

# РАЗЛОЖЕНИЕ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ В СИЛЬНОНЕУПОРЯДОЧЕННОЙ МОДЕЛИ АНДЕРСОНА – ХАББАРДА С ПРИТЯЖЕНИЕМ

Э. З. Кучинский<sup>a\*</sup>, Н. А. Кулеева<sup>a</sup>, М. В. Садовский<sup>a,b\*\*</sup>

<sup>a</sup> Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук  
620016, Екатеринбург, Россия

<sup>b</sup> Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук  
620990, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 8 февраля 2017 г.

Исследовано влияние разупорядочения на коэффициенты разложения Гинзбурга–Ландау по степеням сверхпроводящего параметра порядка в модели Андерсона–Хаббарда с притяжением в рамках обобщенного DMFT+ $\Sigma$ -приближения. Рассмотрена широкая область изменения потенциала притяжения  $U$  — от предела слабой связи, где сверхпроводимость описывается моделью Бардина–Купера–Шриффера (БКШ), к пределу очень сильной связи, где переход в сверхпроводящее состояние связан с конденсацией Бозе–Эйнштейна (БЭК) компактных куперовских пар, образующихся при температуре, существенно большей температуры перехода в сверхпроводящее состояние, а также широкий интервал разупорядочения — от слабого до сильного, когда система находится в окрестности перехода Андерсона. В случае полуэллиптической затравочной плотности состояний влияние беспорядка на коэффициенты  $A$  и  $B$  перед квадратом и четвертой степенью параметра порядка универсально для любой силы электронных корреляций и связано лишь с общим уширением затравочной зоны беспорядком (обобщенная теорема Андерсона). Такая универсальность отсутствует для коэффициента перед градиентным членом разложения  $C$ . В обычной теории «грязных» сверхпроводников коэффициент  $C$  убывает с ростом беспорядка. В области сильного беспорядка в БКШ-пределе коэффициент  $C$  очень чувствителен к эффектам андерсоновской локализации, которые ведут к дальнейшему его уменьшению с ростом беспорядка вплоть до области андерсоновского диэлектрика. В области кроссовера БКШ–БЭК и в пределе БЭК коэффициент  $C$  и все связанные с ним физические величины достаточно слабо зависят от беспорядка. В частности, это приводит к относительно слабой зависимости от беспорядка в области очень сильной связи как длины проникновения, так и длины когерентности и связанного с ней наклона верхнего критического поля в точке сверхпроводящего перехода.

DOI: 10.7868/S0044451017070124

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования влияния разупорядочения на сверхпроводимость имеют достаточно долгую историю. В пионерских работах Абрикосова и Горькова [1–4] рассматривались пределы слабого беспорядка ( $p_F l \gg 1$ , где  $p_F$  — импульс Ферми и  $l$  — длина свободного пробега) и сверхпроводимости со слабой связью, хорошо описываемой теорией Бардина–Купера–Шриффера (БКШ). Известная

теорема Андерсона о критической температуре  $T_c$  сверхпроводников с «нормальным» (немагнитным) беспорядком [5, 6] также обычно относится к этому пределу.

Обобщение теории «грязных» сверхпроводников на случай достаточно сильного беспорядка ( $p_F l \sim 1$ ) (и далее, вплоть до области перехода Андерсона) было выполнено в работах [7–9], где сверхпроводимость также рассматривалась в пределе слабой связи.

Проблема обобщения теории БКШ в область очень сильной связи рассматривается уже достаточно давно. Существенный прогресс в этом направлении был связан с работой Нозьера и Шмитт-Ринка [10], которые предложили эффективный метод для

\* E-mail: kuchinsk@iep.uran.ru

\*\* E-mail: sadovski@iep.uran.ru

исследования кроссовера от поведения типа БКШ в области слабой связи к бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в области сильной связи. В то же время проблема сверхпроводимости неупорядоченных систем в пределе сильной связи и в области кроссовера БКШ–БЭК исследована достаточно слабо.

Одной из наиболее простых моделей, в которых можно исследовать кроссовер БКШ–БЭК, является модель Хаббарда с притяжением. Наиболее успешным подходом к исследованию модели Хаббарда как для описания сильнокоррелированных систем в случае отталкивательного взаимодействия, так и для исследования кроссовера БКШ–БЭК в случае притяжения является теория динамического среднего поля (dynamical mean-field theory, DMFT) [11–13].

В последние годы нами развивался обобщенный DMFT+ $\Sigma$ -подход к модели Хаббарда [14–19], который оказался очень удобным для исследования влияния различных внешних (по отношению к учитываемому в рамках DMFT) взаимодействий. В частности, этот подход хорошо применим и для анализа двухчастичных свойств, таких как оптическая (динамическая) проводимость [18, 20].

В работе [21] мы использовали этот подход для анализа одночастичных свойств нормальной фазы и оптической проводимости модели Хаббарда с притяжением. В дальнейшем DMFT+ $\Sigma$ -метод был использован нами в работе [22] для исследования влияния беспорядка на температуру сверхпроводящего перехода, вычислявшуюся в рамках подхода Нозьера–Шмитт-Ринка. В частности, в этой работе для случая полуэллиптической модели затравочной плотности состояний, адекватной для описания трехмерных систем, мы численно продемонстрировали выполнение обобщенной теоремы Андерсона и показали, что влияние беспорядка на критическую температуру (во всей области изменения параметров взаимодействия) связано лишь с общим уширением затравочной зоны (плотности состояний) беспорядком. В работе [23] нами было приведено аналитическое доказательство такой универсальности влияния беспорядка (в DMFT+ $\Sigma$ -приближении) на одночастичные характеристики и температуру сверхпроводящего перехода для случая полуэллиптической зоны.

Начиная с классической работы Горькова [3], хорошо известно, что разложение Гинзбурга–Ландау играет фундаментальную роль в теории грязных сверхпроводников, позволяя эффективно исследовать поведение различных физических величин вблизи критической температуры в зависимости от

степени беспорядка [6]. Обобщение этой теории в область сильного беспорядка (вплоть до андерсоновского перехода металл–диэлектрик) также основывалось на микроскопическом выводе коэффициентов этого разложения [7–9]. Однако соответствующее рассмотрение, как уже отмечено выше, всегда проводилось в пределе слабой связи теории БКШ.

В работе [24] с помощью комбинации приближений Нозьера–Шмитт-Ринка и DMFT+ $\Sigma$  в модели Хаббарда с притяжением был дан микроскопический вывод коэффициентов  $A$  и  $B$  однородного разложения Гинзбурга–Ландау перед квадратом и четвертой степенью сверхпроводящего параметра порядка, продемонстрировавший универсальность влияния беспорядка на коэффициенты  $A$  и  $B$  разложения и связанного с ними скачка теплоемкости при критической температуре (обобщенная теорема Андерсона). В дальнейшем в работе [25] мы исследовали поведение коэффициента  $C$  при градиентном члене разложения Гинзбурга–Ландау, для которого такая универсальность отсутствует. При этом мы рассматривали этот коэффициент лишь в области слабого беспорядка ( $p_{Fl} \gg 1$ ) в лестничном приближении по примесному рассеянию, как это делается в стандартной теории грязных сверхпроводников [3], однако для всей области изменения параметра спаривательного взаимодействия, включая область кроссовера БКШ–БЭК и предел очень сильной связи. Фактически, при этом мы пренебрегали эффектами андерсоновской локализации, которые в пределе сильного беспорядка ( $p_{Fl} \sim 1$ ) могут существенно изменить поведение коэффициента  $C$  [7–9].

В данной работе мы сосредоточимся главным образом на исследовании коэффициента  $C$  в области сильного беспорядка, когда существенны эффекты от локализации Андерсона.

