

ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ НА СВОЙСТВА ЛАВИНООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЙ

*А. В. Накин, Н. Е. Савицкая**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 апреля 2017 г.

Рассмотрены свойства лавинообразных процессов, развивающихся на динамической решетке, структура связей в которой меняется благодаря наличию у каждого узла особой характеристики — «активности», определяющей вероятность установления связей данного узла с соседними за один шаг эволюции решетки. Изучена статистика размеров возникающих в системе лавин в зависимости от значений активностей узлов и от времени существования установленных в решетке связей. Аналитически и численно показано, что в зависимости от данных параметров решетки характер лавинообразной динамики в изучаемой системе меняется. В ней возможны следующие режимы: 1) возникающие лавины могут быть любых размеров, от малых до катастрофических, что отражается в степенном поведении функции плотности вероятности возникновения лавин определенных размеров; 2) в системе возникают преимущественно лавины определенного среднего размера, в этом случае изучаемая плотность вероятности близка к таковой для нормального распределения; 3) переходный режим, при котором функция плотности вероятности возникновения лавин определенных размеров близка к экспоненциальной. Полученный результат открывает возможности управления поведением сложной системы, в частности предотвращения катастрофических лавин, с помощью изменения времени существования связей и среднего значения активностей узлов.

DOI: 10.7868/S0044451017100169

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одно из основных направлений в науке о сложных сетях — исследование сетей с меняющейся во времени структурой связей [1]. В этой области интерес представляет не только изучение топологии таких сетевых структур, но и, главным образом, исследование динамических процессов, развивающихся на них, причем в случае, когда время существования установленных связей в сети сравнимо с характерным временем развития процесса на ней. Актуальность таких исследований связана прежде всего с повсеместным распространением подобных сетей и процессов в нашей жизни. Примерами здесь могут служить любые социальные сети и распространение в них информации [1], сети энергоснабжения и возникающие там взаимосвязанные поломки [2], сети человеческих кон-

тактов и распространение контактных заболеваний [3] и многое другое. Таким образом, результаты исследований в этой области открывают возможности для понимания природы широкого круга не только физических, но и социальных, экономических, биологических явлений, а также способствуют поиску эффективных инструментов управления свойствами динамических процессов на меняющихся во времени сетях.

Задачей настоящей работы является изучение особенностей развития лавинообразных процессов на динамической сети в зависимости от времени существования связей в ней. Лавинообразным процессом мы называем инициируемый внешним возмущением каскад изменений определенной физической величины (например, энергии), заданной на узлах сети. Выбор именно лавинообразного вида динамики обусловлен тем, что она присутствует во многих сложных природных и социальных системах, так что понимание ее природы и свойств важно не только с фундаментально-научной, но и с практической точки зрения.

* E-mail: savitska@inbox.ru

Для теоретических и численных исследований мы будем использовать математическую модель системы с лавинообразной динамикой, предложенную в работе [4] и учитывающую изменения сети, на которой развиваются лавины. В качестве динамической системы в данной модели бралась система взаимосвязанных пороговых элементов, описываемая алгоритмами модели кучи песка [5]. Такой выбор продиктован простотой и при этом широкими возможностями данных алгоритмов, которые вполне адекватно описывают различные физические процессы [6]. В качестве динамической сети в модели рассматривается квадратная решетка, структура связей в которой меняется во времени благодаря наличию у каждого узла особой характеристики — «активности», которая определяет для данного узла вероятность на данном шаге эволюции установить связи со своими ближайшими соседями. Правила для построения таких динамических сетей были впервые предложены в работе [7]. В нашей работе мы рассмотрим случай, когда значения активностей всех узлов решетки одинаковы.

Как и в классической модели кучи песка, в нашем случае на каждом узле решетки задается динамическая переменная, которую можно считать, например, «энергией» («фазой», «смещением», «высотой» и пр.). Лавины также инициируются внешним возмущением, т. е. увеличением энергии в случайно выбранном узле системы. В случае, когда величина энергии в каком-либо узле превысит заданное пороговое значение, узел становится «надкритическим» и может «осыпаться», т. е. часть энергии с него перераспределяется между его ближайшими соседями, что в свою очередь может сделать их надкритическими. Каскад последовательных осыпаний надкритических узлов и называется лавиной. Но, в отличие от классической модели кучи песка, в нашем случае осыпание надкритического узла возможно, только если узел активен в данный момент времени, т. е. между ним и его ближайшими соседями установлены связи. Неактивные на данный момент узлы решетки не участвуют в формировании лавины, но могут накапливать энергию в результате осыпаний их активных соседей или добавления энергии извне.

В качестве основной характеристики лавины будем рассматривать ее размер. Для различных значений активностей узлов решетки изучим функцию плотности вероятности размеров возникающих в системе лавин в зависимости от времени существования установившихся связей в решетке. Начнем со случая, когда установившиеся в момент начала лавины связи в решетке сохраняются неизменными до

момента ее окончания, а затем перейдем к ситуации, когда решетка меняется в ходе лавины.

Мы покажем, что в зависимости от величины активностей узлов решетки и времени существования установившихся связей в ней характер лавинообразной динамики в изучаемой системе меняется. Возможен режим, когда возникающие в системе лавины могут быть любых размеров, от малых до катастрофических, что отражается в степенном поведении функции плотности вероятности. Также возможна ситуация, когда в системе возникают преимущественно лавины определенного среднего размера, при котором изучаемая плотность вероятности близка к таковой для нормального распределения. Кроме того, реализуются переходные режимы, при которых функция плотности вероятности размеров лавин является экспоненциальной.

Мы продемонстрируем как с помощью аналитических расчетов, так и численно, что тип динамики изучаемой системы зависит от среднего по лавинам числа узлов решетки, которые остаются надкритическими на момент окончания лавины. Такие узлы, становясь впоследствии активными, могут давать начало следующим каскадам осыпаний в системе. Если их число велико, то возникающая лавина будет представлять собой совокупность независимых каскадов осыпаний на разных участках решетки. Очевидно, что плотность вероятности для размеров таких лавин близка к таковой для нормального распределения. В случае же, когда начало лавине может дать малое число узлов, она локализуется на едином кластере узлов решетки. Размеры таких кластеров для различных лавин могут быть любыми, а функция плотности вероятности для них имеет степенное поведение.

