

# СПЕКТРЫ ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ АТТОСЕКУНДНОЙ И МЕНЬШЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МНОГОЭЛЕКТРОННЫМИ АТОМАМИ

*Д. Н. Макаров<sup>\*</sup>, В. И. Матвеев<sup>\*\*</sup>*

*Федеральный исследовательский центр комплексного изучения Арктики Российской академии наук  
163000, Архангельск, Россия*

*Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова  
163002, Архангельск, Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 2017 г.

На основе аналитического решения уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений рассмотрены процессы переизлучения импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности многоэлектронными атомами. Развита методика расчетов спектров переизлучения импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности нейтральными многоэлектронными атомами с зарядами ядер от 1 до 92. Результаты представлены в виде аналитических формул, зависящих от нескольких коэффициентов и параметров экранирования, табулированных для всех атомов, электронные плотности которых описываются известной моделью Дирака–Хартри–Фока–Слейтера. В качестве примеров рассчитаны спектры переизлучения атомами лития, углерода, кальция и железа для двух форм падающего импульса: гауссова и «мексиканской шляпы».

DOI: 10.7868/S0044451017080028

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Достигнутый к настоящему времени прогресс в методах генерации коротких и ультракоротких электромагнитных импульсов позволил преодолеть «фемтосекундный рубеж» и получить импульсы длительностью в несколько десятков аттосекунд. Возникло новое направление — аттосекундная физика (см., например, обзоры [1–5]) и появилась возможность наблюдения атомных явлений в реальном масштабе времени. Атомная единица времени равна  $2.4189 \cdot 10^{-17}$  с [6], тогда как одна аттосекунда значительно меньше по длительности и равна  $10^{-18}$  с. Поэтому для описания процессов, сопровождающих взаимодействие ультракоротких импульсов с атомами, обычно используются следующие подходы. Для импульсов более коротких, чем характерное атомное время, но более длинных, чем аттосекундные, целесообразно применять подходы, основанные на разложении Магнуса для оператора эволюции.

До настоящего времени расчеты проводят, учитывая лишь первые несколько членов в разложении [7] оператора эволюции. При этом обычно поле импульса предполагается пространственно-однородным на размерах мишени [8]. Но для аттосекундных и меньшей длительности импульсов естественно применять приближение внезапных возмущений. Тем более что в настоящее время активно обсуждаются возможности (см., например, [9, 10]) генерации значительно более коротких импульсов, по сравнению с аттосекундными. В работе [11] на основе аналитического решения [12] уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений рассмотрены неупругие процессы и переизлучение атомами импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности. Получены общие выражения для спектров переизлучения. Хотя результаты представлены в виде аналитических формул, в работе [11] удалось рассчитать спектры переизлучения таких импульсов электромагнитного поля лишь односторонними атомами. При этом обычно в качестве мишеней предполагается использование многоэлектронных атомов.

\* E-mail: makarovd0608@yandex.ru

\*\* E-mail: mezon98@mail.ru

В настоящей работе на основе аналитического решения [12] уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений развит метод расчетов спектров переизлучения предельно коротких импульсов электромагнитного поля нейтральными многоэлектронными атомами с зарядами ядер от 1 до 92. Результаты представлены в виде аналитических формул, зависящих от нескольких коэффициентов и параметров экранирования, табулированных для всех атомов, электронные плотности которых описываются известной моделью Дирака – Хартри – Фокка – Слейтера. В рассматриваемых нами ниже случаях считается, что длительность таких импульсов  $\tau$  значительно меньше характерного атомного времени  $\tau_a$ , т.е. считается выполненным критерий [7] применимости приближения внезапных возмущений:

$$\frac{\tau}{\tau_a} \ll 1.$$

Таким образом, нами рассматриваются электромагнитные импульсы аттосекундной и меньшей длительности, поскольку одна аттосекунда примерно в 24 раза меньше атомной единицы времени. Развитая методика позволяет провести точный учет как пространственной неоднородности поля электромагнитного импульса, так и импульсов фотонов в процессах переизлучения. При этом поле падающего импульса учитывается точно в рамках приближения внезапных возмущений (причем учитываются точно электрическая и магнитная компоненты поля импульса), а процесс излучения фотона описывается по теории возмущений. Результаты представлены в виде аналитических формул, справедливых как для не равных нулю значений интеграла от поля по времени, так и в случае, когда  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} dt = 0$ , где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля падающего импульса. В качестве примеров рассчитаны спектры переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля атомами лития, углерода, кальция и железа в случаях, когда падающий импульс имеет гауссову форму либо форму «мексиканской шляпы».