## 2. МОДЕЛЬ ХАББАРДА В РАМКАХ DMFT+ $\Sigma$ -ПОДХОДА И ПРИБЛИЖЕНИИ НОЗЬЕРА–ШМИТТ-РИНКА

Мы рассматриваем неупорядоченную немагнитную модель Андерсона–Хаббарда с притяжением, гамильтониан которой имеет вид

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle \sigma} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \sum_{i\sigma} \epsilon_i n_{i\sigma} - U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (1)$$

где  $t > 0$  — амплитуда перескока между ближайшими соседями,  $U$  — хаббардовское притяжение на узле,  $n_{i\sigma} = a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma}$  — оператор числа электронов на узле,  $a_{i\sigma}$  ( $a_{i\sigma}^\dagger$ ) — оператор уничтожения (рождения) электрона со спином  $\sigma$ , локальные энергии

$\epsilon_i$  полагаются независимыми случайными величинами на разных узлах решетки. Для справедливости стандартной «примесной» диаграммной техники [26, 27] мы предполагаем гауссовское распределение для энергетических уровней  $\epsilon_i$ :

$$\mathcal{P}(\epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi W}} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^2}{2W^2}\right). \quad (2)$$

Ширина распределения  $W$  служит мерой силы беспорядка, а гауссовское случайное поле энергетических уровней (независимое на различных узлах решетки — корреляция типа белого шума) вызывает «примесное» рассеяние, которое рассматривается в рамках стандартного подхода, основанного на вычислении усредненных функций Грина [27].

Обобщенный DMFT+ $\Sigma$ -подход [14–17] дополняет стандартную DMFT [11–13] учетом добавочной «внешней» собственно-энергетической части (СЭЧ)  $\Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon)$  (в общем случае зависящей от импульса), являющейся следствием любого вида взаимодействия за пределами DMFT, и дает эффективный метод вычисления как одночастичных, так и двухчастичных свойств [18, 20]. Успех такого обобщенного подхода связан с выбором одночастичной функции Грина в виде

$$G(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\epsilon + \mu - \epsilon(\mathbf{p}) - \Sigma(\epsilon) - \Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon)}, \quad (3)$$

где  $\epsilon(\mathbf{p})$  — затравочная электронная дисперсия, а полная СЭЧ, вследствие пренебрежения интерференцией между хаббардовским и внешним взаимодействиями, является аддитивной суммой локальной СЭЧ  $\Sigma(\epsilon)$ , определяемой DMFT, и внешней СЭЧ  $\Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon)$ . Это позволяет сохранить систему самосогласованных уравнений стандартной DMFT [11–13]. При этом на каждом шаге итерационной схемы DMFT внешняя СЭЧ  $\Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon)$  пересчитывается заново с помощью некоторой приближенной схемы, соответствующей виду добавочного взаимодействия, а локальная функция Грина также «одевается» функцией  $\Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon)$  на каждом шаге стандартной DMFT-процедуры.

В рассматриваемой здесь задаче о рассеянии на беспорядке [18, 19] для внешней СЭЧ, входящей в DMFT+ $\Sigma$ -цикл, мы используем простейшее (самосогласованное борновское) приближение, пренебрегающее «пересекающимися» диаграммами для примесного рассеяния, которое дает

$$\Sigma_{\mathbf{p}}(\epsilon) \rightarrow \Sigma_{imp}(\epsilon) = W^2 \sum_{\mathbf{p}} G(\epsilon, \mathbf{p}). \quad (4)$$

В данной работе, как и в предыдущих, для решения эффективной однопримесной модели Андерсона в DMFT использовался чрезвычайно эффективный метод численной ренормгруппы (numerical renormalization group, NRG) [28].

В дальнейшем мы принимаем модель затравочной зоны с полуэллиптической плотностью состояний (на элементарную ячейку с параметром решетки  $a$  и один спин), которая является неплохим приближением в трехмерном случае:

$$N_0(\epsilon) = \frac{2}{\pi D^2} \sqrt{D^2 - \epsilon^2}, \quad (5)$$

где  $D$  определяет полуширину зоны проводимости.

В работе [23] мы показали, что в DMFT+ $\Sigma$ -подходе в модели с полуэллиптической плотностью состояний все влияние беспорядка на одночастичные свойства сводится лишь к уширению зоны беспорядком, т. е. к замене  $D \rightarrow D_{eff}$ , где  $D_{eff}$  — эффективная полуширина затравочной зоны в отсутствие электронных корреляций ( $U = 0$ ), уширенная беспорядком:

$$D_{eff} = D \sqrt{1 + 4 \frac{W^2}{D^2}}. \quad (6)$$

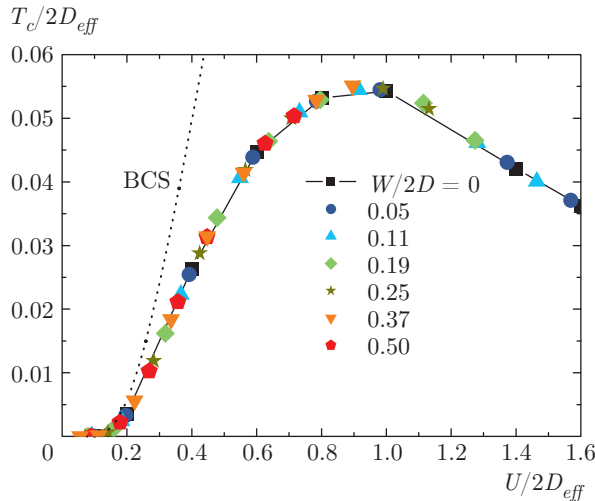
«Затравочная» (в отсутствие  $U$ ) плотность состояний, «одетая» беспорядком,

$$\tilde{N}_0(\xi) = \frac{2}{\pi D_{eff}^2} \sqrt{D_{eff}^2 - \xi^2}, \quad (7)$$

остаётся полуэллиптической и в присутствии беспорядка. Необходимо отметить, что в других моделях затравочной зоны беспорядок наряду с уширением зоны будет изменять и форму плотности состояний. Поэтому полной универсальности влияния беспорядка на одночастичные свойства, сводящейся к замене  $D \rightarrow D_{eff}$ , вообще говоря, нет. Однако в пределе интересующего нас сильного беспорядка затравочная зона становится практически полуэллиптической и универсальность восстанавливается [23].

Все расчеты в данной работе, как и в предыдущих, были проведены для достаточно типичного случая четвертичного заполнения зоны (число электронов на узел решетки  $n = 0.5$ ).

При рассмотрении сверхпроводимости в широком интервале изменений спаривательного взаимодействия  $U$ , следуя работам [21, 23], мы используем приближение Нозьера – Шмитт-Ринка [10], что позволяет качественно правильно (хотя и приближенно) описать область кроссовера БКШ–БЭК. В таком подходе для определения критической темпера-



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Универсальная зависимость температуры сверхпроводящего перехода от силы хаббардовского притяжения для различной степени беспорядка

туры  $T_c$  используется [23] обычное уравнение БКШ типа

$$1 = \frac{U}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \tilde{N}_0(\varepsilon) \frac{\text{th}[(\varepsilon - \mu)/2T_c]}{\varepsilon - \mu}, \quad (8)$$

в котором химический потенциал  $\mu$  для разных значений  $U$  и  $W$  определяется из DMFT+ $\Sigma$ -расчетов, т. е. из стандартного уравнения для числа электронов (заполнение зоны), определяемого функцией Грина типа (3), что позволяет найти  $T_c$  в широком интервале значений параметров модели, включая область кроссовера БКШ–БКЭ и предел сильной связи, а также для различных степеней беспорядка. Это отражает физический смысл приближения Нозьера–Шмитт-Ринка: в области слабой связи температура перехода контролируется уравнением для куперовской неустойчивости (8), тогда как в пределе сильной связи она определяется как температура БЭК, которая контролируется химическим потенциалом.

В работе [23] было показано, что влияние беспорядка на критическую температуру  $T_c$  и одночастичные характеристики (например, плотность состояний) в модели с полуэллиптической затравочной плотностью состояний универсально и сводится лишь к изменению эффективной ширины зоны. Для иллюстрации на рис. 1 приведена универсальная зависимость критической температуры  $T_c$  от хаббардовского притяжения для различных степеней беспорядка [23]. В области слабой связи температура сверхпроводящего перехода хорошо описывается моделью БКШ (на рис. 1 для сравнения пунктиром

приведена кривая, получаемая в модели БКШ, в которой  $T_c$  определяется уравнением (8) с не зависящим от  $U$  химическим потенциалом, определяемым условием четвертичного заполнения для «голой» зоны), а в области сильной связи критическая температура в основном определяется условием бозеконденсации куперовских пар и убывает с ростом  $U$  как  $t^2/U$ , проходя через максимум при  $U/2D_{eff} \sim 1$ .

Обзор этих и других результатов, полученных для неупорядоченной модели Хаббарда в DMFT+ $\Sigma$ -приближении, можно найти в работе [19].

