

# МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПЫЛЕВИДНОЙ МАТЕРИИ В СОБСТВЕННОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. МЕТОД ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК

*В. М. Журавлев\**

*Ульяновский государственный университет,  
Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы  
432017, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 2 марта 2017 г.

Исследуются модели динамики пылевидной среды в собственных гравитационных полях. Решения соответствующих задач строятся на основе метода гидродинамических подстановок, обобщающего подстановки типа Коула–Хопфа. Метод распространяется на многомерные течения идеальной и вязкой среды с цилиндрической и сферической симметриями, для которых строятся точные решения. С помощью специальных координатных преобразований строятся решения динамики самогравитирующей пыли с произвольными начальными распределениями и плотности, и скорости среды. В частности, рассматривается задача о космологическом расширении в рамках ньютоновской теории тяготения. По ходу изложения рассматриваются модели одномерного течения вязкой пылевой среды и некоторые задачи гидродинамики газов. Приводятся примеры точных решений и их краткий анализ.

DOI: 10.7868/S0044451017090073

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи исследования самогравитирующих систем занимают важное место среди основных задач астрофизики и космологии. В самосогласованной постановке проблема динамики самогравитирующей пыли и газа в количественной форме исследовалась Джинсом [1] и известна как проблема неустойчивости Джинса. Эта проблема рассматривается в различных постановках, в частности, в форме задачи о начальной стадии формирования компактных объектов (протозвезд) [2] и задачи о космологическом расширении Вселенной [3, 4]. Во всех этих случаях основной задачей является выявление особенностей динамики среды и формирующихся в ней структур в процессе коллапса локального возмущения или его разлета в зависимости от характера начальных условий в среде [5]. В частности, интересным является процесс формирования ударных волн в таких системах, что может представлять особый интерес для задач астрофизики. Процессы такого типа являются сильно нелинейны-

ми. Это требует использования методов построения точных решений уравнений динамики без их линеаризации с помощью теории возмущений. Только такой подход позволяет выявить существенно нелинейные стадии процессов формирования структур в самогравитирующей среде.

Исследуемые задачи можно подразделить на два класса. Первый, наиболее простой, описывает самогравитирующую пылевидную среду с уравнением состояния  $p = 0$  — давление в среде равно нулю. Второй класс — это среда, в которой давление не равно нулю и которая определяется уравнением состояния с давлением, зависящим от плотности среды и ее температуры (энтропии). Во всех этих вариантах система уравнений, описывающих динамику самогравитирующей среды, является существенно нелинейной и в общем случае не может быть проинтегрирована полностью. Поэтому основным способом анализа таких задач являются приближенные и асимптотические методы [3, 4]. Однако в случае, когда среда оказывается бездисперсионной, что относится в основном к задачам с самогравитирующей пылью, имеются более широкие возможности для анализа таких задач [5]. Решению задач для пылевидной материи в основном и посвящена данная работа.

\* E-mail: zhvictorm@gmail.com

Среди методов, позволяющих в некоторых случаях получать точные решения задач рассматриваемого типа, следует отметить метод годографа [4–6]. Другим методом, который позволяет расширить совокупность моделей самогравитирующих систем, интегрируемых точно, является метод обобщенных функциональных подстановок, развитый в работах [7–14]. Этот подход является развитием метода подстановок типа Коула–Хопфа [15, 16] для уравнения Бюргерса [17, 18]. Специальный вариант метода функциональных подстановок, приспособленный для решений задач гидродинамики сжимаемой среды, был развит в работах [11–14]. Этот подход был назван методом гидродинамических подстановок.

Метод гидродинамических подстановок строится на использовании уравнений переноса маркеров гидродинамическим потоком и использовании свойств этих уравнений для априорного представления поля скорости в форме отдельных аддитивных слагаемых. Каждому аддитивному слагаемому поля скорости соответствует определенное аддитивное слагаемое поля объемных сил, в котором находится среда. Данный метод, частично изложенный в указанных выше работах, позволяет решать различные задачи гидродинамики сжимаемой среды и, в частности, задачи самогравитирующей пыли, обладающие определенной симметрией (плоской, цилиндрической и сферической). В настоящей работе приводится изложение метода гидродинамических подстановок и ряд основных результатов с некоторыми их обобщениями.

Одной из основных проблем при реализации данного метода является частичное решение задач, заключающееся в том, что точные решения строятся не для всех возможных вариантов начальных условий поля плотности и скорости среды. В ряде задач в начальный момент времени можно задавать начальное распределение плотности среды произвольно, а поле скорости при этом вычисляется через плотность. В настоящей работе для преодоления этой трудности предлагается использовать специальный метод неоднородных координатных преобразований гидродинамических уравнений, относительно которых уравнения либо остаются инвариантными, либо преобразуются подходящим способом. В результате удается полностью решить задачи о динамике самогравитирующей пыли в случае цилиндрической и сферической симметрий для произвольных начальных распределений и плотности, и скорости среды. В работе приводятся конкретные примеры решения задач.

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК

Следуя общей идеологии работ [12, 14], будем рассматривать такие течения жидкости и газа, которые сводятся к одномерным уравнениям гидродинамики за счет, например, цилиндрической или сферической начальных симметрий. В соответствии с работой [14], воспользуемся методом функциональных подстановок в форме, приспособленной к задачам гидродинамики. Течения жидкости или газа, сводящиеся к одномерным уравнениям гидродинамики, целиком описываются с помощью задания поля скорости среды  $u(x, t)$  как функции координаты и времени. Состояние среды при этом описывается ее плотностью  $\rho$ .

С каждой точкой среды можно формально связать маркерную функцию  $\theta = \theta(x, t)$ , значения которой привязаны к точкам среды. Это означает, что уравнение переноса маркеров, связанных с  $\theta$ , можно записать в следующем виде:

$$\theta_t + u(x, t)\theta_x = 0. \quad (1)$$

Дифференциальным следствием этого соотношения является уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0 \quad (2)$$

с плотностью среды

$$\rho = \theta_x, \quad (3)$$

которое получается простым дифференцированием (1) по  $x$ .

Это общее наблюдение позволяет рассмотреть специальный подход для конструирования моделей динамики среды, опирающийся на свойства функции маркера  $\theta$ . Суть метода состоит в том, чтобы, используя свойства маркеров, найти подходящий вид поля скорости  $v(x, t)$  как функции от  $\theta$  и ее производных, такой что объемные силы, действующие на среду, приобретают нужную форму. Именно тип действующих сил и определяет характер модели. Такой подход меняет общий взгляд на возможности анализа нелинейных по своей сути уравнений гидродинамики. Как подсказывает интуиция, попытка построить решение гидродинамической задачи с помощью какой-либо суперпозиции поля заранее обречена на провал, поскольку уравнения гидродинамики нелинейны. Однако рассматриваемый подход демонстрирует существование особого типа суперпозиции в гидродинамике, а именно, возможность разложить поле скорости на отдельные адди-

тивные составляющие, отвечающие за различающиеся по физической сущности объемные силы, которые, как правило, обладают свойством суперпозиции в соответствии с теорией тяготения Ньютона.

В качестве простого примера рассмотрим еще одно формальное тождество (кроме (2)), которое получается из уравнения переноса маркера. Дифференцируя уравнение неразрывности (2), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_x + u \frac{\partial}{\partial x} \theta_x = -u_x \theta_x \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta_x + u \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta_x = -u_x. \tag{5}$$

Важным является то, что эти тождества выглядят как результат действия оператора переноса

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \tag{6}$$

на некоторые функции, связанные с маркером.