## 2. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Пусть на атом падает импульс электромагнитного поля, представляющий собой плоские волны, распространяющиеся в направлении  $\mathbf{n}_0$ . Длительность импульса  $\tau$  считаем значительно меньшей характерного атомного времени. Напряженность электрической компоненты поля этого импульса в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  запишем в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$

$= \mathbf{E}(\eta)$ , где  $\eta = t - \mathbf{n}_0 \mathbf{r} / c$ ,  $\mathbf{n}_0$  – единичный вектор, направленный вдоль распространения импульса,  $c$  – скорость света. Здесь и ниже используются атомные единицы:  $m_e = \hbar = e = 1$ ,  $m_e$  – масса электрона,  $e$  – заряд электрона, скорость света  $c \approx 137$  ат.ед. Будем считать атом расположенным в начале системы координат, что ограничивает область взаимодействия поля импульса с атомными электронами окрестностью начала системы координат в пределах порядка характерного размера атома. При этом взаимодействие падающего импульса с атомом отличается от нуля только в интервале времени  $\tau \ll 1$ , описанном вокруг точки  $t = 0$ , и пусть до взаимодействия атом находился в основном состоянии  $|\varphi_0\rangle$ . Перерассеяние ультракороткого импульса электромагнитного поля на электронах сложного атома является процессом, происходящим в течение времени взаимодействия атома с полем падающего импульса. Согласно [11], спектр излучения фотона частоты  $\omega$  в единицу телесного угла  $d\Omega_{\mathbf{k}}$ , описанного вокруг импульса фотона  $\mathbf{k}$  имеет вид

$$\frac{d^2 W}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{c^3 \omega} \langle \varphi_0 | \times \sum_{a, a'}^{N, N} \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a'})) \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) | \varphi_0 \rangle, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_a$  – координаты атомного электрона с номером  $a$  ( $a = 1, \dots, N$ ),  $N$  – число атомных электронов. В формуле (1) введено обозначение  $\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$  для векторного произведения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_a) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \times \mathbf{n}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{k} / k$  – единичный вектор вдоль направления вылета фотона,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{2} \nabla_a \left( \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \cdot \mathbf{r}_a}{c} \right)^2 \right) e^{i\omega t} dt, \quad (3)$$

$\nabla_a \equiv \partial / \partial \mathbf{r}_a$ . Отметим, что согласно (3)  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  есть функция не только  $\omega$ , но и  $\mathbf{r}_a$ . Представим напряженность электрической компоненты поля налетающего импульса в виде  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 g(\eta)$ , где  $\mathbf{E}_0$  – амплитуда электрического поля. Далее, используя выражения (3) и (2), несложно получить

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \left\{ \left( F_1 - F_2 \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}] - i F_2 \frac{\omega}{2c} \left( \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{c} \right)^2 [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}] \right\}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{k}_0 = (\omega/c)\mathbf{n}_0$ , а  $F_1$  и  $F_2$  — функции, определяемые как

$$F_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{i\omega\eta}d\eta, \quad F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (g(\eta))^2 e^{i\omega\eta}d\eta. \quad (5)$$

Формула (1) описывает полный, просуммированный по поляризациям фотона и по всем возможным конечным состояниям  $\varphi_n$  атомных электронов, спектр переизлучения. Подчеркнем, что речь идет об излучении одного фотона всеми атомными электронами только в течение времени действия (поля налетающего импульса) внезапного возмущения. Поле ультракороткого импульса учитывается точно в рамках приближения внезапных возмущений, причем учитываются точно электрическая и магнитная компоненты поля импульса. При этом поле переизлучения учитывается только в первом порядке теории возмущений. Формула (1) для спектра переизлучения имеет общий характер и применима для электромагнитных импульсов произвольной формы при условиях внезапности их действия. Спектр представлен в виде среднего по основному состоянию атома. Следует отметить формальный характер формулы (1) по следующей причине. Для вычисления среднего в выражении (1) необходимо знание волновой функции многоэлектронного атома и проведение многомерного интегрирования. Именно поэтому в работе [11] удалось вычислить лишь спектр переизлучения только одноэлектронным атомом. Как показано ниже, громоздких вычислений можно избежать, если выразить вычисляемое среднее через пространственную плотность атомных электронов.