### 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

Разложение Гинзбурга–Ландау для разности плотностей свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний запишем в стандартном виде [27]:

$$F_s - F_n = A|\Delta_{\mathbf{q}}|^2 + q^2 C|\Delta_{\mathbf{q}}|^2 + \frac{B}{2}|\Delta_{\mathbf{q}}|^4, \quad (9)$$

где  $\Delta_{\mathbf{q}}$  — амплитуда фурье-компоненты параметра порядка  $\Delta$ .

Разложение (9) определяется показанными на рис. 2 графиками петлевого разложения для свободной энергии в поле флуктуаций параметра порядка (обозначенных пунктирными линиями) с малым волновым вектором  $\mathbf{q}$  [27].

В рамках подхода Нозьера–Шмитт-Ринка [10] мы используем приближение слабой связи для анализа коэффициентов Гинзбурга–Ландау, поэтому петли с двумя и четырьмя куперовскими вершинами, приведенные на рис. 2, не содержат вклада от хаббардовского притяжения, а «одеты» лишь примесным рассеянием. Однако, как и при нахождении  $T_c$ , химический потенциал, который существенно зависит от силы связи и в пределе сильной связи определяет условия бозеконденсации куперовских пар, необходимо находить в рамках DMFT+ $\Sigma$ -процедуры.

В работе [24] было показано, что в таком подходе коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются следующими выражениями:

$$A(T) = \frac{1}{U} - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \tilde{N}_0(\varepsilon) \frac{\text{th}[(\varepsilon - \mu)/2T]}{2(\varepsilon - \mu)}, \quad (10)$$

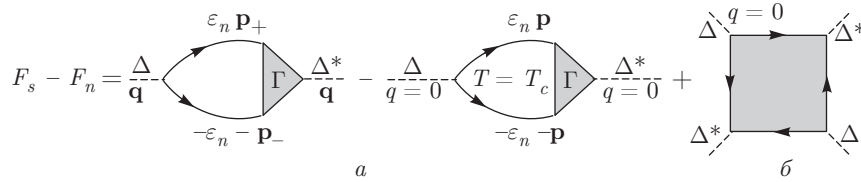


Рис. 2. Диаграммный вид разложения Гинзбурга – Ландау;  $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2(\varepsilon - \mu)^3} \left( \text{th} \frac{\varepsilon - \mu}{2T} - \frac{(\varepsilon - \mu)/2T}{\text{ch}^2[(\varepsilon - \mu)/2T]} \right) \tilde{N}_0(\varepsilon). \quad (11)$$

При  $T \rightarrow T_c$  коэффициент  $A(T)$  имеет обычный вид:

$$A(T) \equiv \alpha(T - T_c). \quad (12)$$

В БКШ-пределе, где  $T = T_c \rightarrow 0$ , для коэффициентов  $\alpha$  и  $B$  получаем стандартный результат [27]:

$$\alpha_{BCS} = \frac{\tilde{N}_0(\mu)}{T_c}, \quad B_{BCS} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} \tilde{N}_0(\mu). \quad (13)$$

Таким образом, коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются лишь уширенной беспорядком плотностью состояний  $\tilde{N}_0(\varepsilon)$  и химическим потенциалом. Поэтому в случае полуэллиптической затравочной плотности состояний зависимость этих коэффициентов от беспорядка связана лишь с простой заменой  $D \rightarrow D_{eff}$ , что приводит к универсальным (не зависящим от степени беспорядка) кривым зависимостей от  $U/2D_{eff}$  соответствующим образом приведенных к безразмерному виду коэффициентов  $(\alpha(2D_{eff})^2$  и  $B(2D_{eff})^3$ ) [24]. Фактически коэффициенты  $\alpha$  и  $B$  быстро убывают с ростом силы связи  $U/2D_{eff}$ .

Необходимо отметить, что выражения (10) и (11) для коэффициентов  $A$  и  $B$  были получены в работе [24] с использованием точных тождеств Уорда и остаются справедливыми и в условиях сильного беспорядка (включая область андерсоновской локализации).

Универсальная зависимость от беспорядка, связанная лишь с уширением зоны  $D \rightarrow D_{eff}$ , наблюдается, в частности, и для скачка теплоемкости в точке перехода, определяемого коэффициентами  $\alpha$  и  $B$  [24]:

$$C_s(T_c) - C_n(T_c) = T_c \frac{\alpha^2}{B}. \quad (14)$$

Из диаграммного представления разложения Гинзбурга – Ландау, приведенного на рис. 2, ясно, что  $C$  определяется коэффициентом перед  $q^2$  в

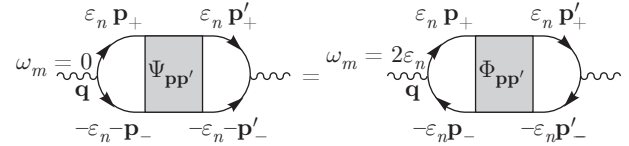


Рис. 3. Равенство петель в куперовском и диффузионном каналах в условиях инвариантности относительно обращения времени

куперовской двухчастичной петле (два первых слагаемых на рис. 2). Поэтому для коэффициента возникает выражение

$$C = -T \lim_{q \rightarrow 0} \sum_{n, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \frac{\Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, \mathbf{q}) - \Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, 0)}{q^2}, \quad (15)$$

где  $\Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, \mathbf{q})$  – двухчастичная функция Грина в куперовском канале (рис. 3), «одетая» в приближении Нозьера – Шмитт-Ринка лишь примесным рассеянием. В условиях инвариантности относительно обращения времени (в отсутствие внешнего магнитного поля и магнитных примесей) и в связи с тем, что примесное рассеяние, которым «одета» двухчастичная функция Грина  $\Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, \mathbf{q})$ , является статическим, можно изменить направление всех нижних электронных линий с одновременным изменением знака всех входящих в них импульсов (см. рис. 3). В результате получаем

$$\Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, \mathbf{q}) = \Phi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\omega_m = 2\varepsilon_n, \mathbf{q}), \quad (16)$$

где  $\varepsilon_n$  – фермионные мацубаровские частоты,  $\Phi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\omega_m = 2\varepsilon_n, \mathbf{q})$  – двухчастичная функция Грина в диффузионном канале, одетая примесями. В результате для куперовской восприимчивости получаем

$$\chi(\mathbf{q}) = -T \sum_{n, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \Psi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\varepsilon_n, \mathbf{q}) = -T \sum_{n, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \Phi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(\omega_m = 2\varepsilon_n, \mathbf{q}). \quad (17)$$



Выполняя стандартную процедуру суммирования по фермионным мацубаровским частотам [26, 27], получаем

$$\chi(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \operatorname{Im} \Phi^{RA}(\omega = 2\varepsilon, \mathbf{q}) \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T}, \quad (18)$$

где  $\Phi^{RA}(\omega, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' } \Phi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{RA}(\omega, \mathbf{q})$ . Для нахождения петли  $\Phi^{RA}(\omega, \mathbf{q})$  в условиях сильного беспорядка (в том числе в области андерсоновской локализации) можно воспользоваться приближенной самосогласованной теорией локализации [27, 29–33]. Тогда эта петля содержит диффузионный полюс следующего вида [18]:

$$\Phi^{RA}(\omega = 2\varepsilon, \mathbf{q}) = -\frac{\sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}{\omega + iD(\omega)q^2}, \quad (19)$$

где  $\Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon) = G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) - G^A(-\varepsilon, \mathbf{p})$ ,  $G^R$  и  $G^A$  — запаздывающая и опережающая функции Грина, а  $D(\omega)$  — зависящий от частоты обобщенный коэффициент диффузии. Тогда для коэффициента  $C$  получаем

$$\begin{aligned} C &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\chi(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q} = 0)}{q^2} = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\operatorname{th}(\varepsilon/2T)}{\varepsilon} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left( \frac{iD(2\varepsilon) \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}{\varepsilon + i\delta} \right) = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\operatorname{th}(\varepsilon/2T)}{\varepsilon^2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[ D(2\varepsilon) \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon) \right] - \\ &- \frac{1}{16T} \operatorname{Im} \left[ D(0) \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(0) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Обобщенный коэффициент диффузии в рамках самосогласованной теории локализации [27, 29–33] для рассматриваемой модели находится путем решения уравнения самосогласования [18]

$$\begin{aligned} D(\omega) &= i \frac{\langle v \rangle^2}{d} \left( \omega - \Delta \Sigma_{imp}^{RA}(\omega) + W^4 \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}^2(\varepsilon) \times \right. \\ &\left. \times \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\omega + iD(\omega)q^2} \right)^{-1}, \quad (21) \end{aligned}$$

где  $\omega = 2\varepsilon$ ,  $\Delta \Sigma_{imp}^{RA}(\omega) = \Sigma_{imp}^R(\varepsilon) - \Sigma_{imp}^A(-\varepsilon)$ ,  $d$  — размерность пространства, а средняя скорость  $\langle v \rangle$  определяется выражением

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{\mathbf{p}} |\mathbf{v}_{\mathbf{p}}| \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}{\sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \quad (22)$$

С учетом предела применимости диффузионного приближения суммирование по  $q$  в (21) должно быть ограничено областью [27, 32]

$$q < k_0 = \min\{l^{-1}, p_F\}, \quad (23)$$

где  $l$  — длина свободного пробега за счет упругого рассеяния на беспорядке, а  $p_F$  — импульс Ферми.

