  $G_{um}$  матричной функции Грина для предельного случая  $k_c = 0$ . Для этого достаточно исследовать одну функцию  $G_{ij}$ , связанную с  $G_{mi}$  и  $G_{um}$  соотношениями

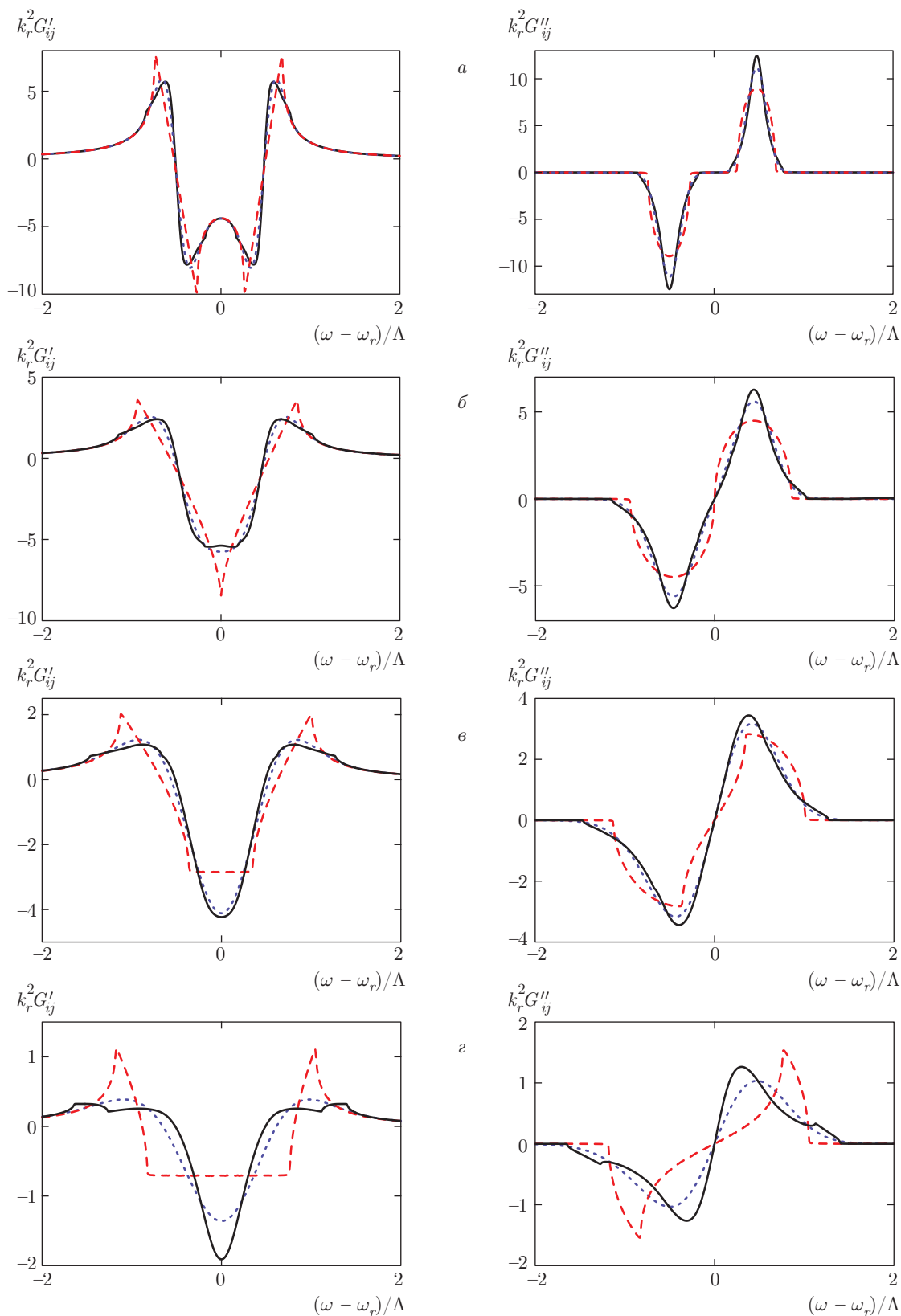
$$G_{ij}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} G_{mi}(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} G_{um}(\omega). \quad (68)$$