### 3. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ СПЕКТРЫ

Для вычисления спектра излучения многоэлектронного атома в формуле (1) отдельно рассмотрим слагаемые с  $a = a'$  и с  $a \neq a'$ , соответственно представим спектр в виде

$$\frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = \frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} + \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega}, \quad (6)$$

где

$$\frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A\langle\varphi_0|\sum_a|\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)|^2|\varphi_0\rangle, \quad (7)$$

$$\frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A\langle\varphi_0|\sum_{a,a'(a\neq a')} \mathbf{f}(\mathbf{r}_a)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a)\mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'})\times \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{a'})|\varphi_0\rangle, \quad (8)$$

где  $A = [(2\pi)^2c^3\omega]^{-1}$ . Выражение (7) можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= A\int\langle\varphi_0|\sum_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle|\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2d\mathbf{r} = \\ &= A\int\rho(r)|\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2d\mathbf{r}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция Дирака, а  $\rho(r) = \langle\varphi_0|\sum_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle$  — пространственная плотность электронов в атоме,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r}_a)|_{\mathbf{r}_a=\mathbf{r}}$ . Таким образом, формула (7) существенно упрощается и первая часть спектра оказывается выраженной через электронную плотность атома.

Рассмотрим теперь выражение (8). Пусть волновая функция  $|\varphi_0\rangle$  имеет вид антисимметризованных произведений ортонормированных одноэлектронных координатных и спиновых волновых функций. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= A\left|\langle\varphi_0|\sum_a\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle\right|^2 - \\ &- A\sum_a|\langle\varphi_0|\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle|^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Далее, как и при выводе формулы (9), нетрудно представить результат (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= A\left|\int\rho(r)\mathbf{f}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{r}\right|^2 - \\ &- A\sum_a|\langle\varphi_0|\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle|^2. \quad (11) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (11) преобразуем как

$$\begin{aligned} \sum_a|\langle\varphi_0|\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle|^2 &= \\ = \sum_a\left|\int\rho_a(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{r}\right|^2, \quad (12) \end{aligned}$$

где  $\rho_a(\mathbf{r}) = \langle\varphi_0|\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)|\varphi_0\rangle$ . Поскольку  $\sum_a\rho_a(\mathbf{r}) = \rho(r)$ , величину  $\rho_a$  можно считать парциальной плотностью атома (т.е. вкладом электрона с номером  $a$  в полную электронную плотность атома). Поэтому будем считать, что  $\rho_a = \rho(r)/N$ . В итоге

$$\begin{aligned} \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= A\left|\int\rho(r)\mathbf{f}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{r}\right|^2 \times \\ &\times \left(1 - \frac{1}{N}\right). \quad (13) \end{aligned}$$

Таким образом, и вторая часть спектра (8) выражается через электронную плотность атома. Выражение (7), которое содержит  $N$  слагаемых, пропорционально  $N$  и представляет из себя некогерентную (пропорциональную числу атомных электронов  $N$ ) часть спектра. В выражении (8), в котором суммирование проводится по парам электронов, число таких пар равно  $N(N-1)$ , поэтому (8) пропорционально  $N(N-1)$  и содержит как когерентную (пропорциональную  $N^2$ ) часть спектра, так и некогерентную (пропорциональную  $N$ ) часть. Поэтому итоговое выражение для спектра (6) удобно представить как

$$\frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 c^3 \omega} \times \left\{ N\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + N(N-1)\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \right\}, \quad (14)$$

где  $\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  — средние величины, определяемые согласно (9) и (13):

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{N} \int \rho(r) |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (15)$$

$$\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{N^2} \left| \int \rho(r) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2. \quad (16)$$

Полученные формулы (14)–(16) имеют общий характер и описывают спектры переизлучения ультракоротких импульсов произвольной формы произвольными атомами при известных плотностях электронов.