В пределе слабого беспорядка, когда локализационные поправки малы, куперовская восприимчивость  $\chi(\mathbf{q})$  и связанный с ней коэффициент  $C$  определяются лестничным приближением. В этом приближении коэффициент  $C$  был исследован нами в работе [25], где для него были получены общие аналитические результаты. Перестроим теперь уравнение самосогласования (21) так, чтобы в пределе слабого беспорядка получить точный лестничный результат. В лестничном приближении, когда мы пренебрегаем вкладом в неприводимую вершину от «максимально перекрестных» диаграмм, в правой части уравнения самосогласования (21) пропадает последнее слагаемое. Введем зависящий от частоты обобщенный коэффициент диффузии в лестничном приближении:

$$D_0(\omega) = \frac{\langle v \rangle^2}{d} \frac{i}{\omega - \Delta \Sigma_{imp}^{RA}(\omega)}. \quad (24)$$

Величину  $\langle v \rangle^2/d$ , входящую в уравнение самосогласования (21), можно переписать через этот коэффициент диффузии  $D_0$  в лестничном приближении. При этом уравнение самосогласования (21) принимает вид

$$\begin{aligned} D(\omega = 2\varepsilon) &= D_0(\omega = 2\varepsilon) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{W^4}{2\varepsilon - \Delta \Sigma_{imp}^{RA}(\omega = 2\varepsilon)} \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}^2(\varepsilon) \times \right. \\ &\left. \times \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{2\varepsilon + iD(\omega = 2\varepsilon)q^2} \right]^{-1}. \quad (25) \end{aligned}$$

В рамках подхода работы [25] коэффициент диффузии  $D_0(\omega = 2\varepsilon)$  в лестничном приближении может быть получен в аналитическом виде. Действительно, в лестничном приближении двухчастичная функция Грина (19) имеет вид

$$\Phi_0^{RA}(\omega = 2\varepsilon, \mathbf{q}) = -\frac{\sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}{\omega + iD_0(\omega = 2\varepsilon)q^2}. \quad (26)$$

Соответственно получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon, \mathbf{q} = 0) &\equiv \\ &\equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\Phi_0^{RA}(\omega = 2\varepsilon, \mathbf{q}) - \Phi_0^{RA}(\omega = 2\varepsilon, \mathbf{q} = 0)}{q^2} = \\ &= \frac{i \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}{\omega^2} D_0(\omega = 2\varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда коэффициент диффузии  $D_0$  может быть записан в виде

$$D_0 = \frac{\varphi(\varepsilon, \mathbf{q} = 0)(2\varepsilon)^2}{i \sum_{\mathbf{p}} \Delta G_{\mathbf{p}}(\varepsilon)}. \quad (28)$$

В работе [25] было показано, что с использованием точного тождества Уорда в лестничном приближении величина  $\varphi(\varepsilon, \mathbf{q} = 0)$  может быть представлена как

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon, \mathbf{q} = 0)(2\varepsilon)^2 &= \sum_{\mathbf{p}} v_x^2 G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) G^A(-\varepsilon, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_x^2} (G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) + G^A(-\varepsilon, \mathbf{p})), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $v_x = \partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial p_x$ .

Итак, по формулам (28), (29) мы находим коэффициент диффузии  $D_0$  в лестничном приближении. С использованием уравнения самосогласования (25) находим обобщенный коэффициент диффузии и с его помощью по формуле (20) определяем коэффициент  $C$ . В пределе слабого беспорядка, когда применимо лестничное приближение и обобщенный коэффициент диффузии фактически совпадает с коэффициентом диффузии в лестничном приближении, для коэффициента  $C$  возникает результат, полученный в работе [25]:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\text{th}(\varepsilon/2T)}{\varepsilon^2} \times \\ &\times \sum_{\mathbf{p}} \left\{ v_x^2 \text{Im}[G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) G^A(-\varepsilon, \mathbf{p})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p_x^2} \text{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{16T} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ v_x^2 \text{Re}[G^R(0, \mathbf{p}) G^A(0, \mathbf{p})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p_x^2} \text{Re} G^R(0, \mathbf{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, возникает интерполяционная схема для определения коэффициента  $C$ , которая в пределе слабого беспорядка воспроизводит результаты

лестничного приближения, а в пределе сильного беспорядка учитывает эффекты андерсоновской локализации (в рамках самосогласованной теории локализации).

При численных расчетах с помощью выражений (28) и (29) для конкретного значения  $\omega = 2\varepsilon$  сначала в лестничном приближении находится коэффициент диффузии  $D_0$ . Затем, решая итерациями трансцендентное уравнение самосогласования (25), находим обобщенный коэффициент диффузии для этой частоты. Далее, с использованием (20) рассчитывается коэффициент Гинзбурга – Ландау  $C$ .

В работе [18] было показано, что в DMFT+ $\Sigma$ -приближении для модели Андерсона – Хаббарда критический беспорядок, при котором происходит андерсоновский переход металл – диэлектрик,  $W/2D = 0.37$ , не зависит от величины хаббардовского взаимодействия  $U$ . Развитый выше подход для определения коэффициента  $C$  позволяет исследовать в том числе и область андерсоновского диэлектрика с беспорядком  $W/2D > 0.37$ .

#### 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Длина когерентности при данной температуре,  $\xi(T)$ , дает характерный масштаб неоднородностей параметра порядка  $\Delta$ :

$$\xi^2(T) = -\frac{C}{A}. \quad (31)$$

Поскольку коэффициент  $A = \alpha(T - T_c)$  меняет знак и обращается в нуль при критической температуре, имеем

$$\xi(T) = \frac{\xi}{\sqrt{1 - T/T_c}}, \quad (32)$$

где мы ввели длину когерентности сверхпроводника

$$\xi = \sqrt{\frac{C}{\alpha T_c}}, \quad (33)$$

которая в пределе слабой связи и в отсутствие беспорядка имеет стандартный вид [27]:

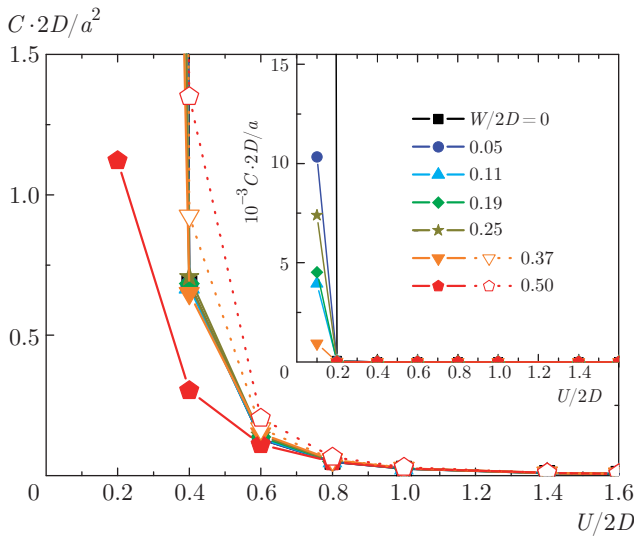
$$\xi_{BCS} = \sqrt{\frac{C_{BCS}}{\alpha_{BCS} T_c}} = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 d}} \frac{v_F}{T_c}. \quad (34)$$

Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник определяется как

$$\lambda^2(T) = -\frac{c^2}{32\pi e^2} \frac{B}{AC}. \quad (35)$$

Таким образом,

$$\lambda(T) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - T/T_c}}, \quad (36)$$



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Зависимости коэффициента  $C$  от силы хаббардовского притяжения для различных степеней беспорядка ( $a$  — параметр решетки). Темные символы и сплошные линии соответствуют расчетам с учетом локализационных поправок, светлые символы и пунктирные линии — лестничному приближению

где мы ввели величину

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{32\pi e^2} \frac{B}{\alpha C T_c}, \quad (37)$$

которая в отсутствие беспорядка в пределе слабой связи имеет вид

$$\lambda_{BCS}^2 = \frac{c^2}{32\pi e^2} \frac{B_{BCS}}{\alpha_{BCS} C_{BCS} T_c} = \frac{c^2}{16\pi e^2} \frac{d}{N_0(\mu) v_F^2}. \quad (38)$$

Отметим, что поскольку  $\lambda_{BCS}$  не зависит от  $T_c$ , а значит, и от силы связи, ее удобно использовать для нормировки глубины проникновения  $\lambda$  (37) при произвольных  $U$  и  $W$ .