Продифференцируем теперь тождество (5) еще раз по  $x$ . Следствием является тождество

$$\hat{\mathbf{L}} \frac{\partial \ln \theta_x}{\partial x} = -u_{xx} - u_x \ln \theta_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x), \tag{7}$$

где  $\rho = \theta_x$ . Рассмотрим теперь в качестве поля скорости следующую функцию:

$$u = U(\theta) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta_x. \tag{8}$$

В этом случае уравнение для поля скорости с учетом имеющихся тождеств принимает вид уравнения Навье–Стокса для инерционного течения вязкого неоднородного газа с коэффициентами кинематической вязкости  $\nu$  и динамической вязкости  $\mu = \nu\rho$ :

$$\hat{\mathbf{L}} u = u_t + uu_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\nu \rho u_x). \tag{9}$$

Решение этого уравнения строится на основе решений уравнения теплопроводности следующего вида:

$$\theta_t + U(\theta) \theta_x = \nu \theta_{xx}. \tag{10}$$

В уравнении (10)  $U(\theta)$  — произвольная дифференцируемая функция маркера. Начальное условие для  $\theta$  и выбор функции  $U(\theta)$  определяют решение начальной задачи с заданным начальным распределением и скорости, и плотности среды. Однако уравнение (10) интегрируется полностью только в случае, если

$$U(\theta) = U_0 + U_1 \theta, \tag{11}$$

где  $U_0$  и  $U_1$  — произвольные вещественные постоянные. Выбор (11) сводит задачу в случае  $F_1 \neq 0$  к уравнению Бюргерса [17], решение которого строится с помощью подстановки Коула–Хопфа:

$$\theta = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi,$$

как это было описано в [15, 16, 18]. Здесь  $\phi(x, t)$  — вспомогательная функция, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\phi_t + U_0 \phi + U_1 \phi_x = \nu \phi_{xx}. \tag{12}$$

При этом

$$u(x, t) = U_0 - 2\nu U_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi - \nu \frac{\partial}{\partial x} \times \times \left( \ln \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi \right| \right), \quad \rho(x, t) = -2\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi. \tag{13}$$

Уравнение (9) по форме не очень сильно отличается от уравнения Бюргерса, но оно включено в более приемлемую с точки зрения гидродинамики систему, содержащую уравнение неразрывности (2). Поэтому подстановка (13) оказывается более сложной, чем подстановка Коула–Хопфа, сводящая уравнение Бюргерса к тому же уравнению теплопроводности.

### 3. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА

Рассмотрим теперь задачу об адиабатическом течении идеальной сжимаемой среды. Как известно [19], в одномерном случае система уравнений динамики таких течений описывается уравнениями

$$u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} p_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{14}$$

$$s_t + us_x = 0, \quad p = p(\rho, s),$$

где  $p = p(\rho, s)$  — давление, а  $s$  — плотность энтропии течения. При адиабатическом течении энтропия элементарного объема жидкости, переносимого течением, сохраняется, что отражено в предпоследнем уравнении данной системы. В силу этого энтропия  $s$  должна быть связана с маркером  $\theta$  общей функциональной зависимостью:  $s = S(\theta)$ . Отсюда следует, что давление  $p$  можно записать как функцию вида  $p = p(\rho, \theta)$ . В частном случае распределение энтропии среды может быть однородным:  $s = s_0 = \text{const}$ . В этом случае уравнение состояния выглядит наиболее просто:  $p = p(\rho)$ .

Для случая однородного распределения энтропии по пространству решение для поля скорости можно искать в следующей форме:

$$u = W(\theta_x) = W(\rho), \tag{15}$$

где  $W(\rho)$  — некоторая дифференцируемая функция своего аргумента. Применяя к такому полю скорости оператор переноса  $\hat{\mathbf{L}}$  и учитывая (4), приходим к следующему общему соотношению:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}u &= u_t + uu_x = -u_x W'(\theta_x)\theta_x = \\ &= -\rho_x [W'(\rho)]^2 \rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} P(\rho), \end{aligned}$$

где, как и раньше,  $\rho = \theta_x$  и

$$P(\rho) = \int [W'(\rho)]^2 \rho^2 d\rho. \tag{16}$$

В частности, в случае идеального газа  $p = K\rho^\gamma$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Отсюда может быть вычислена функция  $W(\rho)$ . Имеем

$$W'(\rho) = \sqrt{K \frac{\gamma}{\gamma-2}} \rho^{\gamma/2-1}$$

и окончательно

$$W = \sqrt{\frac{4K}{\gamma(\gamma-2)}} \rho^{\gamma/2} + W_0. \tag{17}$$

Для маркера уравнение примет вид

$$\theta_t + W(\rho)\theta_x = 0. \tag{18}$$

После дифференцирования по  $x$  это уравнение принимает вид уравнения Хопфа:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\alpha\rho^{\gamma/2} + W_0)\rho_x &= 0, \\ \alpha &= \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \sqrt{\frac{4K}{\gamma(\gamma-2)}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Решение этого уравнения вычисляется из решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения:

$$\rho = H\left(x - (\alpha\rho^{\gamma/2} + W_0)t\right), \tag{20}$$

где  $H(\xi)$  — функция, задаваемая начальным распределением плотности:

$$\rho(x, 0) = H(x).$$

Это известное решение имеет тот недостаток, что существует только для таких типов начальных распределений поля скорости и плотности, которые заранее связаны соотношением (15). Решение общей задачи будет рассмотрено ниже, но предварительно приведем решения нескольких других задач течения сжимаемой среды.

#### 4. ТЕЧЕНИЯ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ПЫЛИ. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Развитый метод можно использовать для решения более широкого круга задач, в частности, для решения задач динамики самогравитирующей пыли. Метод был предложен в работах [12, 14]. В этом случае к уравнениям гидродинамики необходимо добавить уравнение Пуассона для потенциала поля тяготения, созданного самой пылью. Самосогласованная система уравнений имеет следующий вид:

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad \rho_t + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n u \rho) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \phi_x) = 4\pi G\rho. \tag{22}$$

Уравнения (21) — это уравнения Эйлера, уравнение (22) — уравнение Пуассона. Уравнение состояния пыли эквивалентно требованию равенства давления нулю, поэтому силы Архимеда в данной системе нет. Здесь  $\phi(x, t)$  — потенциал гравитационного поля,  $G$  — постоянная тяготения Ньютона, а целое число  $n = 0, 1, 2$  соответствует координатной размерности задачи  $d = n + 1$ . В случае  $n = 0$  это задача с плоской симметрией, в случае  $n = 1$  — задача с цилиндрической симметрией, а в случае  $n = 2$  — сферической.

Физическая постановка задач, связанных с системой (21), (22), состоит в описании процесса формирования плотных компактных объектов из рассеянных скоплений пыли под действием собственного поля тяготения. Поскольку процесс формирования плотных объектов из пыли происходит без силы Архимеда, он практически всегда [4] заканчивается образованием сингулярности в распределении плотности. Одним из важных параметров этого процесса является время образования сингулярности из начального состояния. Также важно образование различного типа волн, в том числе ударных, в процессе формирования плотного объекта, которые могут возникать при ненулевых начальных распределениях поля скорости. Для решения этих задач мы и воспользуемся методом гидродинамических подстановок.

#### 5. ЗАДАЧА С ПЛОСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Построение решения начнем со случая  $n = 0$ . Подставляя (3) в (22) и затем интегрируя по  $x$ , получаем уравнение следующего вида:

$$\phi_x = g_0(t) + 4\pi G\theta. \tag{23}$$

Здесь  $g_0(t)$  — постоянная интегрирования по  $x$ , характеризующая фактически ускорение системы отсчета. Теперь, подставляя это соотношение в первое уравнение (21), преобразуем его к следующему виду:

$$u_t + uu_x = -4\pi G\theta - g_0(t). \quad (24)$$

Суть этого соотношения состоит в том, что гидродинамическим маркером одномерного самогравитирующего течения пыли является ускорение свободного падения  $g = \phi_x$  (при  $g_0(t) = 0$ ). Это означает, что все точки пыли сохраняют при своем движении ту величину ускорения свободного падения, которая существовала в начальный момент времени. Этот результат, кажущийся достаточно случайным, является, на самом деле, общим свойством самогравитирующих структур без давления. Обобщение этого вывода мы рассмотрим ниже.