Действительная  $G'_{ij}(\omega)$  и мнимая  $G''_{ij}(\omega)$  части недиагонального элемента показаны на рис. 5. На рисунках показаны функции, как вычисленные в стандартном (штриховые красные кривые) и новом SCA (сплошные черные кривые), так и соответствующие точному суммированию всех диаграмм по формуле (64) (пунктирные синие кривые). Поскольку недиагональные элементы пропорциональны  $\varepsilon$ , с увеличением  $\Delta\varepsilon$  амплитуда их падает и обращается в нуль при  $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 1$  и  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0$ . На рис. 5 этому падению амплитуды соответствует увеличение масштаба оси ординат. Видно, что форма функций Грина, рассчитанных в стандартном SCA, довольно сильно искажена по сравнению с формой, соответствующей точному значению этих функций. В то же время, форма функций Грина, рассчитанных

в новом SCA, очень близка к форме точных функций Грина. При  $k_c$ , отличном от нуля, с увеличением  $k_c$  кривые, рассчитанные в стандартном и новом SCA, сближаются друг с другом, и при  $k_c \gtrsim 0.5$  эти кривые практически совпадают между собой. Отметим, что в новом SCA подтверждается факт отсутствия тонкой структуры в спектре недиагональных элементов функций Грина, который был обнаружен ранее в рамках стандартного SCA [22].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были поставлены две цели: обобщение предложенного нами ранее нового самосогласованного приближения [14] на систему двух взаимодействующих волновых полей и развитие на основе этого обобщения более точной теории магнитоупругого резонанса в неоднородной среде. Первая цель — методическая. Для ее реализации выведена система самосогласованных уравнений для матричной функции Грина и матричной вершинной функции в приближении, учитывающем как первый, так и второй члены разложения вершинной функции. Развитый математический метод может быть использован для анализа связанных колебаний различной физической природы в средах с частично или полностью стохастизованным параметром связи: поларитонов, магнитоупругих волн и так далее. Метод применим в широком интервале значений корреля-



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Действительные (верхний ряд) и мнимые (нижний ряд) части недиагональных элементов матричной функции Грина в стандартном SCA (штриховые кривые (красные)), новом SCA (сплошные кривые) и при точном суммировании всех диаграмм (пунктирная кривая (синяя)) при  $k_c = 0$  и различных  $(\epsilon/\epsilon_0)^2$  и  $(\Delta\epsilon/\epsilon_0)^2$ :  $a$  — 0.95 и 0.05,  $б$  — 0.8 и 0.2,  $в$  — 0.5 и 0.5,  $з$  — 0.1 и 0.9

ционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ : от  $k_c = 0$  (бесконечного радиуса корреляций) до значений  $k_c$ , соответствующих классическому пределу. Однако интервал целесообразности применения этого метода гораздо уже: функции Грина, рассчитанные в стандартном и новом приближениях, с ростом  $k_c$  сближаются друг с другом и при  $k_c/k \geq 0.5$  они практически совпадают между собой. Поэтому для больших значений  $k_c$  целесообразно применять гораздо более простой метод стандартного самосогласованного приближения. Отметим, что для проблемы одного волнового поля в неоднородной среде был получен такой же интервал значений корреляционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ , в котором результаты, полученные в стандартном и новом приближениях, отличались друг от друга [15]. Для предельного случая бесконечного радиуса корреляций ( $k_c = 0$ ), помимо приближенных, получены также точные аналитические выражения, соответствующие суммированию всех диаграмм элементов матричной функции Грина. В этом случае проведено сравнение как стандартного, так и нового самосогласованного приближения с точными аналитическими выражениями. Показано, что новое самосогласованное приближение значительно лучше, чем стандартное, описывает как форму резонансных пиков, так и их ширины, и наиболее близко к точным графикам функции Грина.