Вблизи  $T_c$  верхнее критическое магнитное поле  $H_{c2}$  определяется через коэффициенты Гинзбурга–Ландау:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2(T)} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{A}{C}, \quad (39)$$

где  $\Phi_0 = c\pi/e$  — квант магнитного потока. Тогда для наклона кривой верхнего критического поля вблизи  $T_c$  получаем

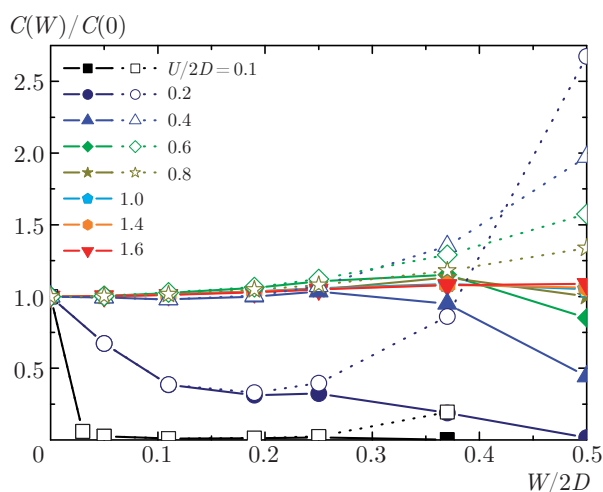
$$\frac{dH_{c2}}{dT} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\alpha}{C}. \quad (40)$$

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента  $C$  от силы хаббардовского притяжения для различных степеней беспорядка. Для данного рисунка

и для всех последующих темные символы и сплошные линии соответствуют расчетам с учетом локализационных поправок, а светлые символы и пунктирные линии — лестничному приближению. Коэффициент  $C$  является существенно двухчастичной характеристикой, поэтому для него не наблюдается универсальности в зависимости от беспорядка, как для коэффициентов  $A$  и  $B$ , и влияние беспорядка не сводится лишь к уширению эффективной ширины зоны беспорядком. Соответственно, в зависимости  $C$  от силы связи, где все энергетические единицы нормированы на эффективную ширину зоны  $2D_{eff}$ , не наблюдается универсальной кривой для различных степеней беспорядка [25], в отличие от соответствующих зависимостей для коэффициентов  $\alpha$  и  $B$ . Фактически, коэффициент  $C$  быстро уменьшается с ростом силы связи. Особенно сильное уменьшение наблюдается в области слабой связи (см. вставку к рис. 4). Локализационные поправки становятся существенными в пределе достаточно сильного беспорядка ( $W/2D > 0.25$ ). При таком сильном беспорядке локализационные поправки заметно уменьшают коэффициент  $C$  в области слабой связи (ср. пунктирные (лестничное приближение) и сплошные (с учетом локализационных поправок) кривые для  $W/2D = 0.37$  и  $W/2D = 0.5$ ). В области сильной связи ( $U/2D > 1$ ) локализационные поправки фактически не изменяют величину коэффициента  $C$  по сравнению с лестничным приближением, даже в пределе сильного беспорядка ( $W/2D > 0.37$ ), где система становится андерсоновским диэлектриком.

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента  $C$  от степени беспорядка для различных значений силы связи  $U/2D$ . В пределе слабой связи ( $U/2D = 0.1$ ) наблюдаем достаточно быстрое уменьшение коэффициента  $C$  с ростом беспорядка в области достаточно слабого примесного рассеяния. В области же достаточно сильного беспорядка в лестничном приближении может наблюдаться возрастание коэффициента  $C$  с ростом беспорядка, что в основном связано с заметным уширением зоны таким сильным беспорядком и соответствующим уменьшением эффективной силы связи  $U/2D_{eff}$ . Однако локализационные поправки, которые становятся существенными при сильном беспорядке ( $W/2D > 0.25$ ), приводят к уменьшению коэффициента  $C$  с ростом беспорядка, в том числе и в пределе сильного примесного рассеяния. В области промежуточной связи ( $U/2D = 0.4-0.6$ ) коэффициент  $C$  в лестничном приближении лишь незначительно растет с ростом беспорядка. В БЭК-пределе ( $U/2D > 1$ ) коэффициент  $C$  фактически не зависит от примесного рассеяния и

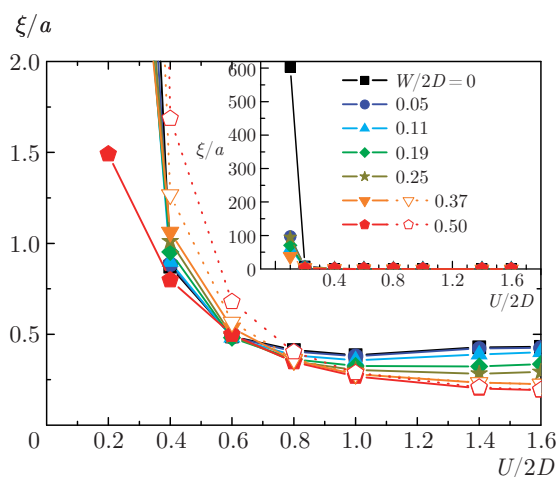




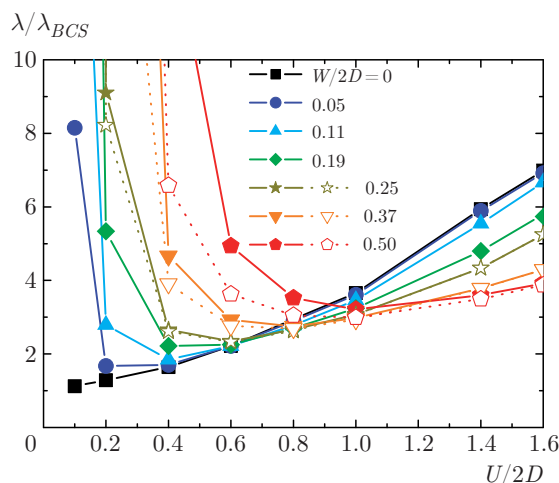
**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Зависимости коэффициента  $C$ , нормированного на этот коэффициент в отсутствие беспорядка, от степени беспорядка для различных значений силы хаббардовского притяжения  $U$ . Пунктир — лестничное приближение, сплошные кривые — расчеты с учетом локализационных поправок

в лестничном приближении, и с учетом локализационных поправок. Учет локализационных поправок в БЭК-пределе фактически не изменяет величину коэффициента  $C$  по сравнению с лестничным приближением. Поскольку коэффициенты разложения Гинзбурга – Ландау  $\alpha$  и  $B$  имеют универсальное поведение в зависимости от беспорядка и андерсоновская локализация фактически не оказывает на них влияния, а коэффициент  $C$ , который в пределе слабой связи сильно изменяется локализационными поправками, но в БЭК-пределе фактически не зависит от этих поправок, физические величины, зависящие от коэффициента  $C$ , также будут существенно изменяться локализационными поправками в пределе слабой связи, но фактически они не чувствуют локализации в БЭК-пределе.