Решение для поля скорости будем искать в следующем общем виде:

$$u(x, t) = U(\theta) + h(t)\theta + v_0(t). \quad (25)$$

Действуя на эту функцию оператором переноса  $\hat{\mathbf{L}}$ , находим

$$\hat{\mathbf{L}}u = \theta\dot{h} + \dot{v}_0(t).$$

Сравнивая это соотношение с (24), получаем

$$h(t) = -4\pi Gt + h_0, \quad \dot{v}_0 = -g_0(t). \quad (26)$$

Таким образом, решения исходной системы уравнений строятся, исходя из решений уравнения для маркера:

$$\theta_t + (U(\theta) + (-4\pi Gt + h_0)\theta + v_0(t))\theta_x = 0. \quad (27)$$

Это уравнение имеет неявное решение:

$$\theta = H(x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0t)\theta - x_0(t)). \quad (28)$$

Здесь  $H(\xi)$  — произвольная дифференцируемая функция аргумента,

$$\xi = x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0t)\theta - x_0(t),$$

$$x_0(t) = \int v_0(t) dt.$$

Функция  $H(\xi)$  определяется начальным распределением маркера в пространстве:

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)),$$

которое связано с начальным распределением массы:

$$\rho(x, 0) = \theta_x|_{t=0} = H'(x - x_0(0)).$$

Начальное распределение скорости задается функцией  $U(\theta)$ :

$$u(x, 0) = U(\theta(x, 0)) + h_0\theta(x, 0) + v_0(0).$$

Заметим, что масса среды, сосредоточенная в интервале координат  $[x_1, x_2]$ , определяется разностью значений маркера:

$$M_{[x_1, x_2]}(t) = \int_{x_1}^{x_2} \theta_x dx = \theta(x_2, t) - \theta(x_1, t). \quad (29)$$

Важной характеристикой распределения масс является полная масса среды:

$$M_0 = \theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t).$$

Для астрофизических приложений необходимо рассматривать такие распределения массы в пространстве, для которых полная масса пыли должна оставаться конечной и постоянной во времени в случае бесконечного интервала  $[x_1, x_2]$ . Последнее условие означает, что нет самопроизвольного притока или оттока массы в систему, что обеспечивается в силу выполнения уравнения неразрывности нулевыми значениями скорости потока на бесконечности:  $u(\infty, t) = u(-\infty, t) = 0$ . Отсутствие среднего перемещения центра масс всей системы в пространстве должно соответствовать условию

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x\rho dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_t dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\rho dx = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение (28) для  $\theta$  допускает возникновение сингулярностей в распределении массы за конечное время. Момент образования сингулярности определяется, как и в случае определения момента опрокидывания простой волны, первым моментом появления точки  $(x_*, t_*)$ , в которой плотность обращается в бесконечность:  $\rho(x_*, t_*) = \infty$ . Этот момент определяется с помощью вычисления производной  $\theta_x$  из общего решения (28). Имеем

$$\theta_x = H'(\xi) (1 - U'(\theta)\theta_x + (2\pi Gt^2 - h_0t)\theta_x).$$

Отсюда находим

$$\rho = \theta_x = \frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)[U'(\theta) - (2\pi Gt^2 - h_0t)]}. \quad (31)$$



Первый момент образования сингулярности определяется из условия обращения знаменателя этого соотношения в нуль. Для иллюстрации выводов общего анализа приведем несколько примеров (частично приведенных в работах [11, 14]).

Наиболее простой случай соответствует классической задаче Джинса, когда начальные распределения плотности и скорости однородны:  $\rho(x, 0) = \rho_0 = \text{const}$ ,  $u(x, 0) = 0$ . Выбор однородного значения скорости, равного нулю, лишь фиксирует выбор определенной системы отсчета. Однородное же распределение массы соответствует бесконечной суммарной массе на бесконечном пространственном интервале. При таких начальных условиях имеем

$$U(\theta) \equiv 0, \quad \theta(x, 0) = \alpha x + \theta_0, \quad H(\xi) = \alpha \xi + \theta_0 + x_0(0),$$

где  $\alpha$  и  $\theta_0$  — вещественные постоянные. В этом случае решение имеет следующий вид:

$$\theta = \alpha \left( x + (2\pi G t^2 - h_0 t) \theta - x_0(t) \right) + \theta_0 + x_0(0).$$

Отсюда находим

$$\theta = \frac{\alpha(x - x_0(t)) + x_0(0) + \theta_0}{1 - 2\pi G t^2 + h_0 t}.$$

Это решение демонстрирует конечный результат эволюции однородного распределения плотности. Оставаясь со временем однородным распределением, плотность за конечное время  $t_* = 1/\sqrt{2\pi G}$  в каждой точке пространства одновременно обращается в бесконечность. Этот результат можно рассматривать как вариант парадокса Неймана–Зелигера [20] для плоско-симметричного распределения материи.

Физически более значимый пример можно получить, рассматривая следующее начальное распределение плотности типа распределения Лоренца:

$$\rho(x, 0) = \frac{\rho_0}{1 + x^2/a^2}, \tag{32}$$

где  $a = \text{const}$  — параметр, характеризующий ширину начального распределения Лоренца. Масса такого распределения конечна:

$$M_0 = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2/a^2} = \pi \rho_0 a.$$

Функция  $H(\xi)$  при таком начальном распределении имеет вид

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)) = \int_0^x \rho(y, 0) dy = \rho_0 a \operatorname{arctg}(x/a).$$

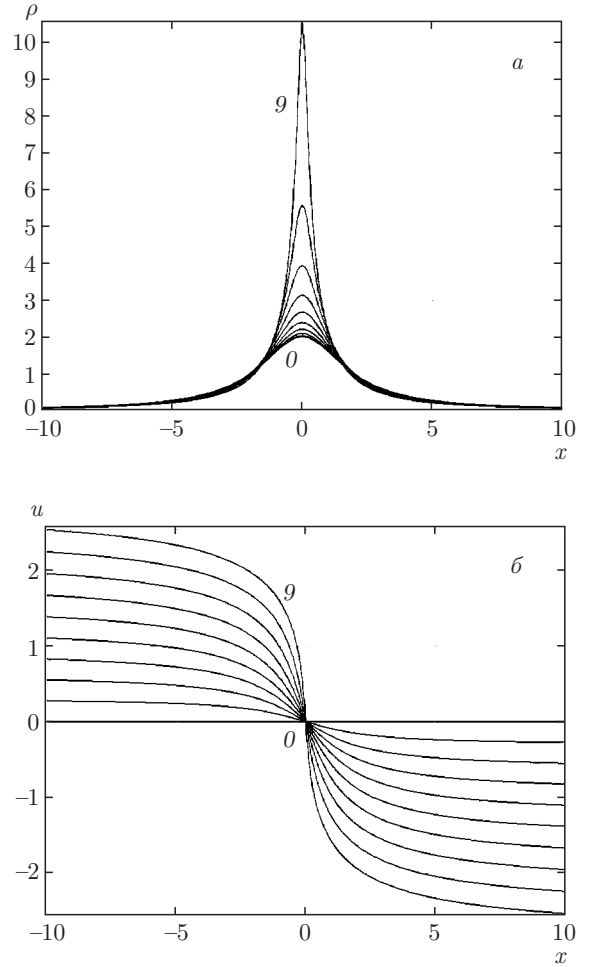


Рис. 1. Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (32),  $t = 0$  (0), ..., 0,9 (9) с шагом  $\Delta t = 0.1$

Начальное распределение скорости выберем, как и в простейшем случае, однородным с нулевым значением во всем пространстве. В силу этого  $U(\theta) = 0$ . Решение для  $\theta$  теперь находится из решения уравнения

$$\theta = \rho_0 a \operatorname{arctg} \left( x/a + 2\pi G t^2 \theta/a \right).$$

Здесь полагалось  $x_0(t) = 0$  и  $h_0 = 0$ . После отыскания решения для  $\theta$  решения для  $\rho(x, t)$  и  $u(x, t)$  вычисляются с помощью соотношений

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + (x + 2\pi G t^2 \theta)/a^2 - \rho_0 2\pi G t^2},$$

$$u(x, t) = -t\theta(x, t) = -t\rho_0 a \operatorname{arctg} \left( x/a + 2\pi G t^2 \theta/a \right).$$

Графики эволюции плотности и скорости для случая нулевого начального распределения скорости,  $u(x, 0) = 0$ , приведены на рис. 1.