В качестве примера, позволяющего провести все дальнейшие выкладки в аналитическом виде, рассмотрим спектры переизлучения ультракоротких импульсов произвольной формы нейтральными атомами, электронная плотность которых описывается в модели Дирака – Хартри – Фока – Слейтера [13]. В рамках этой модели предложена простая аналитическая аппроксимация плотности электронов:

$$\rho(r) = \frac{N}{4\pi r} \sum_{i=1}^3 A_i \alpha_i^2 \exp(-\alpha_i r), \quad (17)$$

и приведены таблицы для коэффициентов  $A_i$  и параметров экранирования  $\alpha_i$  для всех нейтральных атомов с зарядами ядер от 1 до 92. При этом для всех атомов  $\sum_{i=1}^3 A_i = 1$ . Из формулы (17) следует, что входящие в (14) средние  $\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ , представленные формулами (15) и (16), не зависят от  $N$ .

Подставляя в (15) и (16) электронную плотность (17) и интегрируя по  $d\mathbf{r}$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = & [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}]^2 |F_1|^2 + 6 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 |F_2|^2 \times \\ & \times \left(\frac{E_0}{c}\right)^4 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^4} [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}]^2 + 2 \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \times \\ & \times \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2} \left\{ \frac{[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}]^2}{c^2} |F_2|^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{c} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \operatorname{Im}(F_1 F_2) \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Im}(F_1 F_2)$  — мнимая часть произведения  $F_1 F_2$ ;

$$\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left| \sum_{i=1}^3 A_i \alpha_i^2 \mathbf{J}_i(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \right|^2, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = & \frac{4\pi F_1}{p^2 + \alpha_i^2} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}] + \frac{8\pi i F_2}{(p^2 + \alpha_i^2)^2} \times \\ & \times \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{p}}{c^2} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}] - \frac{4\pi i F_2}{(p^2 + \alpha_i^2)^3} \frac{\omega}{c} \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{E_0 p}{c}\right)^2 - 4 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{p}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_i E_0}{c}\right)^2 \right\} \times \\ & \times [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}], \quad (20) \end{aligned}$$

$\mathbf{p} = (\omega/c)(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ . Таким образом, формула (14) с функциями  $\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ , определяемыми формулами (18) и (19), представляет собой угловые распределения спектров переизлучения атомами, плотность электронов которых описывается в модели Дирака – Хартри – Фока – Слейтера.

Выражение (14) с  $\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ , описываемыми формулами (18) и (19), можно проинтегрировать по телесному углу вылета фотона  $d\Omega_{\mathbf{k}}$ , в итоге получим

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2}{3} \frac{E_0^2}{\pi \omega c^3} \left\{ N G(\omega) + N(N-1) F(\omega) \right\}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} G(\omega) = & |F_1|^2 + 2 \left(\frac{E_0}{c^2}\right)^2 \times \\ & \times |F_2|^2 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2} + 3 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^4} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

и

$$F(\omega) = \sum_{i=1}^3 A_i^2 I_i + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 A_i A_j \alpha_i^2 \alpha_j^2 I_{i,j}. \quad (23)$$

Здесь интегралы  $I_i$  и  $I_{i,j}$  хотя и вычисляются точно, но имеют громоздкий вид, поэтому приведем их значения с точностью до  $(E_0/c^2)^2 \ll 1$  (мы рассматриваем нерелятивистские поля):

$$I_i = \frac{3|F_1|^2 \alpha_i^2 \left( \alpha_i^2 + 2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right)}{2^4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^6 \left( \alpha_i^2 + 4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right)} \times \\ \times \left\{ 4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left( \alpha_i^2 + 2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \alpha_i^2 \left( \alpha_i^2 + 4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \ln \left( \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2 + 4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2} \right) \right\}, \quad (24)$$

$$I_{i,j} = \frac{3}{2^4} \frac{|F_1|^2}{\left( \frac{\omega}{c} \right)^4} + \frac{3|F_1|^2}{2^6} \frac{\ln \left( \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2 + 4 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2} \right)}{\left( \frac{\omega}{c} \right)^6 (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)} \times \\ \times \left\{ \alpha_i^4 + 4\alpha_i^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 + 8 \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \right\}. \quad (25)$$