Перейдем теперь к анализу поведения физических величин. Зависимости длины когерентности от силы хаббардовского притяжения приведены на рис. 6. Видим, что в области слабой связи (см. вставку к рис. 6) длина когерентности быстро убывает с ростом  $U$  для любой степени беспорядка, достигая величины порядка параметра решетки  $a$  в области промежуточной связи  $U/2D \approx 0.4-0.6$ . Дальнейший рост силы связи очень слабо изменяет длину когерентности. Учет локализационных поправок для длины когерентности также существен лишь при большом беспорядке ( $W/2D > 0.25$ ). Видим, что локализационные поправки приводят к заметному



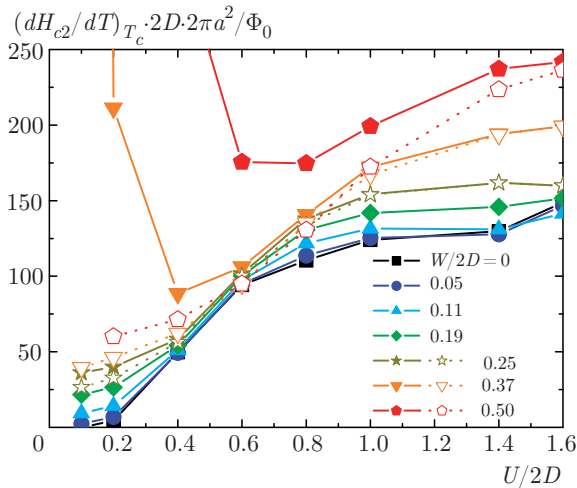
**Рис. 6.** (В цвете онлайн) Зависимости длины когерентности  $\xi$  от силы хаббардовского притяжения  $U$  для различных степеней беспорядка. На вставке — быстрый рост длины когерентности с уменьшением силы связи в БКШ-пределе



**Рис. 7.** (В цвете онлайн) Зависимости глубины проникновения, нормированной на ее БКШ-значение в пределе слабой связи, от силы хаббардовского притяжения  $U$  для различных степеней беспорядка

уменьшению длины когерентности в БКШ-пределе слабой связи и практически не изменяют длину когерентности в БЭК-пределе.

На рис. 7 приведены зависимости глубины проникновения, нормированной на ее БКШ-значение в отсутствие беспорядка (38), от силы хаббардовского притяжения  $U$  для различных степеней беспорядка. В отсутствие примесного рассеяния глубина проникновения растет с увеличением силы связи. Беспорядок в БКШ-пределе слабой связи приводит к быст-



**Рис. 8.** (В цвете онлайн) Зависимости наклона верхнего критического поля от силы хаббардовского притяжения  $U$  для различных степеней беспорядка

рому росту глубины проникновения (для грязных БКШ-сверхпроводников  $\lambda \sim l^{-1/2}$ , где  $l$  — длина свободного пробега). В БЭК-пределе сильной связи беспорядок лишь незначительно уменьшает глубину проникновения (см. ниже рис. 10а). Это приводит к тому, что в присутствии беспорядка наблюдаются уменьшение глубины проникновения с ростом силы хаббардовского притяжения в области достаточно слабой связи и рост  $\lambda$  с увеличением  $U$  в БЭК-пределе сильной связи. Учет локализационных поправок существен лишь в пределе сильного беспорядка ( $W/2D > 0.25$ ) и приводит к заметному увеличению глубины проникновения по сравнению с лестничным приближением в пределе слабой связи. В БЭК-пределе влияние локализации на глубину проникновения оказывается несущественным.

Зависимости наклона верхнего критического поля от силы хаббардовского притяжения для различных степеней беспорядка приведены на рис. 8. В пределе достаточно слабого примесного рассеяния, пока несущественны поправки от андерсоновской локализации, наклон верхнего критического поля растет с увеличением силы связи, причем наблюдается быстрый рост наклона с увеличением  $U$  в пределе достаточно слабой связи, а в пределе сильной связи наклон достаточно слабо зависит от  $U/2D$ . В области достаточно сильного беспорядка ( $W/2D > 0.25$ ) очень существенным становится учет локализационных поправок — он качественно меняет поведение верхнего критического поля. Если лестничное приближение (пунктирные кривые) сохраняет по-

ведение наклона верхнего критического поля, аналогичное поведению в пределе слабого беспорядка (наклон растет с ростом силы связи), то учет андерсоновской локализации ( $W/2D \geq 0.37$ ) приводит к сильному возрастанию наклона верхнего критического поля в пределе слабой связи. В результате в андерсоновском диэлектрике наклон верхнего критического поля быстро убывает с ростом  $U$  в пределе слабой связи и незначительно растет с увеличением  $U$  в БЭК-пределе. Отметим, что и для наклона верхнего критического поля в пределе сильной связи учет локализационных поправок оказывается несущественным.

Перейдем к зависимостям физических величин от степени беспорядка. На рис. 9 приведены зависимости длины когерентности  $\xi$  от степени беспорядка для различных величин силы связи. В БКШ-пределе, т. е. в пределе слабой связи, при достаточно слабом примесном рассеянии наблюдается стандартная для грязных сверхпроводников зависимость  $\xi \propto l^{1/2}$ , т. е. длина когерентности быстро уменьшается с ростом беспорядка (см. вставку к рис. 9а). Однако при достаточно сильном беспорядке в лестничном приближении (пунктирные кривые) длина когерентности начинает расти с ростом беспорядка (см. рис. 9б и вставку к рис. 9а), что в основном связано с заметным уширением затравочной зоны беспорядком и соответствующим уменьшением  $U/2D_{eff}$ . Учет локализационных поправок приводит к заметному уменьшению длины когерентности по сравнению с лестничным приближением в пределе сильного беспорядка, что восстанавливает уменьшение  $\xi$  с ростом беспорядка в этом пределе. В стандартной модели БКШ с бесконечно широкой затравочной зоной в пределе слабого беспорядка длина когерентности убывает с ростом беспорядка,  $\xi \propto l^{1/2}$ , однако вблизи андерсоновского перехода уменьшение  $\xi$  с ростом беспорядка даже ускоряется,  $\xi \propto l^{2/3}$  [7–9], в отличие от нашей модели, где вблизи перехода Андерсона длина когерентности достаточно слабо зависит от беспорядка, что связано с существенным уширением зоны беспорядком. С увеличением силы связи,  $U/2D \geq 0.4–0.6$ , длина когерентности  $\xi$  становится порядка параметра решетки и почти перестает зависеть от беспорядка. В частности, в БЭК-пределе очень сильной связи ( $U/2D = 1.4, 1.6$ ) рост беспорядка вплоть до очень сильного ( $W/2D = 0.5$ ) приводит к уменьшению длины когерентности примерно в два раза (см. рис. 9б). Опять видим, что в пределе сильной связи учет локализационных поправок оказывается несущественным.

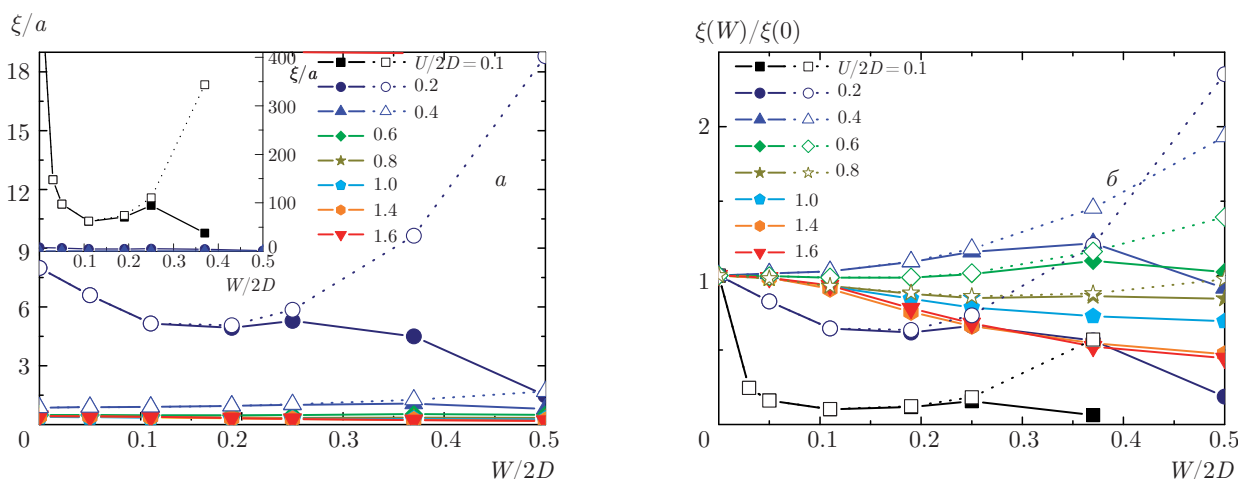


Рис. 9. (В цвете онлайн) Зависимости длины когерентности от беспорядка при различной величине хаббардовского притяжения: *a* — длина когерентности нормирована на параметр решетки *a*; на вставке — зависимость длины когерентности от беспорядка в пределе слабой связи; *б* — длина когерентности нормирована на ее величину в отсутствие беспорядка