Таким образом, основным результатом наших исследований станет фазовая диаграмма для типов динамики изучаемой системы в зависимости от величины активностей узлов решетки и времени существования установившихся в ней связей. Данная диаграмма наглядно демонстрирует, что практически для любого значения активностей узлов решетки можно найти такое время существования связей в ней, что в системе будет реализовываться заранее заданный тип динамики. Полученный результат замечателен тем, что дает возможность эффективного управления поведением системы и, в частности, указывает способ предотвращения катастрофических лавин.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 2 дано описание математической модели системы с лавинообразной динамикой, развива-

ющейся на меняющейся во времени решетке, и рассмотрены ее основные характеристики, такие как активность узлов, время существования связей, волна лавины и ее размер. Раздел 3 посвящен изучению динамики нашей системы при различных значениях активностей узлов решетки в случае, когда решетка остается неизменной в течение лавины. В разд. 4 рассмотрена статистика лавин в системе при различных значениях активностей узлов решетки в случае, когда установленные в решетке связи существуют лишь на протяжении одной волны лавины. В разд. 5 построена фазовая диаграмма типов поведения исследуемой системы при различных временах существования связей в решетке и активностей ее узлов. В заключении сформулированы основные выводы работы, представлены перспективы ее развития и описаны возможности применения результатов.

2. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С ЛАВИНООБРАЗНОЙ ДИНАМИКОЙ НА МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ РЕШЕТКЕ

Описание математической модели системы с лавинообразной динамикой на меняющейся во времени решетке начнем с рассмотрения процесса построения динамической решетки.

На плоскости xy зададим координаты (i, j) для $M = 10000$ узлов. Для удобства рассмотрения мы выбрали их таким образом, чтобы они располагались в узлах воображаемой квадратной решетки размером $N \times N$, $N = 100$. Перед началом эволюции решетки определим для каждого узла величину $a_{i,j}$, называемую активностью. В настоящей работе будем считать, что активности всех узлов решетки одинаковы и равны $a_{i,j} = p$, $0 \leq p \leq 1$. Процесс эволюции решетки состоит из набора дискретных шагов, которые будем нумеровать индексом « l ». Физически активность $a_{i,j}$ представляет собой вероятность для данного узла установить связи с другими узлами на каждом шаге эволюции решетки. Математически величина $a_{i,j}$ выражается как отношение числа шагов $L_{connect}$ эволюции решетки, на которых узел (i, j) устанавливал связи, к полному числу шагов L эволюции решетки.

Каждый l -й шаг эволюции решетки можно представить следующим образом. В начальный момент все узлы решетки не связаны между собой. Далее с вероятностью p каждый узел становится активным и устанавливает связи одновременно со всеми своими ближайшими соседями. При этом неважно, яв-

ляются ли соседние узлы на данном шаге «активными» или «неактивными». Совокупность активных и неактивных узлов, соединенных связями, представляет собой подрешетку G_l . Все установившиеся связи в подрешетке G_l существуют на протяжении времени Δt_l , после чего аннулируются. На этом очередной шаг эволюции решетки завершается. Затем процедура повторяется, в результате чего возникает следующая подрешетка G_{l+1} и т. д. Важно отметить, что времена Δt_l существования подрешеток могут быть различными.

Будем считать, что установление и аннулирование связей происходит мгновенно. Тогда динамику нашей решетки можно представить как временную последовательность подрешеток G_l , каждая из которых является фрагментом полной квадратной решетки и существует на протяжении времени Δt_l .

На рис. 1 представлены два последовательных шага в эволюции решетки с $N = 5$. Изначально мы имеем набор не связанных между собой узлов с активностями p (рис. 1а). Далее узлы с координатами $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$ и $(5, 4)$ становятся активными (темные кружки) и устанавливают связи с ближайшими соседями, даже если те являются неактивными (светлые кружки). Возникшая подрешетка G_l на протяжении времени Δt_l представляет собой два несвязанных фрагмента квадратной решетки (рис. 1б). Далее все связи аннулируются и процесс повторяется, но активными могут стать уже другие узлы, что и изображено на рис. 1в, где представлена подрешетка для следующего шага $l + 1$.

Перейдем теперь к описанию лавинообразной динамики на эволюционирующей решетке. Для каждого ее узла теперь помимо постоянной активности $a_{i,j} = p$ будет задана переменная величина $z_{i,j}(k)$, где k имеет смысл времени для нашей системы. Динамическая переменная $z_{i,j}$ может иметь разный физический смысл в зависимости от того, какой объект описывает наша модель. Для удобства будем называть $z_{i,j}(k)$ энергией узла.

Здесь важно подчеркнуть, что в нашей системе имеются два характерных промежутка времени: Δt_l — время существования связей в решетке и Δk — шаг изменения массива переменных $z_{i,j}$. Для удобства будем считать, что шаг $\Delta k = 1$, тогда величина Δt_l будет измеряться в единицах k .

Для того чтобы начать реализацию динамического процесса, перед его началом нам необходимо зафиксировать значение активностей узлов p , а также задать для данной реализации время Δt_l существования установившихся связей в решетке (время существования подрешеток). Здесь возможны два ва-

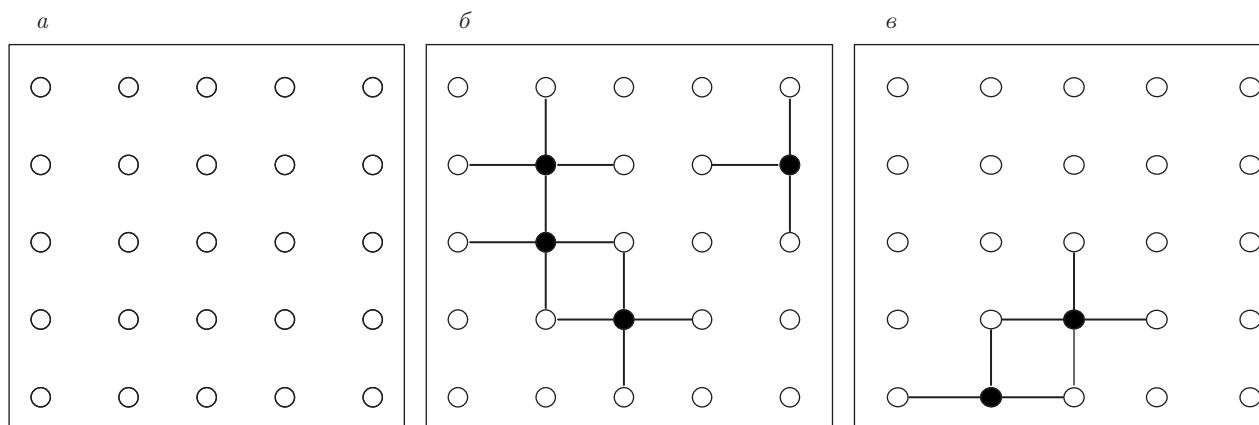


Рис. 1. Эволюция динамической решетки размером 5×5 : *a* — набор не связанных между собой узлов в начале l -го шага; *б* — установление связей между узлами (● — активные на данном шаге эволюции узлы, ○ — неактивные узлы; установленные связи существуют на протяжении промежутка времени Δt_l , после чего аннулируются и решетка вновь представляет собой набор несвязанных узлов); *в* — на следующем шаге активными становятся другие узлы, установившие новые связи, которые существуют на протяжении своего времени Δt_{l+1}