Отметим также, что точное выражение (22) для  $G(\omega)$  достаточно простое и не нуждается в дальнейшем упрощении, громоздким оказывается (согласно (24) и (25)) только выражение (23) для  $F(\omega)$ . Однако для двух предельных случаев малых и больших частот выражение для  $F(\omega)$  упрощается и принимает следующий вид: при  $\omega/c \ll 1$

$$F(\omega) = |F_1|^2 - \sum_{i,j=1}^3 \frac{A_i A_j}{\alpha_i^2 \alpha_j^2} \times \\ \times \left( |F_1|^2 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2) - \frac{9}{10} \left( \frac{E_0}{c^2} \right)^2 |F_2|^2 \right) \left( \frac{\omega}{c} \right)^2; \quad (26)$$

тогда как при  $\omega/c \gg 1$ ,

$$F(\omega) \sim \left( \frac{\omega}{c} \right)^{-2}.$$

Следовательно, в этом случае в спектре (21) величиной  $F(\omega)$  можно пренебречь и учитывать только  $G(\omega)$ . Отметим, что, строго говоря, нет необходимости использовать модель Дирака – Хартри – Фока – Слейтера для описания атома водорода, выражение для спектра переизлучения которого получено в работе [11]. Однако в этом случае расчеты спектров с точной нерелятивистской волновой функцией и расчеты в рамках модели Дирака – Хартри – Фока – Слейтера приводят к практически неразличимым результатам. Полученные формулы описывают

спектры перерасеяния аттосекундных и более коротких импульсов произвольной формы многоэлектронными нейтральными атомами с зарядами ядра от 1 до 92, электронная плотность которых описывается в модели Дирака – Хартри – Фока – Слейтера. При этом от конкретной формы импульса зависят лишь функции  $F_1$  и  $F_2$ , вычисляемые по формулам (5). Например, если мы будем рассматривать рассеяние ультракороткого импульса гауссовой формы

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left( -\alpha^2 \left( t - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c} \right)^2 \right) \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}),$$

то

$$F_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left\{ \exp \left( - \left( \frac{\omega - \omega_0}{2\alpha} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \exp \left( - \left( \frac{\omega + \omega_0}{2\alpha} \right)^2 \right) \right\}, \\ F_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\alpha} \left\{ \exp \left( - \left( \frac{\omega - 2\omega_0}{2\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \exp \left( - \left( \frac{\omega + 2\omega_0}{2\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + 2 \exp \left( - \left( \frac{\omega}{2\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right) \right\}. \quad (27)$$

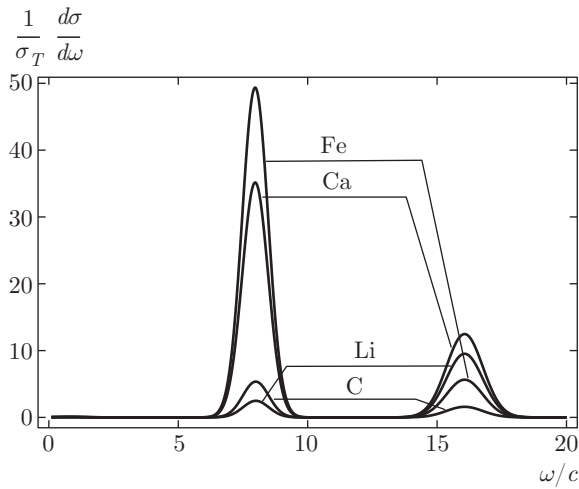
Обычно считается [14], что электрическое поле лазерного источника в пустоте удовлетворяет условию равенства нулю интеграла от поля по времени, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} dt = 0$ . Для гауссова импульса переход к равному нулю интегралу от электрического поля происходит при  $\omega_0/\alpha \gg 1$ , так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} dt = \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{\omega_0}{\alpha} \right)^2 \right).$$