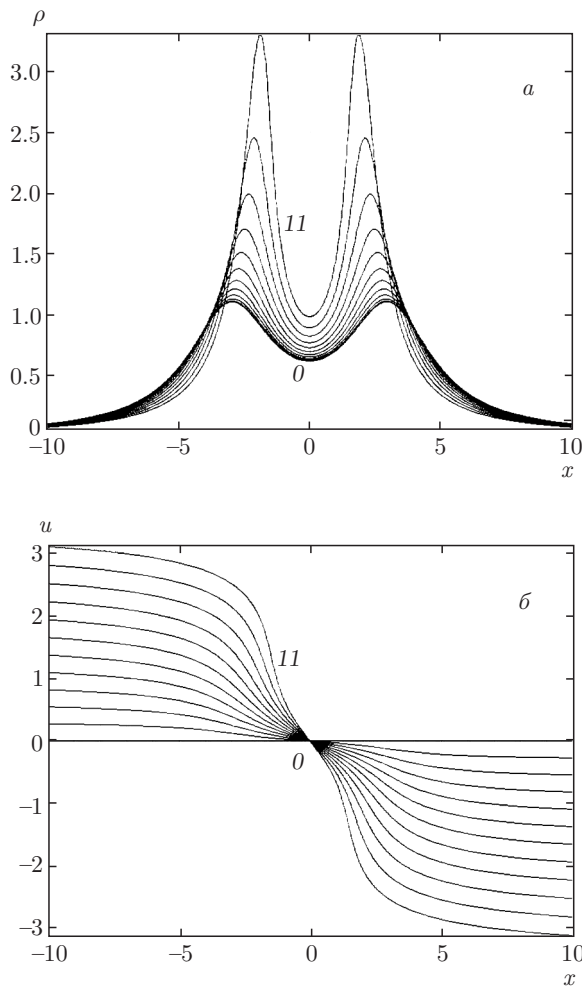


Рис. 2. Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (33),  $t = 0$  (0), ..., 1.1 (11) с шагом  $\Delta t = 0.1$

Еще один пример построения решения для системы с плоской симметрией для  $u(x, 0) = 0$  приведен на рис. 2. Этот пример соответствует начальному распределению плотности в виде двух локальных флуктуаций,

$$\rho(x, 0) = \frac{\rho_0}{1 + (x - b)^2/a^2} + \frac{\rho_0}{1 + (x + b)^2/a^2}, \quad (33)$$

$$u(x, 0) = 0,$$

для следующих значений параметров:  $a = 1, b = 1, \rho_0 \pi = 1$ . Соответствующее выражение для начального распределения маркера имеет следующий вид:

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)) = \rho_0 a \left( \arctg \frac{x - b}{a} + \arctg \frac{x + b}{a} \right).$$

Графики демонстрируют сближение на изображенном начальном отрезке времени двух флуктуаций

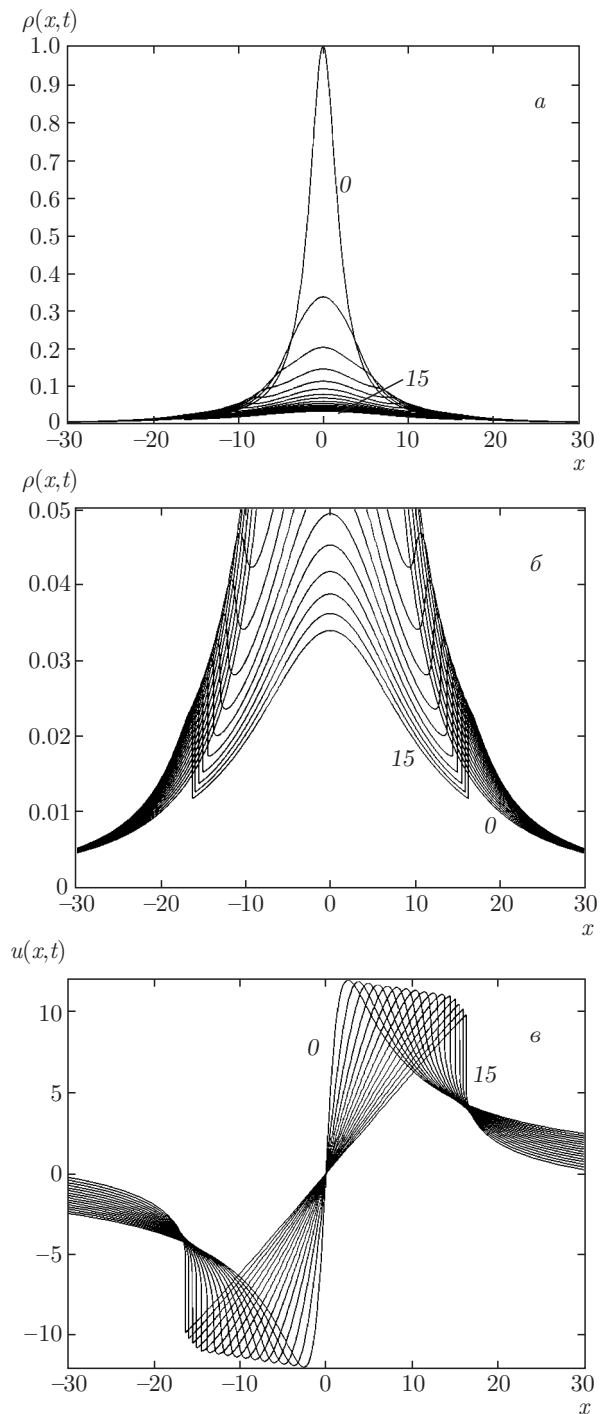


Рис. 3. Эволюция плотности (а,б) и скорости потока (в) для начальных распределений (34),  $t = 0$  (0), ..., 1.5 (15) с шагом  $\Delta t = 0.1$

из-за их гравитационного притяжения. При этом в максимуме каждой из флуктуаций формируются сингулярности (в конце изображенного отрезка времени), возникающие до момента их слияния.

Рассмотрим вариант начальной эволюции распределения для начального распределения скорости

$$u(x, 0) = -8\theta_0(x)(\theta_0^2(x) - \pi/2) \quad (34)$$

и начального распределения плотности (32). Такой выбор начального распределения скорости соответствует выбору функции  $U(\theta) = -\theta(\theta^2 - \pi/2)$ . На рис. 3а,б приведены графики эволюции распределения плотности, а на 3в — скорости для указанных начальных распределений скорости и плотности. Рисунок 3б представляет увеличенное изображение графиков на рис. 3а для более детального представления о формировании ударной волны плотности. В начальный момент времени вблизи начала координат, где находится максимум плотности, имеются максимумы поля скорости с направлением от начала координат. На изображенном начальном отрезке времени масса уносится потоком от максимума плотности, так что значение плотности в начале координат убывает. При этом на некотором расстоянии от начала координат формируются две ударных волны. При дальнейшей эволюции (за пределами изображенного отрезка времени) ударные волны останавливаются, а затем начинают симметрично двигаться к началу координат, так что через конечный отрезок времени в центре формируются единственная сингулярность.

### 6. ЗАДАЧИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ И СФЕРИЧЕСКИМ ФРОНТАМИ

Для реализации развитого подхода к интегрированию системы (21) в случае цилиндрической  $n = 1$  и сферической  $n = 2$  симметрий необходимо ввести замену переменных и несколько преобразовать уравнения. Одновременно получим и другое решение задачи с плоским фронтом на полупрямой. Вместо плотности введем новую функцию  $R = x^n \rho$ . В этом случае уравнения с функцией  $R$  будут иметь вид

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad R_t + \frac{\partial}{\partial x}(Ru) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n \phi_x) = 4\pi GR.$$

Для системы такого вида связь маркера  $\theta$  с плотностью будет определяться следующим соотношением:

$$R = \theta_x = x^n \rho.$$

При этом уравнение неразрывности выполняется автоматически, как и в одномерном случае. Интегрируя уравнение Пуассона, находим

$$\phi_x = \frac{1}{x^n} (4\pi G\theta + g_0(t)). \quad (35)$$

Подставляя это выражение в уравнение для радиальной скорости  $u(x, t)$ , приводим его к следующему виду:

$$u_t + uu_x = -\frac{1}{x^n} (4\pi G\theta + g_0(t)). \quad (36)$$

Для простоты будем полагать, что  $g_0(t) = g_0 = \text{const}$ .