рианта. Первый подразумевает, что решетка меняется только после окончания очередной лавины. Во втором варианте решетка будет меняться во время лавины. Как реализуется каждый из вариантов, мы рассмотрим ниже. Также перед началом динамики мы произвольно задаем значения $z_{i,j}(0)$ на каждом узле, $z_{i,j}(0) = z_{i,j}^b$.

Будем описывать динамику переменных $z_{i,j}(k)$ с помощью алгоритмов модели кучи песка [5], модифицированных для случая меняющейся во времени решетки [4], которые можно записать в виде следующей последовательности шагов.

1. Возмущение системы. Случайно выбирается один из узлов системы, и переменная $z_{i,j}$ на нем увеличивается на единицу. Возмущение, а также следующая за ним лавина нумеруются индексом « n ».

2. Формирование подрешетки активных узлов. Каждый узел решетки с вероятностью p становится активным, и возникает подрешетка G_l , представляющая собой связанные кластеры, в которых имеются активные и неактивные узлы (см. рис. 1б). Индекс « l » нумерует подрешетки на протяжении всей эволюции решетки.

3. Осыпание (toppling) надкритических узлов. Рассматриваются значения энергии $z_{i,j}$ на всех активных узлах подрешетки G_l . Если хоть в одном из них значение энергии превышает критическое значение, т. е. $z_{i_0,j_0}(k) \geq z_c = 4.5$, то энергия на данном узле уменьшается на величину $\Delta z = 4$. За ним следует перераспределение четырех единиц энергии по ближайшим соседям осыпающегося узла, по едини-

це на каждый узел. В случае, если осыпается узел на границе решетки, имеющий меньше четырех ближайших соседей, то одна или две единицы энергии уходят из системы.

Если в подрешетке G_l обнаруживается сразу несколько активных надкритических узлов, то они осыпаются одновременно. Этот процесс происходит за единицу времени k и называется волной лавины. Неактивные узлы решетки могут получать энергию при ее перераспределении, но не могут осыпаться.

4. В зависимости от заданного времени Δt_l существования установившихся связей в решетке мы повторяем действия следующим образом.

4а. Решетка не меняется в течение лавины. В этом случае повторяем действие из пункта 3 до тех пор, пока все активные узлы сформированной подрешетки G_l не станут стабильными, т. е. для них $z_{i,j} < z_c$. На этом лавина заканчивается, и мы переходим к пункту 5. Заметим, что в этом случае времена Δt_l существования всех подрешеток, а также длительности лавин T_n различны, а индекс « l », нумерующий шаги эволюции решетки, совпадает с индексом « n », нумерующим лавины, $l = n$.

4б. Решетка меняется в течение лавины. Это означает, что задано время существования установившихся связей в решетке, равное числу волн лавины, на протяжении которых решетка не будет меняться, $\Delta t_l = m$. В этом случае мы должны повторить действия из пункта 3 ровно m раз, после чего все связи в решетке аннулируются и повторяются действия из пунктов 2–4. В этом случае лавина счи-

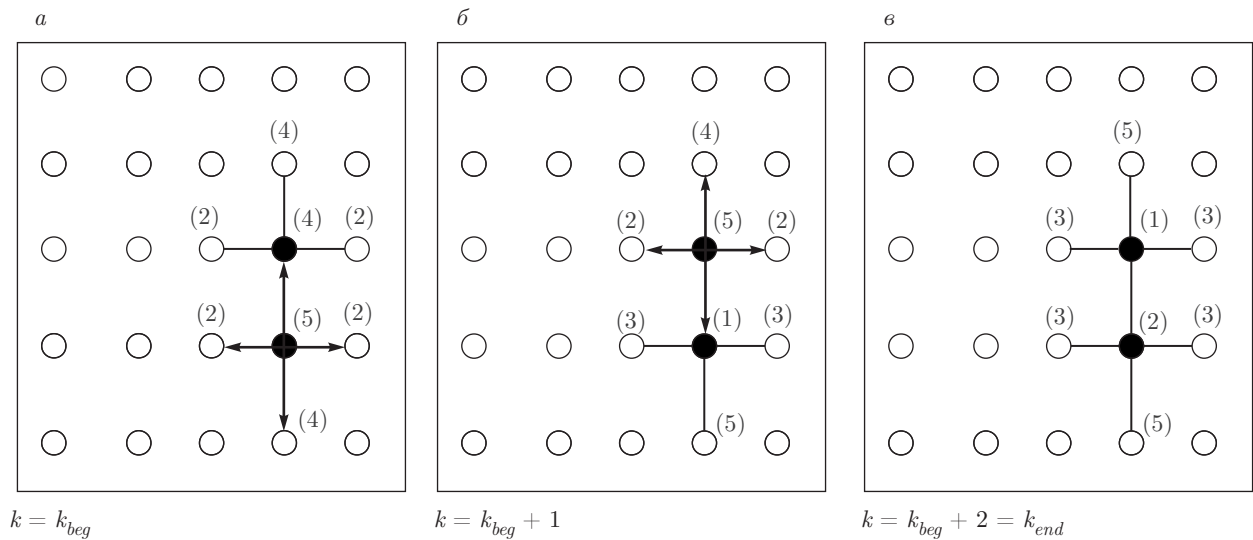


Рис. 2. Лавина на динамической решетке в случае, когда время существования установившихся связей равно времени развития лавины: ● — активные узлы; ○ — неактивные; направления осыпания указаны стрелками на соответствующих связях, цифры в скобках — значения $z_{i,j}$ на узле в момент времени k . а) Первая волна лавины. Осыпание активного узла с координатами (4, 2), направления осыпания указаны стрелками на соответствующих связях. б) Вторая волна лавины. Осыпание активного узла (4, 3), неактивные узлы принимают по единице энергии, но в течение данной лавины не осыпаются. в) Окончание лавины. Все активные в существующей подрешетке узлы являются подкритическими

тается завершенной, если все узлы вновь образованной подрешетки являются «подкритическими».