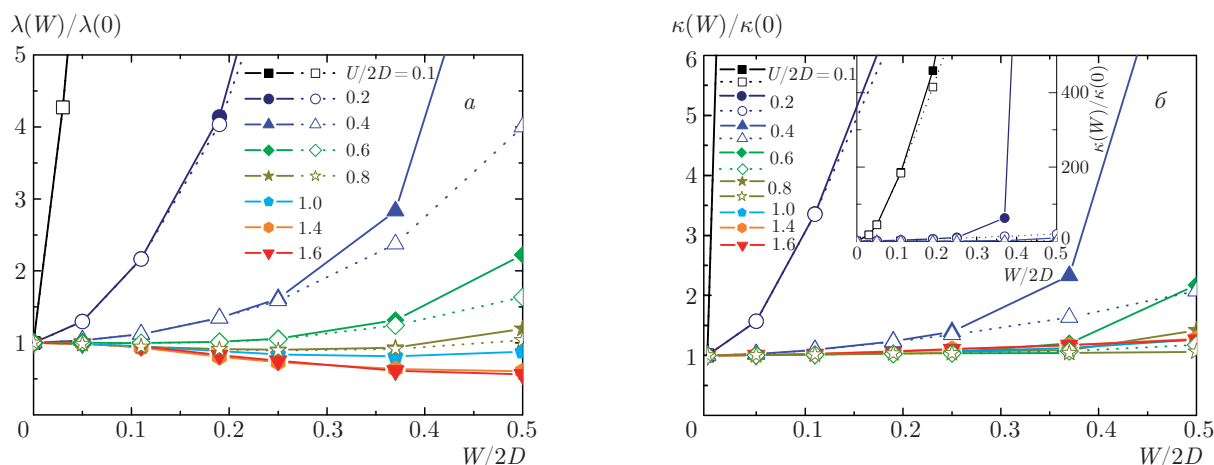
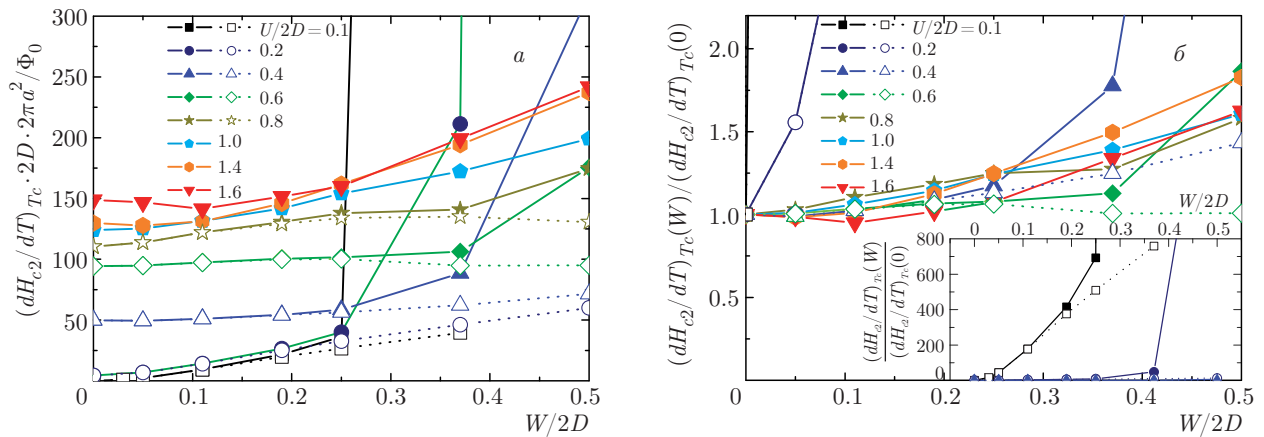


Рис. 10. (В цвете онлайн) Зависимости глубины проникновения (*a*) и параметра Гинзбурга – Ландау (*б*) от степени беспорядка при различных значениях величины хаббардовского притяжения. На вставке продемонстрирован рост параметра Гинзбурга – Ландау с беспорядком в пределе слабой связи

Зависимости глубины проникновения от степени беспорядка для различных значений хаббардовского притяжения приведены на рис. 10*a*. В пределе слабой связи беспорядок, в соответствии с теорией грязных сверхпроводников, приводит к росту глубины проникновения ( $\lambda \propto l^{-1/2}$ ). С усилением силы связи рост глубины проникновения с увеличением беспорядка замедляется, а в пределе очень сильной связи ( $U/2D = 1.4, 1.6$ ) глубина проникновения даже несколько уменьшается с ростом беспорядка. Учет локализационных поправок приводит к некоторому количественному росту глубины проникновения по сравнению с лестничным приближением в области

достаточно слабой связи. При этом качественно зависимость глубины проникновения от беспорядка не изменяется. В БЭК-пределе сильной связи учет локализационных поправок оказывается несущественным. На рис. 10*б* приведены зависимости от беспорядка безразмерного параметра Гинзбурга – Ландау  $\kappa = \lambda/\xi$ . Видим, что в пределе слабой связи параметр Гинзбурга – Ландау быстро растет с беспорядком (см. вставку к рис. 10*б*) в соответствии с теорией грязных сверхпроводников, где  $\kappa \propto l^{-1}$ . С увеличением силы связи рост параметра Гинзбурга – Ландау с беспорядком замедляется и в пределе сильной связи  $U/2D > 1$  параметр  $\kappa$  практически не зави-



**Рис. 11.** (В цвете онлайн) Зависимости наклона верхнего критического поля (а) и этого наклона, нормированного на свою величину в отсутствие беспорядка (б), от степени беспорядка при различных значениях силы хаббардовского притяжения. На вставке продемонстрирован рост наклона с беспорядком в пределе слабой связи

сит от беспорядка. Учет локализационных поправок заметно количественно увеличивает параметр Гинзбурга – Ландау в фазе андерсоновского диэлектрика ( $W/2D \geq 0.37$ ) в области слабой связи. В пределе сильной связи учет локализации снова оказывается несущественным.

На рис. 11 приведены зависимости наклона верхнего критического поля от беспорядка. В пределе слабой связи опять видим поведение, характерное для грязных сверхпроводников, — наклон верхнего критического поля увеличивается с ростом беспорядка (см. рис. 11а и вставку к рис. 11б). Учет локализационных поправок в пределе слабой связи резко увеличивает наклон верхнего критического поля по сравнению с лестничным приближением в андерсоновском диэлектрике ( $W/2D \geq 0.37$ ). В результате в андерсоновском диэлектрике наклон верхнего критического поля растет с увеличением примесного рассеяния гораздо быстрее, чем в лестничном приближении. В области промежуточной связи ( $U/2D = 0.4-0.8$ ) наклон верхнего критического поля практически не зависит от примесного рассеяния в области слабого беспорядка. В лестничном приближении такое поведение сохраняется и в области сильного беспорядка. Однако учет локализационных поправок приводит к заметному увеличению наклона с ростом беспорядка в фазе андерсоновского диэлектрика. В пределе очень сильной связи при слабом беспорядке наклон верхнего критического поля может даже несколько уменьшаться с ростом беспорядка, но в пределе сильного беспорядка наклон увеличивается с ростом примесного рассеяния. В БЭК-пределе учет локализационных попра-

вок оказывается несущественным и мало изменяет наклон верхнего критического поля по сравнению с лестничным приближением.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках приближения Нозьера – Шмитт-Ринка и DMFT+ $\Sigma$ -обобщения теории динамического среднего поля мы исследовали влияние разупорядочения, в том числе и сильного (включая область андерсоновской локализации), на коэффициенты Гинзбурга – Ландау и поведение связанных с ними физических величин вблизи  $T_c$  в неупорядоченной модели Андерсона – Хаббарда с притяжением. Расчеты были проведены для широкой области значений потенциала притяжения  $U$ , от области слабой связи  $U/2D_{eff} \ll 1$ , где неустойчивость нормальной фазы и сверхпроводимость хорошо описываются моделью БКШ, вплоть до предела сильной связи  $U/2D_{eff} \gg 1$ , где переход в сверхпроводящее состояние связан с бозе-конденсацией компактных куперовских пар, образующихся при температуре, существенно большей температуры перехода в сверхпроводящее состояние.