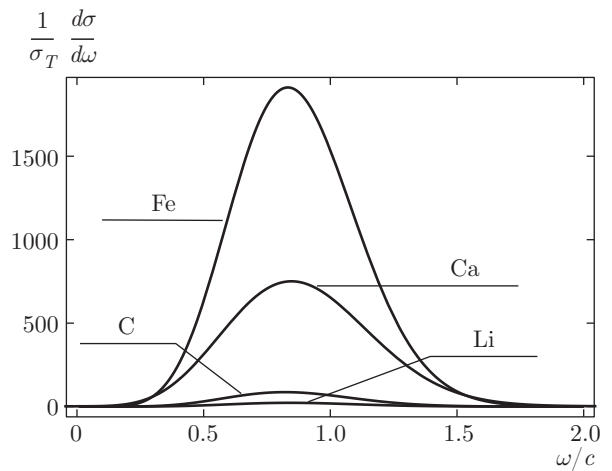
В этом случае

$$F_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \exp \left( - \left( \frac{\omega - \omega_0}{2\alpha} \right)^2 \right), \\ F_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\alpha} \left\{ \exp \left( - \left( \frac{\omega - 2\omega_0}{2\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + 2 \exp \left( - \left( \frac{\omega}{2\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right) \right\}. \quad (28)$$

Из выражения (28) видно, что рассеяние идет в основном на частотах  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = 2\omega_0$ , и присутствует низкочастотное излучение. Также часто используют поле вида «мексиканской шляпы», где



**Рис. 1.** Зависимости относительной величины  $(1/\sigma_T)(d\sigma/d\omega)$  от  $\omega/c$  для четырех атомов: лития, углерода, кальция, железа. Расчеты проведены для гауссового импульса при  $\omega_0/c = 8$ ,  $\alpha/c = 1/2$ ,  $E_0/c^2 = 1/10$



**Рис. 2.** Зависимости относительной величины  $(1/\sigma_T)(d\sigma/d\omega)$  от  $\omega/c$  для четырех атомов: лития, углерода, кальция, железа. Расчеты проведены для импульса «мексиканская шляпа» при  $\alpha/c = 1/2$ ,  $E_0/c^2 = 1/10$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2\right) \times \left(1 - \alpha^2 \left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2\right),$$

в этом случае

$$F_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2, \quad (29)$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{16\alpha} \left(12 - 4\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^4\right) \times \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right).$$

Мы провели расчеты спектров переизлучения атомами лития, углерода, кальция и железа в двух случаях: гауссова падающего импульса и «мексиканской шляпы». Для иллюстрации полученных результатов вместо спектра  $dW/d\omega$  удобно использовать следующее отношение:

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad (30)$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское сечение [15], которое в атомных единицах имеет вид  $\sigma_T = 8\pi/(3c^4)$ ;  $d\sigma/d\omega$  — сечение рассеяния, равное по определению [15]

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{1}{I} \frac{dW}{d\omega} \omega, \quad (31)$$

$dW/d\omega$  ищется по формуле (21), а  $I = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt$ , здесь  $S(t) = c/(4\pi)\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)$  — абсолютная величина вектора Пойтинга. Как видно из рис. 1 и 2, двугорбая структура (в окрестности частот  $\omega = \omega_0$  и

$\omega = 2\omega_0$ ) в спектре переизлучения появляется лишь в случае гауссова импульса с большим числом осцилляций внутри гауссовой огибающей. Интересно, что левый и правый пики на рис. 1 ведут себя по-разному с изменением числа атомных электронов: левый пик растет с ростом атомного номера, тогда как правый пик проявляет нерегулярное поведение.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ и стипендии президента РФ (СП-1800.2015.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Krausz and M. Ivanov, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163 (2009).
2. P. Pierre Agostini and L. F. DiMauro, *Rep. Progr. Phys.* **67**, 813 (2004).
3. P. B. Corkit and F. Krausz, *Nature Phys.* **3**, 381 (2007).
4. V. Astapenko, *Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with Matter*, Springer Briefs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2013).
5. А. М. Желтиков, *УФН* **181**, 33 (2011).
6. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматлит, Москва (1960).
7. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, *УФН* **125**, 377 (1978).

8. D. Dimitrovski, M. Ferre, and L. B. Madsen, *Phys. Rev. A* **80**, 053412 (2009).
9. A. E. Kaplan, *Lasers in Engineering* **24**, 3 (2013).
10. G. Mourou, S. Mironov, E. Khazanov, and A. Sergeev, *Eur. Phys. J. Special Topics* **223**, 1181 (2014).
11. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 851 (2016).
12. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 464 (2016).
13. F. Salvat, J. D. Martinez, R. Mayol, and J. Parellada, *Phys. Rev. A* **36**, 467 (1987).
14. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, *УФН* **185**, 3 (2015).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).