5. По окончании лавины все связи в существующей подрешетке аннулируются, и мы повторяем действия из пунктов 1–5.

Описанные выше алгоритмы изменения переменной $z_{i,j}(k)$ можно представить в виде следующих конечно-разностных уравнений:

$$z_{i,j}(k+1) = z_{i,j}(k) - 4\delta_{i,j}(k)\theta[z_{i,j}(k) - z_c] + \delta_{i+1,j}(k)\theta[z_{i+1,j}(k) - z_c] + \delta_{i-1,j}(k)\theta[z_{i-1,j}(k) - z_c] + \delta_{i,j-1}(k)\theta[z_{i,j-1}(k) - z_c] + \delta_{i,j+1}(k)\theta[z_{i,j+1}(k) - z_c] + \xi_{i,j}(k). \quad (1)$$

Здесь θ — ступенчатая функция Хэвисайда, функция $\xi_{i,j}(k)$ описывает внешнее возмущение системы: $\xi_{i,j}(k) = 1$ в моменты времени, когда очередная лавина закончилась и происходит новое добавление энергии в систему, и $\xi_{i,j}(k) = 0$ во время лавины. Функция $\delta_{i,j}(k)$ учитывает эволюцию решетки и зависит от того, активен ли узел (i, j) в данный момент времени или нет: $\delta_{i,j}(k) = 1$, если узел активен, и $\delta_{i,j}(k) = 0$, если узел неактивен в момент времени k . Так, если изменения решетки происходят только между лавинами, то на протяжении любой лавины $\delta_{i,j}(k) = \delta_{i,j}(k_{beg})$, где k_{beg} — момент начала данной лавины. Классическая модель кучи песка получает-

ся из данных уравнений при $\delta_{i,j}(k) = 1$ для всех узлов (i, j) во все моменты времени k .

На рис. 2 показан процесс прохождения лавины при условии, что решетка во время лавины не меняется (пункт 4а). В момент времени $k = k_{beg}$ сформирована подрешетка G_l , на которой и будет развиваться лавина. Она состоит из связанных между собой активных узлов (4, 2) и (4, 3) и ближайших к ним неактивных соседей. На активном узле (4, 2) значение энергии $z_{4,2}(k_{beg}) = 5 > z_c$, что, согласно пункту 3, дает начало лавине (рис. 2а). За первую ее волну происходят осыпание данного узла и перераспределение энергии по соседям согласно выражению (1). В результате на момент времени $k = k_{beg} + 1$ энергия на узле (4, 2) уменьшилась на $\Delta z = 4$, одна единица энергии попала на активный узел (4, 3), а три — на неактивные узлы, увеличив значение энергии на них (рис. 2б). После осыпания узла (4, 2) активный узел (4, 3) становится надкритическим и проходит вторая волна лавины, когда осыпается узел (4, 3) и энергия перераспределяется по его ближайшим соседям согласно выражению (1). После этого в момент времени $k = k_{beg} + 2$ оказывается, что ни в одном активном узле существующей подрешетки энергия не превышает критического значения, и лавина заканчивается (рис. 2в). Энергия на неактивных узлах (4, 1) и (4, 4) превышает критическое значение, но в процес-

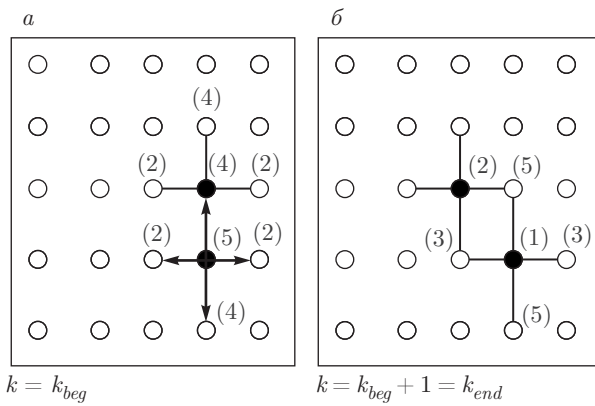


Рис. 3. Лавина на динамической решетке в случае $\Delta t_l = 1$, т. е. когда решетка меняется после каждой волны текущей лавины (обозначения такие же, как на рис. 2): *a* — первая волна лавины (осыпание активного узла подрешетки G_l с координатами (4, 2)); *б* — вторая волна лавины (формируется новая подрешетка G_{l+1} , в которой активными узлами являются узлы (3, 3) и (4, 2); поскольку оба активных узла подрешетки подкритичны, лавина заканчивается)

се данной лавины они не осыпаются, а лишь накапливают энергию. После того как лавина заканчивается, подрешетка G_l перестает существовать. Далее происходит очередное возмущение системы (пункт 1) и возникнет подрешетка G_{l+1} , на которой будет развиваться следующая лавина (пункт 2).

На рис. 3 также представлено развитие лавины, но в случае, когда решетка меняется после прохождения каждой волны лавины, т. е. $\Delta t_l = 1$ (пункт 4б). После формирования подрешетки G_l , в момент времени $k = k_{beg}$ обнаруживается, что в ней существует один надкритический активный узел с координатами (4, 2), что, согласно пункту 3, дает начало лавине (рис. 3а). За первую волну происходит осыпание данного узла и перераспределение энергии по соседям согласно выражению (1). Поскольку по определенным заранее условиям процесса решетка меняется после прохождения каждой волны, после осыпания узла (4, 2) и перераспределения энергии подрешетка G_l перестает существовать и формируется новая подрешетка G_{l+1} . Она состоит из активных узлов (3, 3) и (4, 2) и соседних с ними неактивных узлов (рис. 3б). Так как активные узлы существующей на момент времени $k = k_{beg} + 1$ подрешетки являются подкритическими, лавина на этом шаге и заканчивается и подрешетка G_{l+1} перестает существовать. Далее происходит очередное возмущение системы (пункт 1) и возникнет подрешетка G_{l+2} , на которой будет развиваться следующая лавина (пункт 2).

Таким образом, реализация динамического процесса при заданных значениях p , Δt_l и начальных условиях $z_{i,j}(0)$ представляет собой последовательность возмущений (пункт 1) и следующих за ними лавин (пункты 2–4). Длиной реализации будем называть число K_{av} произошедших в ней возмущений.