Соотношение (35) представляет собой обобщение соотношения (23) и показывает, что в случае цилиндрической и сферической симметрий маркером является ускорение свободного падения, умноженное на якобиан преобразования от декартовых координат, соответственно, к цилиндрическим ( $n = 1$ ) и сферическим ( $n = 2$ ). Это указывает на то, что данный факт не является случайным и отражает общее свойство гравитационного поля.

Гидродинамическую подстановку для  $u$  будем искать в следующем виде:

$$u = f(x)F(\theta). \quad (37)$$

Действуя на это соотношение оператором  $\hat{L}$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}u &= u f'(x)F(\theta) = f(x)f'(x)F^2(\theta) = \\ &= -\frac{4\pi G}{x^n} (4\pi G\theta + g_0). \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть этого выражения с (36), находим условия, при которых они будут совпадать. Из условия разделения переменных находим

$$f(x)f'(x) = -\frac{\lambda^2}{x^n}. \quad (38)$$

В этом случае для функции  $F(\theta)$  должно выполняться алгебраическое уравнение:

$$F^2 = (4\pi G\theta + g_0)/\lambda^2. \quad (39)$$

Для функции  $f(x)$  получаем следующие решения:

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{2}\sqrt{a-x}, & n = 0, \\ \lambda\sqrt{2}\sqrt{\ln(a/x)}, & n = 1, \\ \lambda\sqrt{2}\sqrt{a^{-1} + x^{-1}}, & n = 2. \end{cases} \quad (40)$$



Здесь  $a$  — постоянная интегрирования. Соответственно, вычисляем решение для функции  $F(\theta)$ :

$$F(\theta) = \sqrt{4\pi G\theta + g_0/\lambda}. \tag{41}$$

После того как определены все функции подстановки (37), можем выписать уравнение для  $\theta$ , которое теперь будет иметь следующий вид:

$$\theta_t + F(\theta)f_n(x)\theta_x = 0. \tag{42}$$

### 7. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

Построение решений в случае цилиндрической и сферической симметрий опирается теперь на решения квазилинейного уравнения первого порядка (42). Это уравнение отличается от уравнения (27) тем, что не содержит в записи коэффициентов при

производной по  $x$  зависимости от  $t$ . Это упрощает задачу интегрирования уравнения. Как можно видеть, это уравнение приводится к уравнению простой волны с помощью замены координаты  $x \rightarrow z_n$ :

$$dz_n = \frac{dx}{f_n(x)},$$

откуда находим:

$$z_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{a-x}}, & n=0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\ln(a/x)}}, & n=1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^{-1}+x^{-1}}}, & n=2, \end{cases}$$

или

$$z_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a-x}, & n=0, \\ -a\sqrt{2} \int^x e^{-y^2} dy + z_0, & n=1, \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}} \left( -a \ln \left( x + \sqrt{x^2 + ax} + \frac{a}{2} \right) + 2\sqrt{x^2 + ax} \right), & n=2. \end{cases}$$

В этом случае уравнение примет вид уравнения Хопфа:

$$\theta_t + F(\theta)\theta_{z_n} = 0, \tag{43}$$

которое имеет интеграл движения

$$\theta = H(z_n(x) - F(\theta)t). \tag{44}$$

Распределение поля скорости  $u$  (37) имеет теперь вид

$$u(x, t) = f_n(x)F(\theta). \tag{45}$$

Распределение массы вычисляется из соотношения

$$\rho = \frac{\theta_x}{x^n} = \frac{z'_n(x)}{x^n} \frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)F'(\theta)t}. \tag{46}$$

Здесь  $\xi = z_n(x) - F(\theta)t$ . Расчет массы в пространстве проводится теперь с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} M_{x_1, x_2} &= 2^n \pi \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)x^n dx = 2^n \pi \int_{x_1}^{x_2} \theta_x(x) dx = \\ &= 2^n \pi (\theta(x_2, t) - \theta(x_1, t)). \end{aligned} \tag{47}$$

Отсюда следует, что и в двумерном, и трехмерном варианте модели масса, содержащаяся в интервале радиальных координат, определяется разностью значений маркеров.

Начальное распределение маркера связано с функцией  $H(\xi)$ , которая вычисляется из соотношения

$$\theta(x, 0) = H(z_n(x)). \tag{48}$$

Соответственно, начальное распределение плотности массы и скорости можно вычислить из соотношений

$$\rho(x, 0) = \frac{z'_n(x)}{x^n} H'(z_n(x)), \tag{49}$$

$$u(x, 0) = f_n(x)F(H(z_n(x))).$$

Поскольку функция  $F(\theta)$  фиксирована, данное решение не является полным, так как начальное распределение скорости задается начальным распределением массы. Как получить общее решение, выясним ниже, а здесь рассмотрим пример решения задачи о динамике пыли и образовании сингулярности в распределении массы. Такая задача важна для астрофизики (см. [4] и библиографию там).

Случай плоского фронта  $n = 0$  допускает вещественное решение лишь на полупрямой при  $x \leq a$ . Это предполагает очень специфическую постановку физической задачи с наличием некоторого барьера в пространстве, за который пыль не проникает. Анализ такой, достаточно экзотической, задачи здесь опустим и далее будем анализировать случаи  $n = 1, 2$ .

Поскольку случай сферической симметрии играет в астрофизике более важную роль, рассмотрим примеры решения задачи именно для случая  $n = 2$ . В качестве примера рассмотрим функцию  $H(\xi)$  в (44) следующего вида:

$$H(\xi) = \rho_0 \operatorname{arctg}(\xi^6/k),$$

где  $k$  и  $\rho_0$  — постоянные параметры. В начальный момент времени для случая  $a = \infty$ ,  $\rho_0 = 2$ ,  $k = 2$  имеем

$$\begin{aligned} z_2(x) &= 2\sqrt{2}\sqrt{x}, & z_2(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}, \\ \theta(x, 0) &= 2 \operatorname{arctg}(z_0^6(x)) = 2 \operatorname{arctg}(256x^3), \\ \rho(x, 0) &= \frac{1536}{65536x^2 + 1}, \\ u(x, 0) &= -\frac{2}{\sqrt{x}} (\operatorname{arctg}(256x^3))^{1/2}. \end{aligned} \tag{50}$$

Выбор начального распределения маркеров в таком виде необходим для того, чтобы распределение плотности в начале координат в начальный момент времени не имело сингулярности. Скорость потока в начальный момент времени в начале координат и при  $x \rightarrow \infty$  равна нулю. Графики эволюции профилей распределения плотности и скорости потока представлены на рис. 4.

Как видно из графиков, в начале координат формируется сингулярность из пыли, лежащей в непосредственной близости от начала координат. Скорость потока до образования сингулярности в начале координат остается конечной.