Для приложения развитого метода были выбраны связанные магнитоупругие волны в ферромагнетике с неоднородным параметром магнитоупругой связи. Такой выбор обусловлен тем, что теория магнитоупругого резонанса в неоднородной среде была развита нами ранее в рамках стандартного самосогласованного приближения [20–23]. Представляло интерес выяснить, к каким изменениям полученных в этой теории эффектов приведет новое самосогласованное приближение. Основным результатом, обусловленный новым методом, — это резкое улучшение формы резонансных пиков динамической восприимчивости. Полученная в прежней теории куполообразная форма пиков магнитоупругого резонанса, резонансные кривые с тремя максимумами (не связанными с резонансом тонкой структуры), изгибы на склонах резонансных кривых — все эти эффекты оказались результатом недостатков использованного ранее метода. В то же время, результаты, описывающие уширение и сближение пиков магнитоупругого резонанса, и слияние их в один широкий пик с ростом среднеквадратичной флуктуации  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением среднего значения  $\varepsilon$  параметра связи, полученные ранее в рамках

стандартного самосогласованного приближения, качественно сохраняются и в новой теории — в них вносятся только количественные коррективы. Особое значение имеет подтверждение в новой теории не наблюдавшегося пока экспериментально эффекта возникновения тонкой структуры спектра — узкого резонансного пика на функции Грина спиновых волн и узкого провала на функции Грина упругих волн. Этот эффект должен проявляться при взаимодействии любых волновых полей различной физической природы. Величина эффекта прямо пропорциональна отношению скоростей этих полей в точке кроссинг-резонанса. Для магнитоупругого резонанса это отношение сравнительно небольшое и пики тонкой структуры малы. Однако есть взаимодействующие друг с другом физические поля с очень большим отношением скоростей (поляритоны, электрон-фононное взаимодействие и др.), для которых пики тонкой структуры могут достигать больших величин [27].

Работа частично была выполнена в рамках Комплексной Программы № П.2П (0356-2015-0411) СО РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
2. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys. **2**, 124 (1961).
3. H. Bruus and K. Flensberg, *Introduction to Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*, Ørsted Laboratory, Niels Bohr Institute, Copenhagen, Denmark (2002).
4. J. Cai, X. L. Lei, and L. M. Xie, Phys. Rev. B **39**, 11618 (1989).
5. V. N. Kostur and B. Mitrovic, Phys. Rev. B **50**, 12774 (1994).
6. C. Grimaldi, L. Pietronero, and S. Strässler, Phys. Rev. Lett. **75**, 1158 (1995).
7. Y. Takada and T. Higuchi, Phys. Rev. B **52**, 12720 (1995).
8. O. V. Danylenko, O. V. Dolgov, and V. V. Losyakov, Phys. Lett. A **230**, 79 (1997).
9. G. A. Ummarino and R. S. Gonnelli, Phys. Rev. B **56**, R14279 (1997).
10. F. Cosenza, L. De Cesare, and M. Fusco Girard, Phys. Rev. B **59**, 3349 (1999).



11. O. V. Danylenko and O. V. Dolgov, Phys. Rev. B **63**, 094506 (2001).
12. J. P. Hague and N. d'Ambrumenil, J. Low Temp. Phys. **151**, 1149 (2008).
13. Johannes Bauer, Jong E. Han, and Olle Gunnarsson, Phys. Rev. B **84**, 184531 (2011).
14. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, J. Phys. A: Math. Theor. **49**, 095004 (2016).
15. V. A. Ignatchenko, D. S. Polukhin, and D. S. Tsikalov, J. Magn. Magn. Mater. (2017); dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.12.058.
16. А. И. Ахиезер, *Тезисы докладов и выступлений на совещании по физике магнитных явлений*, Москва (Май, 23–31, 1956), Металлургиздат, Свердловск (1956).
17. Е. А. Туров, Ю. П. Ирхин, ФММ **3**, 15 (1956).
18. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ **35**, 228 (1958).
19. C. Kittel, Phys. Rev. **110**, 835 (1958).
20. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, Sol. St. Phenom. **190**, 51 (2012).
21. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, ЖЭТФ **143**, 238 (2013).
22. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, ЖЭТФ **144**, 972 (2013).
23. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, Sol. St. Phenom. **215**, 105 (2014).
24. R. C. Bourret, Nuovo Cim. **26**, 1 (1962).
25. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику (Часть II. Случайные поля)*, Наука, Москва (1978).
26. М. В. Садовский, *Диаграмматика. Лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния*, Издание второе, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург (2005).
27. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, Phys. Proc. **86**, 117 (2017).