Если выбрать начальные значения $z_{i,j}(0) = 0$ для всех узлов системы и дать ей далее эволюционировать согласно выражению (1), то в течение некоторого времени от начала эволюции происходит в основном накопление энергии на узлах системы благодаря добавлению единиц в случайно выбранные узлы. Среднее значение энергии в системе после каждого n -го добавления единицы в этот период растет с ростом n :

$$z_0(n) = 1/N^2 \sum_{i,j} z_{i,j}(k^n).$$

Через некоторое время система выходит на стационарный режим, в котором среднее по числу добавлений (или по лавинам) значение $\langle z_0 \rangle$ более не возрастает, а сама величина z_0 лишь колеблется с небольшими отклонениями вокруг своего среднего значения $\langle z_0 \rangle$. В стационарном режиме для каждой возникающей лавины мы вычисляли ее размер s_n по следующей формуле:

$$s_n = \sum_{k=k_{beg}^n}^{k=k_{end}^n} \sum_l \sum_{G_l} \theta[z_{i,j}^{a,l}(k) - z_c], \quad (2)$$

где первое суммирование идет по всему времени (или по всем волнам) лавины k от ее начала, $k = k_{beg}^n$, до окончания, $k = k_{end}^n$, второе суммирование — по всем подрешеткам, которые возникают во время данной n -й лавины, а третье суммирование — по узлам существующей в данный момент времени подрешетки G_l , $z_{i,j}^{a,l}$ — энергия на активном узле подрешетки G_l . Таким образом, величина s_n имеет физический смысл полного числа активных узлов, осыпавшихся во время лавины. При этом осыпавшийся узел будет учтен столько раз, сколько раз он осыпался за время лавины. Размер лавины, представленной на рис. 2, равен $s = 2$, а на рис. 3 — $s = 1$.

3. СТАТИСТИКА ЛАВИН В СЛУЧАЕ $\Delta t_n = T_n$

Начнем рассмотрение статистических свойств лавин на динамической решетке со случая, когда время существования установившихся в решетке

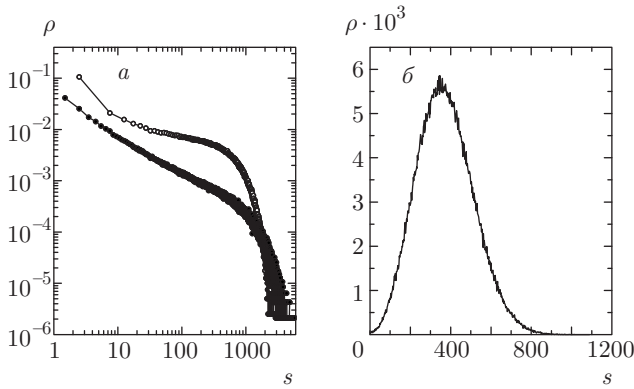


Рис. 4. Плотность вероятности $\rho(s)$ для размеров лавин при различных значениях активностей p узлов решетки в случае, когда время существования установившихся связей в решетке равно времени развития лавины на ней: а) \bullet — $p = 0.98$, $\rho(s)$ демонстрирует степенное поведение; \circ — $p = 0.95$, плотность вероятности $\rho(s)$ убывает экспоненциально; б) $p = 0.7$, зависимость $\rho(s)$ близка к плотности вероятности для нормального распределения

связей равно времени развития лавины, т. е. $l = n$, а $\Delta t_n = T_n$ (пункт 4а). Для этого случая рассчитаем плотности вероятности $\rho(s)$ возникновения лавин определенных размеров при различных значениях активностей узлов. Начальные условия выбираем как $z_{i,j}(0) = 0$ для всех узлов. После выхода системы на стационарный режим величина $\rho(s)$ рассчитывается для $K_{av} = 10^6$ лавин. Результаты расчетов представлены на рис. 4, где показаны зависимости $\rho(s)$ для трех значений активностей узлов, $p = 0.98$, $p = 0.95$ и $p = 0.7$. Видно, что при уменьшении значения активностей p узлов меняется характер динамики системы. Если при $p = 0.98$ плотность вероятности $\rho(s)$ имеет степенной характер, $\rho(s) \propto s^{-\alpha}$, то в случае $p = 0.95$ зависимость $\rho(s)$ уже отклоняется от степенной, демонстрируя экспоненциальный спад, $\rho(s) \propto \exp(-s/\beta)$, а при $p = 0.7$ величина $\rho(s)$ близка к плотности вероятности для нормального распределения. Аналогичный эффект наблюдался в работе [4], однако там ему не было дано объяснения. Здесь мы исследуем природу данного явления подробнее.

Как известно, в случае классической модели кучи песка, для которой $p = 1$, лавина в системе всегда начинается с одного узла решетки, а затронутая ею область решетки представляет собой единый кластер связанных между собой узлов [5]. Также в этом случае по окончании лавины в решетке не остается надкритических узлов с $z_{i,j}(k_{end}) \geq z_c$. Размеры лавин в системе могут быть как малыми, так и ка-

тастрофическими, что отражает степенное поведение $\rho(s)$.

В случае $p \neq 1$, как мы видим из рис. 2, на момент окончания лавины в решетке могут оставаться надкритические узлы, для которых $z_{i,j}(k_{end}) \geq z_c$. Это неактивные узлы, которые в течение лавины могли лишь получать энергию, но не осыпаться. На рис. 2в это узлы с координатами (4, 1) и (4, 4). Если после следующего возмущения системы в новой подрешетке данные узлы станут активными, то они могут дать начало независимым каскадам осыпаний. Таким образом, при $p \neq 1$ лавина может представлять собой совокупность независимых каскадов осыпаний — «подлавины» — развивающихся в разных частях решетки. В этом случае полный размер такой лавины складывается из размеров независимых подлавины. При значениях p , близких к единице, число узлов, остающихся надкритическими на момент окончания очередной лавины, мало, и чаще очередная лавина начинается с одного узла, как и при $p = 1$. При уменьшении величины p таких узлов становится все больше и подлавины, которым они дают начало, имеют примерно одинаковый размер. На рис. 5 приведены характерные картины развития лавин для $p = 0.98$ и $p = 0.7$, на которых ясно видно различие в процессах, проявляющееся в изменении характера поведения функции плотности вероятности $\rho(s)$ для размеров лавин.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что различие в характере поведения системы при разных p объясняется изменением среднего по лавинам числа узлов $\langle N_a \rangle$, остающихся надкритическими на момент окончания очередной лавины и способных дать начало независимым каскадам осыпаний после очередного возмущения системы. Данную величину можно грубо оценить аналитически, опираясь на методы, развитые в работе [8] для моделей кучи песка.