## 8. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 8.1. Однородный поток Хаббла

Среди интегрируемых с помощью развитого метода моделей интерес представляет задача о космологическом расширении в случае пространственно-плоской Вселенной в рамках классической механики [21, 22]. Для построения соответствующего ре-

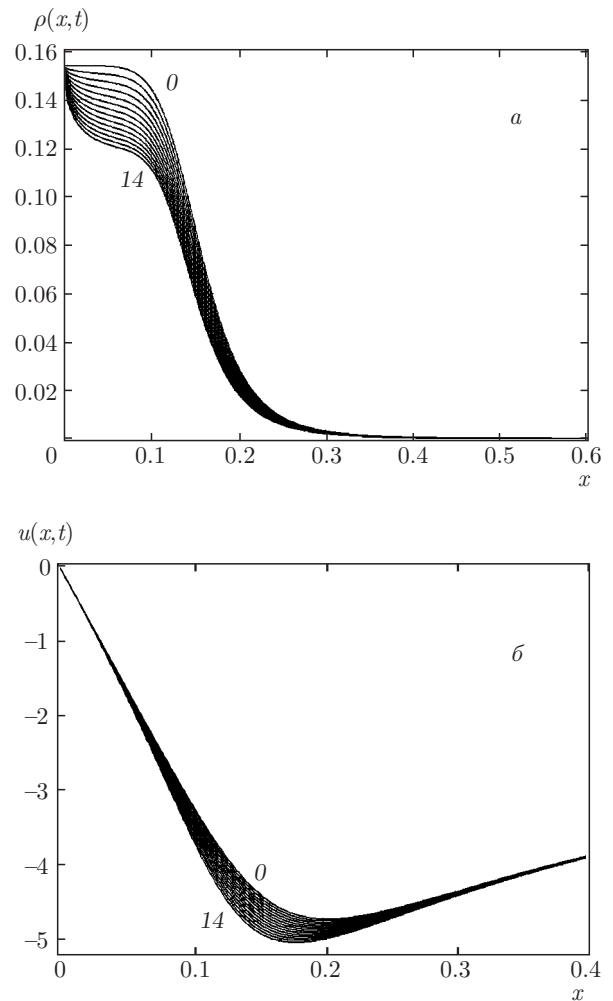


Рис. 4. Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (50),  $t = 0$  (0), ..., 0.75 (14) с шагом  $\Delta t = 0.05$

шения рассмотрим в сферическом случае подстановку для поля скорости следующего вида:

$$u(x, t) = H(t)x, \tag{51}$$

где  $H(t)$  — некоторая функция времени. Соотношение (51) представляет собой закон Хаббла космологического расширения [20, 22, 23], в котором функция  $H(t)$  называется параметром Хаббла. Вычисляя действие оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  на  $u(x, t)$ , находим

$$\hat{\mathbf{L}}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t)u = (\dot{H} + H^2)x. \tag{52}$$

Используя (51), для функции маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t)x\theta_x = 0. \tag{53}$$

Решение этого уравнения имеет следующий общий вид:

$$\theta = T(x/a(t)), \tag{54}$$

где  $T(\xi)$  — произвольная дифференцируемая функция,  $a(t)$  — функция, называемая в космологии масштабным фактором:

$$H(t) = \dot{a}/a.$$

Отсюда находим распределение плотности среды в пространстве:

$$\rho = \frac{1}{x^2} \theta_x = \frac{1}{x^2 a(t)} T'(x/a). \tag{55}$$

С другой стороны, ускорение свободного падения имеет следующий вид:

$$\phi_x = 4\pi G \frac{1}{x^2} T(x/a). \tag{56}$$

Для того чтобы это выражение совпадало с правой частью уравнения Эйлера (52), достаточно выбрать функцию  $T(x/a)$  как

$$T(\xi) = \alpha \xi^3.$$

В результате

$$u_t + uu_x = (\dot{H} + H^2)x = -4\pi G \frac{x}{a^3} \alpha.$$

Из этого соотношения находим уравнение для масштабного фактора:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G \alpha}{a^3}. \tag{57}$$

Распределение плотности в пространстве в этом случае однородно и имеет вид

$$\rho = \frac{3\alpha}{a^3(t)}. \tag{58}$$

Отсюда видно, что постоянная  $4\pi\alpha$  представляет собой массу материи внутри сферы радиуса  $a(t)$ , которая остается постоянной в процессе расширения ( $H > 0$ ) или сжатия ( $H < 0$ ) пыли.

Уравнение (57) можно переписать в стандартной форме относительно масштабного фактора:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G \alpha}{a^2}, \tag{59}$$

что соответствует классической модели космологического расширения [23]. Это уравнение интегрируется в квадратурах. Именно, первый интеграл движения для (59) имеет вид

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = E + \frac{4\pi G \alpha}{a}. \tag{60}$$

Здесь  $E$  — постоянная интегрирования. В результате решение можно записать в виде неявной функции:

$$4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea + \mu)} + \ln(4\sqrt{E}) - \sqrt{2}\mu \ln(4\sqrt{2}Ea + \sqrt{2}\mu + 4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea + \mu)}) = 8E^{3/2}(t - T), \tag{61}$$

где  $T$  — вторая постоянная интегрирования, а  $\mu = 8\pi G \alpha$ . Построенное решение по своей сути эквивалентно классическим решениям, рассмотренным в [21, 22], но с тем отличием, что оно сформулировано в терминах гидродинамики, а не в терминах динамики сферы конечного радиуса. Это дает преимущества по отношению к возможности сформулировать и решить данную задачу в более общем виде.

### 8.2. Неоднородный поток Хаббла

Рассмотрим теперь обобщение задачи Хаббла, предполагая, что параметр Хаббла может зависеть от точки среды, т. е. для каждой отдельной галактики он может иметь в текущий момент времени свое собственное значение. Это означает, что в момент начального космологического «взрыва» каждая из материальных точек (по сути — галактик) могла получить свой собственный импульс в зависимости, например, от ее массы. Такое предположение представляется более правдоподобным, чем предположение для случая однородного потока Хаббла, в котором начальные скорости определяются исключительно расстоянием от центра «взрыва» сразу после выхода Вселенной из космологической сингулярности.

Для реализации такой идеи вместо (51) рассмотрим поток следующего вида:

$$u(x, t) = H(t, \theta)x, \tag{62}$$

где  $H(t, \theta)$  — параметр Хаббла, зависящий от значения маркера  $\theta$  неопределенным пока образом. Вычисляя действие оператора  $\hat{L}$  на  $u(x, t)$ , находим

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t, \theta)u = (\dot{H} + H^2)x. \tag{63}$$

Здесь и ниже  $\dot{H}$  — частная производная по  $t$ . Используя (62), для маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t, \theta)x\theta_x = 0. \tag{64}$$

Это уравнение, как и раньше, преобразуется к уравнению Хопфа и, следовательно, его общее решение можно записать в виде

$$\theta = \Theta(\chi), \quad \chi = \frac{x}{A(t, \theta)}, \quad (65)$$

с произвольной функцией  $\Theta(\chi)$ ,

$$A(t, \theta) = A_0(\theta) \exp \left( \int_C H(t, \theta) dt \right), \quad (66)$$

где интеграл берется по времени  $t$  вдоль характеристик  $C$ , на которых  $\theta$  постоянно, а  $A_0(\theta)$  — постоянная интегрирования по  $t$ .

Для того чтобы неоднородный поток Хаббла соответствовал потенциалу поля тяготения, должно выполняться соотношение

$$\phi_x = \frac{4\pi G}{x^2} \theta(x, t) = -(\dot{H} + H^2)x. \quad (67)$$

Как и в случае однородного потока Хаббла, для того чтобы это уравнение разрешалось, достаточно произвольную пока функцию  $\Theta(\chi)$  выбрать следующим образом:

$$\Theta = \alpha\chi^3.$$

В результате для функции  $H(t, \theta)$  получаем следующее уравнение:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{A^3}. \quad (68)$$

Поскольку в это уравнение функция  $\theta$  не входит явно, его можно решать так же, как и в случае однородного потока, но постоянные интегрирования по времени при этом могут быть произвольными функциями  $\theta$ . Следовательно, решение для  $A(t, \theta)$  будет иметь тот же вид, что и (61), но с тем отличием, что в нем следует считать постоянные  $E$  и  $T$  произвольными функциями  $\theta$ :  $E = E(\theta)$  и  $T = T(\theta)$ .

В отличие от случая однородного потока, теперь распределение плотности материи (галактик) в пространстве и времени будет неоднородным и его следует вычислять, исходя из уравнения

$$\rho = \frac{\theta_x}{x^2} = \frac{3\alpha A}{A^4 + 3\alpha x^3 A_\theta}, \quad A_\theta = \frac{\partial A(t, \theta)}{\partial \theta}. \quad (69)$$

Это распределение зависит от выбранной зависимости от  $\theta$  решения  $A(t, \theta)$  уравнения (68). В это соотношение следует подставлять решение из (61) с заданными из начальных условий значениями функций  $E(\theta)$  и  $T(\theta)$ . Смысл полученного решения состоит в том, что в случае неоднородного закона Хаббла в некоторый момент времени можно каждой

отдельной галактике приписать определенную скорость космологического «разбегания» относительно наблюдателя. После этого можно построить модель того, как Вселенная будет расширяться далее.