Увеличение силы связи  $U$  приводит к быстрому уменьшению всех коэффициентов Гинзбурга – Ландау. Длина когерентности  $\xi$  быстро убывает с ростом силы связи и при  $U/2D \approx 0.4$  становится порядка параметра решетки, мало изменяясь с дальнейшим увеличением силы связи. Глубина проникновения в чистых сверхпроводниках растет с увеличением  $U$ , а в грязных — уменьшается в обла-

сти слабой связи и растет в БЭК-пределе, проходя через минимум в области промежуточной связи  $U/2D \approx 0.4-0.8$ . В области достаточно слабого беспорядка ( $W/2D < 0.37$ ), когда эффекты андерсоновской локализации не очень существенны, наклон верхнего критического поля растет с ростом  $U$ . Однако в пределе слабой связи в андерсоновском диэлектрике локализационные эффекты резко увеличивают наклон верхнего критического поля, в то время как в БЭК-пределе сильной связи эффекты локализации оказываются несущественными. В результате наклон верхнего критического поля уменьшается с ростом  $U$  в БКШ-пределе и несколько увеличивается с ростом  $U$  в БЭК-пределе, проходя через минимум при  $U/2D \approx 0.4-0.8$ . Скачок теплоемкости растет с ростом хаббардовского притяжения  $U$  в области слабой связи и уменьшается в области сильной связи, проходя через максимум при  $U/2D_{eff} \approx 0.55$  [24].

Влияние беспорядка, в том числе и сильного (в области андерсоновской локализации), на критическую температуру  $T_c$ , коэффициенты Гинзбурга–Ландау  $A$  и  $B$  и связанный с ними скачок теплоемкости универсально — их изменение вызывается лишь уширением затравочной зоны беспорядком, т. е. заменой  $D \rightarrow D_{eff}$ . Таким образом, и в области сильной связи критическая температура и коэффициенты  $A$  и  $B$  Гинзбурга–Ландау удовлетворяют обобщенной теореме Андерсона — все влияние беспорядка на них связано лишь с изменением плотности состояний. Влияние беспорядка на коэффициент  $C$  не носит универсального характера и не связано лишь с уширением затравочной зоны беспорядком.

Коэффициент  $C$  чувствителен к эффектам андерсоновской локализации. Мы исследовали этот коэффициент в широкой области беспорядка, в том числе и в области андерсоновского диэлектрика. Для сравнения и явного выделения эффектов андерсоновской локализации мы также исследовали коэффициент  $C$  в лестничном приближении по беспорядку. В пределе слабой связи,  $U/2D_{eff} \ll 1$ , и слабого беспорядка,  $W/2D < 0.37$ , поведение коэффициента  $C$  и связанных с ним физических величин вполне описывается теорией грязных сверхпроводников — коэффициент  $C$  и длина когерентности быстро убывают с ростом беспорядка, а глубина проникновения и наклон верхнего критического поля растут. В области сильного беспорядка в андерсоновском диэлектрике в БКШ-пределе поведение коэффициента  $C$  сильно изменяется локализационными эффектами. В лестничном приближении эф-

фект уширения зоны беспорядком привел бы к росту коэффициента  $C$  с увеличением  $W$  [25], однако локализационные эффекты восстанавливают уменьшение коэффициента  $C$  с ростом беспорядка и в андерсоновском диэлектрике. Соответственно, сильно изменяются за счет локализационных эффектов и физические величины, связанные с коэффициентом  $C$ , так что для этих величин качественно восстанавливается поведение, характерное для грязных сверхпроводников, — длина когерентности убывает с ростом беспорядка, а глубина проникновения и наклон верхнего критического поля растут. В области кроссовера БКШ–БЭК и в БЭК-пределе коэффициент  $C$  и все связанные с ним физические величины достаточно слабо зависят от беспорядка. В частности, в БЭК-пределе и длина когерентности, и глубина проникновения лишь незначительно уменьшаются с ростом беспорядка так, что их отношение — параметр Гинзбурга–Ландау — от беспорядка практически не зависит. В БЭК-пределе эффекты андерсоновской локализации слабо влияют на коэффициент  $C$  и физические величины.

Заметим, что все результаты, полученные в данной работе, неявно используют предположение о самоусредняемости сверхпроводящего параметра порядка, входящего в разложение Гинзбурга–Ландау, что связано с использованием стандартной примесной диаграммной техники [26, 27]. Хорошо известно [9], что данное предположение становится, вообще говоря, неприменимым вблизи андерсоновского перехода металл–диэлектрик, что связано с развивающимися здесь сильными флуктуациями локальной плотности состояний, приводящей к сильным пространственным флуктуациям параметра порядка [34] и неоднородной картине сверхпроводящего перехода [35]. Эта проблема, в контексте задачи о сверхпроводимости в области кроссовера БКШ–БЭК и в области сильной связи, представляет большой интерес и заслуживает дальнейшего изучения.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания (ФАНО) № 0389-2014-0001 и при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-02-00015).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 319 (1958).
2. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1158 (1958).



3. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959).
4. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
5. P. W. Anderson, J. Phys. Chem. Sol. **11**, 26 (1959).
6. P. G. De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W. A. Benjamin, New York (1966).
7. Л. Н. Булаевский, М. В. Садовский, Письма в ЖЭТФ **39**, 524 (1984).
8. L. N. Bulaevskii and M. V. Sadovskii, J. Low. Temp. Phys. **59**, 89 (1985).
9. M. V. Sadovskii, Phys. Rep. **282**, 226 (1997); M. V. Sadovskii, *Superconductivity and Localization*, World Sci., Singapore (2000).
10. P. Nozieres and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
11. Th. Pruschke, M. Jarrell, and J. K. Freericks, Adv. Phys. **44**, 187 (1995).
12. A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth, and M. J. Rozenberg, Rev. Mod. Phys. **68**, 13 (1996).
13. D. Vollhardt, AIP Conf. Proc. **1297**, 339 (2010).
14. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, Письма в ЖЭТФ **82**, 217 (2005).
15. M. V. Sadovskii, I. A. Nekrasov, E. Z. Kuchinskii, Th. Prushke, and V. I. Anisimov, Phys. Rev. B **72**, 155105 (2005).
16. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, ФНТ **32**, 528 (2006).
17. Э. З. Кучинский, И. А. Некрасов, М. В. Садовский, УФН **182**, 345 (2012).
18. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, ЖЭТФ **133**, 670 (2008).
19. E. Z. Kuchinskii and M. V. Sadovskii, ЖЭТФ **149**, 589 (2016).
20. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, Phys. Rev. B **75**, 115102 (2007).
21. N. A. Kuleeva, E. Z. Kuchinskii, and M. V. Sadovskii, ЖЭТФ **146**, 304 (2014).
22. E. Z. Kuchinskii, N. A. Kuleeva, and M. V. Sadovskii, Письма в ЖЭТФ **100**, 213 (2014).
23. E. Z. Kuchinskii, N. A. Kuleeva, and M. V. Sadovskii, ЖЭТФ **147**, 1220 (2015).
24. E. Z. Kuchinskii, N. A. Kuleeva, and M. V. Sadovskii, ЖЭТФ **149**, 430 (2016).
25. E. Z. Kuchinskii, N. A. Kuleeva, and M. V. Sadovskii, ФНТ **43**, 22 (2017).
26. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1963).
27. М. В. Садовский, *Диаграмматика*, Изд-во Института компьютерных исследований, Ижевск (2004).
28. R. Bulla, T. A. Costi, and T. Pruschke, Rev. Mod. Phys. **60**, 395 (2008).
29. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
30. P. Wölfle and D. Vollhardt, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 39, p. 26, Springer-Verlag, Berlin (1982).
31. А. В. Мясников, М. В. Садовский, ФТТ **24**, 3569 (1982); Е. А. Котов and М. В. Садовский, Z. Phys. B **51**, 17 (1983).
32. M. V. Sadovskii, in *Sov. Sci. Reviews — Phys. Reviews*, ed. by I. M. Khalatnikov, Vol. 7, p. 1, Harwood Academic Publ., New York (1986).
33. D. Vollhardt and P. Wölfle, in *Electronic Phase Transitions*, ed. by W. Hanke and Yu. V. Kopayev, Vol. 32, North-Holland, Amsterdam (1992), p. 1.
34. Л. Н. Булаевский, М. В. Садовский, Письма в ЖЭТФ **43**, 76 (1986).
35. Л. Н. Булаевский, С. В. Панюков, М. В. Садовский, ЖЭТФ **92**, 672 (1987).