Пусть $N_a(n)$ — число узлов, оставшихся надкритическими по окончании n -й лавины, $N_c(n)$ — число критических узлов, для которых по окончании лавины $z_c - 1 \leq z_{i,j}(k_{end}) < z_c$, а $N_s(n)$ — число «стабильных» узлов, для которых по окончании лавины $z_{i,j}(k_{end}) < z_c - 1$. Следуя работе [8], мы можем определить для n -й лавины следующие величины: $\rho_a(n) = N_a/M$ — доля узлов, остающихся надкритическими по окончании лавины; $\rho_c(n) = N_c/M$ — доля критических узлов; $\rho_s(n) = N_s/M$ — доля «стабильных» узлов.

В течение лавины происходят следующие изменения величины $\rho_a(n)$. Доля $p\rho_a(n)$ надкритических узлов осыпается, но при этом появляются новые надкритические узлы, которые останутся таковыми

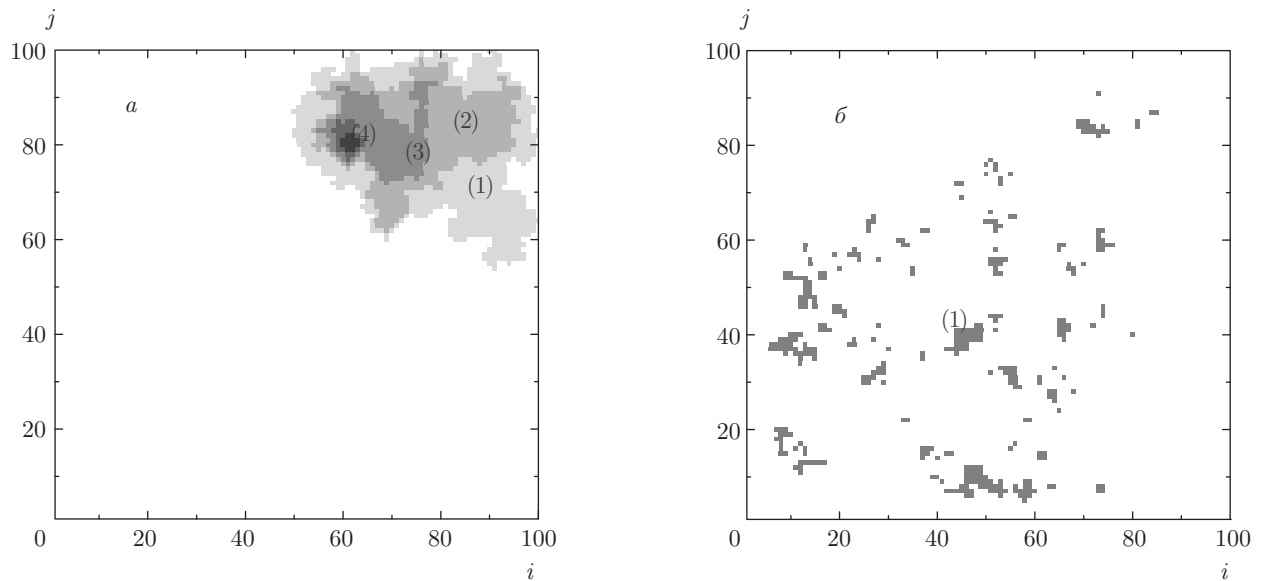


Рис. 5. Развитие лавины на динамической решетке при различных значениях активностей p узлов в случае, когда время существования установившихся связей равно времени развития лавины. Затронутые лавиной узлы обозначены различными оттенками серого цвета, цифры в скобках обозначают, сколько раз в течение лавины данный узел осыпался: a — $p = 0.98$, узлы, которые затрагивает лавина, представляют собой единый кластер; b — $p = 0.7$, лавина состоит из отдельных подлавин примерно одинакового размера

по окончании лавины. Они возникают за счет добавления единицы энергии к неактивным критическим узлам. Будем считать, что добавление двух единиц энергии в один узел — процесс крайне редкий, и пренебрежем им, как и в работе [8]. Тогда можно записать следующее уравнение для величины $\rho_a(n)$ от лавины к лавине:

$$\rho_a(n + 1) - \rho_a(n) = -p\rho_a(n) + S_n g(1 - p)\rho_c(n), \quad (3)$$

где $S = s_n/M$ — доля узлов, осыпавшихся в течение лавины, s_n — размер лавины; g — эффективное число соседей узла. Первый член правой части уравнения отражает процесс уменьшения числа надкритических узлов за счет их осыпания, второй — процесс получения энергии неактивными критическими узлами, имеющими активных надкритических соседей.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, напишем аналогичное равенство для $\rho_s(n)$:

$$\rho_s(n + 1) - \rho_s(n) = qS_n - ugS_n\rho_s(n), \quad (4)$$

где q — доля надкритических узлов, осыпавшихся в течение лавины и ставших стабильными, а u — доля стабильных узлов, получивших энергию в течение лавины и ставших критическими. Для грубой оценки считаем эти величины одинаковыми для всех лавин.

Кроме того, необходимо учесть следующее соотношение:

$$\rho_a(n) + \rho_c(n) + \rho_s(n) = 1. \quad (5)$$

Поскольку мы рассматриваем систему в стационарном режиме, после усреднения наших равенств по произошедшим лавинам получим

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{gS - (q/u)S}{gS + p/(1 - p)}, \\ \rho_s &= \frac{q}{ug}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ_a и ρ_s — усредненные по лавинам доли узлов, $S = \langle s_n \rangle / M$, $\langle s_n \rangle$ — средний размер лавины в реализации, который, как известно, пропорционален числу узлов M в решетке. Для величины q/u воспользуемся оценкой, полученной в работе [8]: $q/u = g - 1$. Тогда

$$\rho_a = S \frac{1 - p}{p} \frac{1}{1 + gS \frac{1 - p}{p}}. \quad (7)$$

Если $p \gg gS/(1 + gS)$, то мы получим следующую оценку для усредненных по лавинам долей узлов с различными величинами $z_{i,j}$:

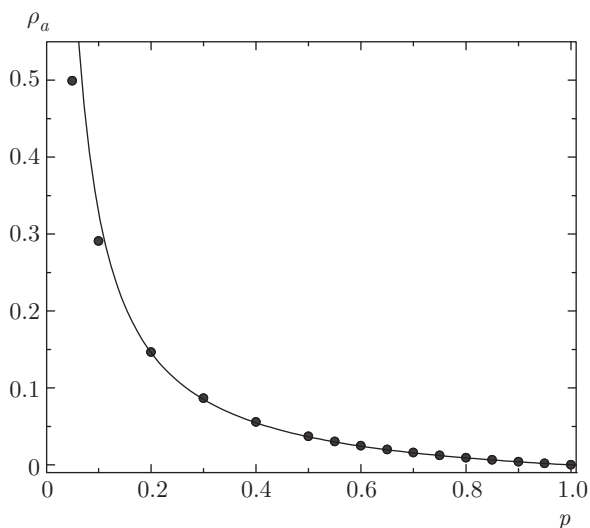


Рис. 6. Зависимость $\rho_a = \langle N_a \rangle / M$ — средней по лавинам доли узлов, остающихся надкритическими на момент окончания лавины, от величин активности узлов p в решетке, полученная численным моделированием (●), и аналитическая оценка (8) (сплошная линия). В нашей системе для всех p величина $S_n = 0.0365$ и, следовательно, оценка (8) достоверна для $p \gg gS / (1 + gS) \approx 0.12$

$$\begin{aligned} \rho_a &= S \frac{1-p}{p}, \\ \rho_c &= 1 - \frac{q}{ug} - S \frac{1-p}{p}, \\ \rho_s &= \frac{q}{ug}. \end{aligned} \tag{8}$$

В случае $p \leq gS / (1 + gS)$ мы должны принять во внимание следующие члены разложения (7) по $(1 - p)/p$.

Несмотря на ряд сделанных нами серьезных допущений, формула (8) дает довольно хорошую оценку для получающейся путем численного моделирования величины $\langle N_a \rangle / M$ — средней по лавинам доли узлов, остающихся надкритическими по окончании лавины. Это видно из рис. 6.

Таким образом, мы показали, что в случае, когда время существования установленных связей в динамической решетке равно времени развития лавины на ней, тип поведения изучаемой системы зависит от $\langle N_a \rangle$ — среднего по лавинам числа узлов решетки, которые остаются надкритическими на момент окончания каждой лавины. Такие узлы, становясь впоследствии активными, могут давать начало следующим каскадам осыпаний в системе. Величина $\langle N_a \rangle$ в свою очередь определяется величиной активностей p узлов решетки. При значениях p , близких к единице, когда начало лавине может дать малое

число узлов, процесс локализуется на едином кластере узлов решетки. Размеры таких кластеров для различных лавин могут быть любыми, а функция плотности вероятности для них демонстрирует степенное поведение. Если же $p \ll 1$, то число $\langle N_a \rangle$ велико и возникающая лавина будет представлять собой совокупность независимых каскадов осыпаний, возникающих на разных участках решетки. Очевидно, что плотность вероятности для размеров таких лавин близка к таковой для нормального распределения.

4. СТАТИСТИКА ЛАВИН В СЛУЧАЕ $\Delta t_l = 1$

Здесь мы рассмотрим случай, когда решетка, на которой развивается наш динамический процесс, меняется после каждой волны текущей лавины (пункт 4б), т. е. $\Delta t_l = 1$. Как и ранее, исследуем реализации процесса для различных значений активностей p . После выхода системы на стационарный режим мы изучим статистику для $K_{av} = 10^6$ лавин. Для каждой лавины вычислим ее размер s_n , а затем рассчитаем функцию плотности вероятности $\rho(s)$ возникновения лавины такого размера. В отличие от ситуации, рассмотренной ранее, когда время существования установленных связей в решетке равнялось времени развития лавины, при $\Delta t_l = 1$ функция $\rho(s)$ демонстрирует степенное поведение практически при всех рассмотренных значениях p . Лишь при $p \leq 0.05$ мы наблюдали отклонение от степенного закона $\rho(s) \propto s^{-\alpha}$. Результаты расчетов представлены на рис. 7 для двух значений активностей узлов $p = 0.7$ и $p = 0.05$. Сравнивая рис. 7а и 4б, видим, что в случае $p = 0.7$ при $\Delta t_l = 1$ плотность вероятности для размеров лавин в нашей системе является в широком диапазоне значений s степенной функцией, в то время как в случае, когда решетка меняется только между лавинами, при $p = 0.7$ величина $\rho(s)$ была близка к плотности вероятности для нормального распределения. Для величины $p = 0.05$ мы наблюдаем отклонение от степенного закона.

Опираясь на выводы, сделанные в предыдущем разделе, мы можем прийти к заключению, что в случае $\Delta t_l = 1$ среднее число узлов в решетке, остающихся надкритическими после окончания лавины, близко к нулю практически для любого значения p за исключением предельно малых величин. Область решетки, затрагиваемая лавиной, представляет собой в этом случае единый кластер связанных между собой узлов. Это объясняется тем, что при одном и том же значении p , в отличие от ранее рассмот-

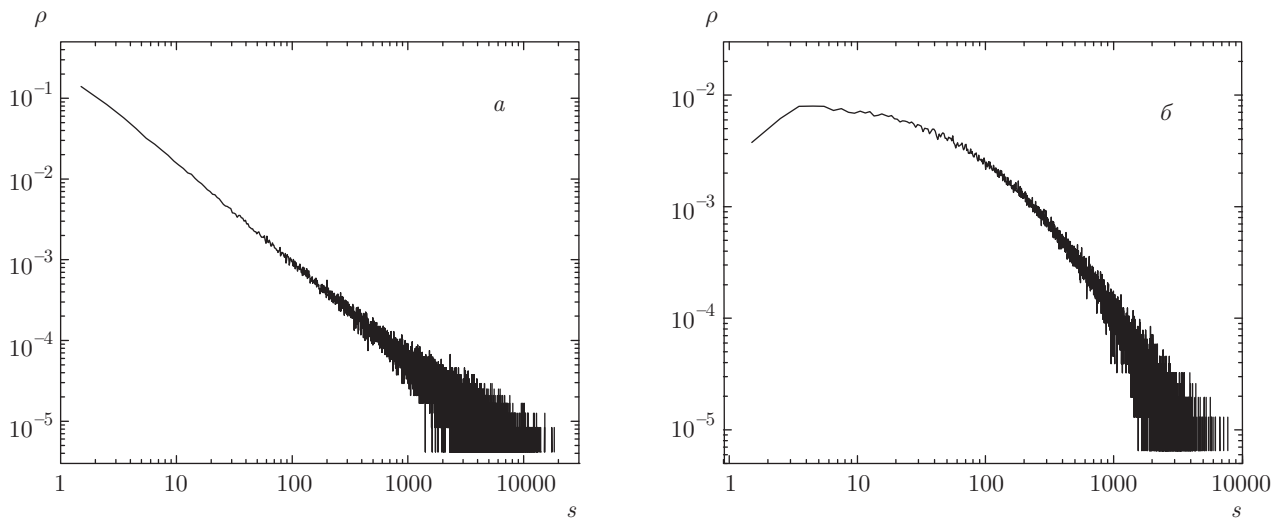


Рис. 7. Плотность вероятности $\rho(s)$ для размеров лавин при различных значениях активностей узлов решетки p в случае, когда решетка меняется после каждой волны лавины, $\Delta t_l = 1$: *a* — $p = 0.7$, степенное поведение $\rho(s)$; *б* — $p = 0.05$, $\rho(s)$ отклоняется от степенного распределения