Полный анализ возможных космологических решений, соответствующих (69), выходит за рамки данной статьи. Сделаем лишь некоторые общие замечания, вытекающие из общих свойств функции  $\rho$ . Если  $A(t, \theta)$  как функция  $x$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ , то в этом пределе плотность стремится к нулю. Отсюда следует, что плотность на больших масштабах может быть нулевой, т. е. распределение материи в такой модели носит островной характер. Плотность же на малых расстояниях от наблюдателя, когда  $x \approx 0$ , будет примерно такой же, как и в случае однородного потока Хаббла.

### 9. НЕОДНОРОДНЫЙ КООРДИНАТНЫЙ СДВИГ

Как следует из приведенных примеров, чаще всего гидродинамические подстановки позволяют найти лишь определенный класс решений исследуемой гидродинамической системы, относящийся к некоторому классу начальных распределений параметров системы. Однако, как будет показано в настоящем разделе, существуют специальные преобразования координат и времени системы, которые позволяют расширить общий класс решений и получить полное решение задачи.

Рассмотрим сначала преобразование системы уравнений баротропного течения газа в случае использования новой пространственной координаты  $\xi = x + X(\theta)$  вместо  $x$ . В этом соотношении  $X(\theta)$  — некоторая дифференцируемая функция маркера  $\theta$ . Тогда имеем

$$\theta(x, t) = \Theta(\xi, t), \quad u(x, t) = v(\xi, t).$$

Вычисляя производные полей  $\Theta(\xi, t)$ ,  $v(\xi, t)$  и  $\rho(\xi, t)$  по  $x$  и  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(\xi, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} X'(\theta) \theta_t + \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \Theta(\xi, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} (1 + X'(\theta) \theta_x), \\ \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} X'(\theta) \theta_t + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} (1 + X'(\theta) \theta_x), \\ \rho = \theta_x &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} (1 + X'(\theta) \theta_x) = \varrho (1 + X'(\theta) \rho). \end{aligned}$$

В результате уравнения для  $\Theta$ ,  $v(\xi, t)$  и выражение для  $\rho = \theta_x$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Theta_t + v\Theta_\xi &= 0, \quad \varrho = \Theta_\xi = \frac{\rho}{1 + X'(\theta)\rho}, \\ v_t + vv_\xi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} (1 + X'(\theta)\theta_x) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (70)$$

Можно видеть, что в новых координатах система выглядит идентично предыдущей, т. е. преобразование

$$x \rightarrow \xi = x + X(\theta), \quad \rho \rightarrow \varrho = \rho / (1 + X'(\theta)\rho),$$

где  $X(\theta)$  — произвольная функция маркера, оставляет систему инвариантной. В частности, если  $P(\xi, t) = F(\varrho)$ , то полученные решения (20) для баротропного уравнения состояния приводят к решениям для уравнения состояния следующего вида:

$$P = F(\varrho) = F(\rho / (1 + X'(\theta)\rho)),$$

с произвольной  $X(\theta)$ . При этом новые решения получаются с помощью преобразования координат и вычисления  $\theta$  из решений для  $\varrho$  (20) и уравнения

$$\theta = \Theta(x + X(\theta), t). \quad (71)$$

Это есть уравнение отображения маркера в себя, оставляющее уравнения инвариантными.

Заметим, что система (70) может быть преобразована с помощью аналогичного преобразования  $\xi \rightarrow \eta = \xi + Y(\Theta)$  к тому же виду. Плотность  $\varrho^{[1]}$  после второго преобразования будет связана с исходной соотношением

$$\begin{aligned} \varrho^{[1]}(\eta, t) &= \frac{\varrho(\xi, t)}{Y(\Theta(\xi, t)) + \varrho(\xi, t)} = \\ &= \frac{\rho(x, t)}{(Y(\Theta) + 1)\rho(x, t) + Y(\Theta)X(\theta)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Это преобразование оказывается более общим в том смысле, что приводит к более общей зависимости давления в системе до преобразования от плотности и маркера.

### 10. НЕОДНОРОДНОЕ КООРДИНАТНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ПЫЛИ

Рассмотрим теперь еще одно координатное преобразование уравнений, полагая, что зависимости поля скорости и плотности от координат выглядят следующим образом:

$$u(x, t) = v(\tau, \xi), \quad \rho(x, t) = \varrho(\tau, \xi),$$

где

$$\tau = T(\theta)t, \quad \xi = X(\theta)x, \quad (73)$$

$T(\theta)$  и  $X(\theta)$  — некоторые заданные функции маркера  $\theta$ . Вид этих функций будет вычислен ниже. Эти преобразования будем называть неоднородным координатным масштабированием.

Вычисляя, как и раньше, производные от функции  $v(\xi, \tau)$ , находим:

$$\frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} x X'(\theta) \theta_t + \frac{\partial v}{\partial \tau} (T(\theta) + t T'(\theta) \theta_t),$$

$$\frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} (X(\theta) + x X'(\theta) \theta_x) + \frac{\partial v}{\partial \tau} t T'(\theta) \theta_x.$$

Учитывая уравнение (1), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial t} + v(\xi, \tau) \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial \tau} T(\theta) + v(\xi, \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi} X(\theta). \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления, находим, что функция

$$\Theta(\xi, \tau) = \theta(x, t)$$

удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Theta_\tau T(\theta) + v(\xi, \tau) \Theta_\xi X(\theta) = 0,$$

которое в точности совпадает с уравнением переноса маркера  $\Theta$  со скоростью  $v(\xi, \tau)$  в случае  $T(\theta) = X(\theta)$ .

Подставляя полученные соотношения в уравнение (36), преобразуем его к следующему виду:

$$v_\tau T(\theta) + vv_\xi X(\theta) = -\frac{X^n(\theta)}{\xi^n} (4\pi G\theta + g_0). \quad (74)$$

Здесь  $g_0(t) = \text{const}$ .

Выберем теперь функцию  $T(\theta)$  так, что  $T(\theta) = X(\theta)$ . Тогда уравнение для  $v$  принимает вид

$$v_\tau + vv_\xi = -\frac{X^{n-1}(\theta)}{\xi^n} (4\pi G\theta + g_0). \quad (75)$$

Поскольку функция  $\Theta(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению для маркера в переменных  $\xi$  и  $\tau$ , для построения решения уравнения (75) можно воспользоваться теми же соотношениями, которые были получены выше, с той разницей, что функция  $F(\Theta)$  теперь вычисляется из соотношения

$$F^2(\Theta) = (4\pi G\Theta + g_0) X^{n-1}(\Theta). \quad (76)$$



Соответственно, для  $v(\xi, \eta)$  будем иметь

$$v(\xi, \tau) = \pm f_n(\xi) \sqrt{4\pi G\Theta + g_0} \sqrt{X(\Theta)}. \quad (77)$$

Решение для функции  $\Theta(\xi, \tau)$  строится из уравнения Хопфа (43) с функцией  $F(\Theta)$  (76). Соответствующий интеграл движения имеет теперь вид

$$\Theta(\xi, \tau) = H(\xi - F(\Theta)\tau) \quad (78)$$

с произвольной функцией  $H(y)$ . Функции  $H(y)$  и  $X(\theta)$  вычисляются из начальных условий:

$$H(xX(\theta_0(x))) = \theta_0(x), \quad (79)$$

$$u_0(x) = u(x, 0) = f_n(xX(\theta_0(x))) \times \sqrt{4\pi G\Theta + g_0} \sqrt{X(\theta_0)}, \quad (80)$$

при заданных начальных распределениях плотности  $\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \theta_{0,x}x^{-2}$  и скорости потока  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

### 11. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТИ

Общий алгоритм построения решения для сферически-симметричного случая  $n = 2$  с помощью неоднородного координатного масштабирования в общем случае состоит в совместном решении уравнения (79) и уравнения (80), которое можно записать в виде

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sqrt{\frac{X(\theta_0)}{a} + \frac{1}{x}} \times \sqrt{8\pi G\theta_0(x) + 2g_0}. \quad (81)$$

Отсюда находим выражение для функции  $X(\theta_0)$ :

$$X(\theta_0(x)) = \frac{au_0^2(x)}{8\pi G\theta_0(x) + g_0} - \frac{a}{x}. \quad (82)$$

Отметим, что в частном случае нулевой начальной скорости среды,  $u_0 = 0$ , это соотношение принимает наиболее простой вид:

$$X(\theta_0(x)) = -\frac{a}{x}.$$

После вычисления  $X(\theta)$  из соотношения (79) затем вычисляется функция  $H(y)$ , знание которой необходимо для получения решений  $\theta(x, t)$  в любой момент времени из уравнения

$$\theta = H\left(z_2(xX(\theta)) - tX^{3/2}(\theta)\sqrt{4\pi G\theta + g_0}\right). \quad (83)$$

Отметим важное обстоятельство, состоящее в том, что в специальном случае  $a = \infty$  соотношение (82) не выполняется и распределения скорости и плотности в начальный момент времени  $t = 0$  определяются одновременно распределением  $\theta_0(x)$ :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sqrt{\frac{8\pi G\theta_0(x) + 2g_0}{x}},$$

$$\rho(x, 0) = x^{-2}\theta_0(x).$$

В этом случае вычисление  $X(\theta)$  и  $H(y)$  должно проводиться из других характеристик потока, например, скорости изменения одного из параметров  $u(x, t)$  и  $\rho(x, t)$  со временем при  $t = 0$ , т.е. из их начальных условий.

Основной трудностью при построении решений для заданных начальных распределений  $\rho(x, 0)$  и  $u(x, 0)$  является совместное решение уравнений (79), (82) и (83). Поскольку из этих уравнений функции  $X(\theta)$  и  $H(y)$  вычисляются неявно, при вычислении  $\theta(x, t)$  из (83) их необходимо решать заново для каждого значения переменных  $x$  и  $t$ . Это существенно осложняет численное решение задачи. Однако решение (83) справедливо при любом выборе  $X(\theta)$ , поэтому для построения решений можно задавать саму функцию  $X(\theta)$  подходящим образом, а начальное поле скорости вычислять уже из соотношения (77).

В качестве примера рассмотрим  $X(\theta) = 1/(\theta^2 + 1)$ . Этот выбор определяется тем, что в начальный момент времени распределения плотности и скорости не сильно отличаются от рассмотренных выше для случая  $X(\theta) \equiv 1$ . Соответствующие графики эволюции плотности и скорости приведены на рис. 5.

Общий ход эволюции для рассматриваемого варианта  $X(\theta)$  аналогичен примеру с графиками на рис. 4.

### 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит метод вычисления точных решений ряда гидродинамических задач динамики самогравитирующей пыли и некоторых других типов систем. Такой подход позволяет не только исследовать модели в асимптотическом режиме, но и получать точные решения на всех промежуточных стадиях процесса формирования структур за счет собственного поля тяготения. Как показано в данной работе, предложенный метод гидродинамических подстановок, совместно с дополнительной процедурой координатных преобразований типа неоднородного сдвига и масштабирования вдоль

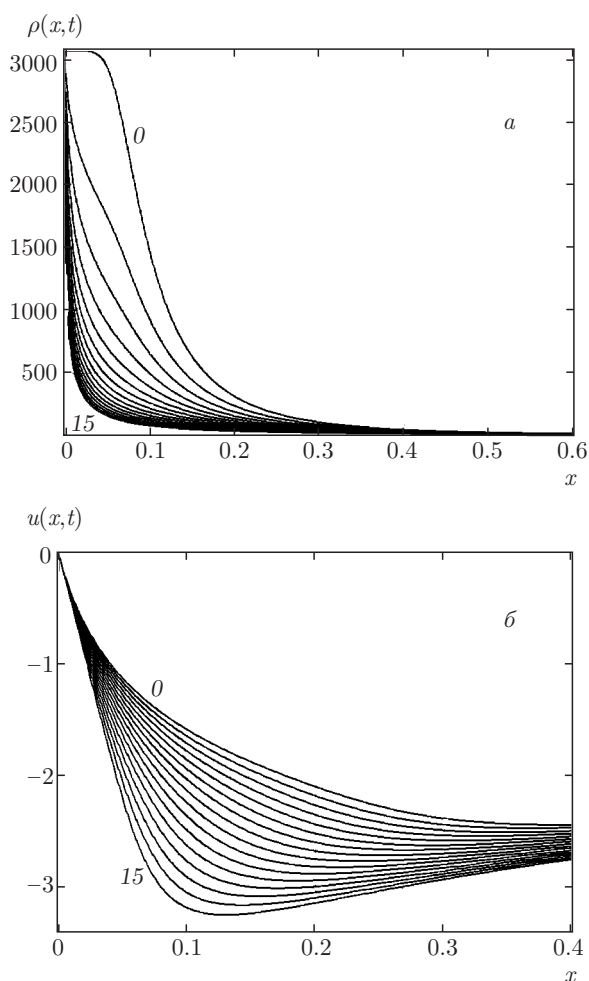


Рис. 5. Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (50),  $t = 0$  (0), ..., 0.75 (15) с шагом  $\Delta t = 0.05$

характеристик, позволяет получить эффективную схему построения решений самогравитирующей пыли как в задачах формирования компактных плотных объектов, так и в задаче о космологическом расширении в рамках классической физики. Хотя космологические модели в данной работе рассматривались в рамках классической физики, они вполне могут быть использованы для задач с пространством-временем Фридмана–Робертсона–Уокера [20, 23]. Сама процедура метода гидродинамических подстановок может применяться и для одномерных течений вязкой неоднородной жидкости, и для течений в пространстве размерностей 2 и 3, но при условии наличия цилиндрической или сферической симметрии. Как было представлено в [12], метод позволяет строить решения и для ряда задач сжимаемой жидкости в размерностях 2 и 3, не обладающих определенной пространственной симметрией. Это указывает на

возможность распространить метод на более широкий круг задач.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и РФФИ (проект № 16-42-732119 р\_офи\_м).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Jeans, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **199**, 1 (1902).
2. К. А. Постнов, А. В. Засов, *Курс общей астрофизики*, Физический факультет МГУ, Москва (2005).
3. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, Ю. В. Медведев, ЖЭТФ **104**, 3369 (1993) [A. V. Gurevich, K. P. Zybin, and Yu. V. Medvedev, JETP **77**, 593 (1993)].
4. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, 723 (1995).
5. С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии*, Физматлит, Москва (2006).
6. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, Физматлит, Москва (2005).
7. В. М. Журавлев, А. В. Никитин, *Нелинейный мир* **5**(9), 603 (2007).
8. В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 314 (2008).
9. В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 194 (2008).
10. В. М. Журавлев, ТМФ **158**, 58 (2009).
11. В. М. Журавлев, *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия* № 1, 5 (2017).
12. Сб. *Инновационные технологии*, под ред. С. В. Булярского, изд-во УлГУ, Ульяновск (2010), с. 77.
13. V. M. Zhuravlev and D. A. Zinov'ev, *Phys. Wave Phenomena* **19**, 313 (2011).
14. В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, *Изв. вузов, Поволжский регион, физ.-матем. науки*, № 4, 174 (2012).
15. E. Hopf, *Comm. Pure Appl. Math.* **3**, 201230 (1950).
16. J. D. Cole, *Quart. Appl. Math.* **9**, 225236 (1951).
17. J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Holland (1974).

18. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1978).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. IV. Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
20. И. Д. Новиков, *Эволюция Вселенной*, Наука, Москва (1983).
21. W. McCrea and E. Milne, *Quart. J. Math.* № 5, 73 (1934).
22. Л. М. Озерной, О. Ф. Прилуцкий, И. Л. Розенталь, *Астрофизика высоких энергий*, Атомиздат, Москва (1973).
23. К. А. Бронников, С. Г. Рубин, *Лекции по гравитации и космологии*, Изд-во МИФИ, Москва (2008).