ренного случая, когда время существования подрешетки равно времени развития лавины на ней, при $\Delta t_l = 1$ в течение лавины большее число узлов имеет возможность быть активными, т. е. осыпаться и стать подкритическими.

Данный вывод подтверждается численным расчетом, результаты которого представлены на рис. 8. Показана картина развития лавины в случае $p = 0.5$, а также зависимость $\langle N_a \rangle / M$ — средней по лавинам доли узлов, остающихся надкритическими на момент окончания лавины, от p . Видно, что даже при малых значениях p в решетке после прохождения лавины остается не более 35 надкритических узлов. Сравнивая рис. 8б и 6, можно сделать вывод, что в случае $\Delta t_l = 1$ зависимостью $\langle N_a \rangle / M$ от величины p можно пренебречь вплоть до экстремально малых значений p .

В случае $\Delta t_l = 1$ мы также можем написать уравнения для изменения долей узлов с различными значениями $z_{i,j}$. Однако при этом необходимо учитывать, что теперь мы должны рассматривать изменения соответствующих величин на каждом шаге динамики k , а не только в промежутках между лавинами, как ранее. Тогда для доли $\rho_a(k)$ надкритических узлов получим уравнение [9]

$$\rho_a(k+1) - \rho_a(k) = -p\rho_a(k) + [h + (g - \epsilon)p\rho_a(k)]\rho_c(k). \quad (9)$$

Так как мы рассматриваем изменение ρ_a на каждом шаге динамики, то, согласно работе [8], мы учли

еще возмущение системы путем добавления члена h , описывающего вероятность попадания единицы энергии в данный узел, и диссипацию энергии, введя член ϵ , описывающий вероятность единице энергии покинуть систему за один акт осыпания. Поскольку возмущение системы происходит только между лавинами, величину h можно считать малой, $h \rightarrow 0$. Величину ϵ также можно считать малой, но при этом в стационарном режиме необходимо соблюдение соотношения $h/\epsilon \rightarrow 0$ [8].

Для доли стабильных узлов можем написать

$$\rho_s(k+1) - \rho_s(k) = qp\rho_a(k) - u(g - \epsilon)p\rho_a(k)\rho_s(k), \quad (10)$$

где q — доля надкритических узлов, осыпавшихся за волну лавины и ставших стабильными, а u — доля стабильных узлов, получивших энергию за волну лавины и ставших критическими. Также сохраняется соотношение

$$\rho_a(k) + \rho_c(k) + \rho_s(k) = 1. \quad (11)$$

Теперь, усредняя полученные уравнения по всему времени эволюции системы и учитывая, что она находится в стационарном режиме, где потоки поступающей в систему энергии и покидающей ее должны быть уравновешены (это означает, что $h = \epsilon p \rho_a$), мы получим следующие выражения для долей узлов:

$$\rho_a = \frac{h}{\epsilon p}, \quad \rho_s = \frac{q}{ug}, \quad \rho_c = \frac{1}{g}. \quad (12)$$

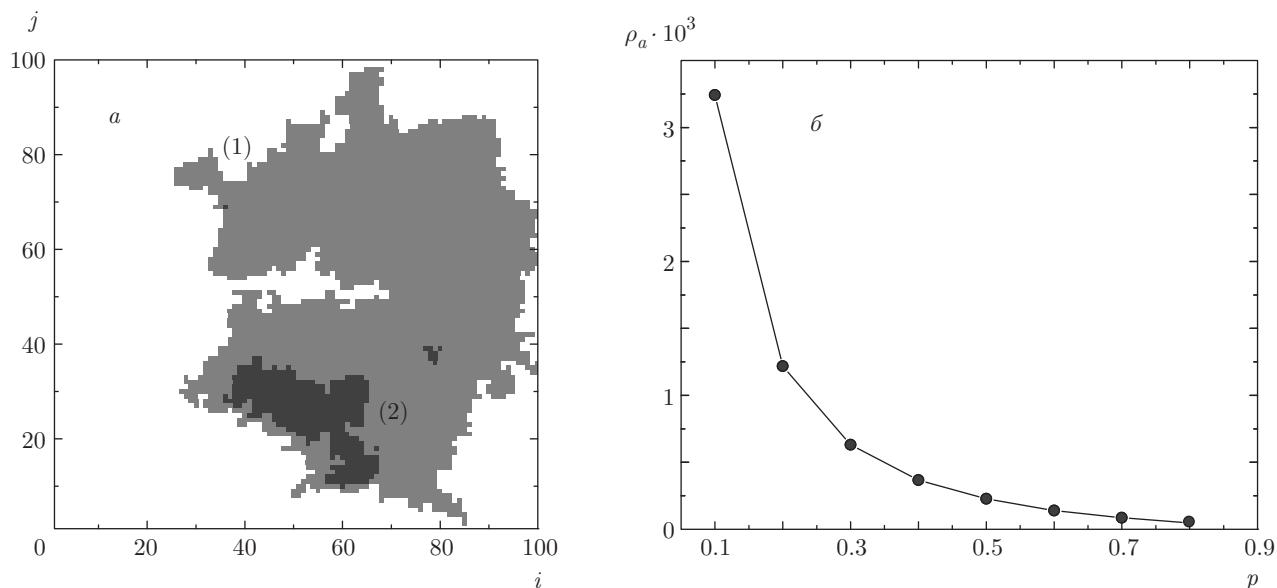


Рис. 8. *а)* Развитие лавины на динамической решетке при $p = 0.5$ в случае, когда решетка меняется после каждой волны лавины, $\Delta t_l = 1$. Затронутые лавиной узлы обозначены различными оттенками серого цвета в зависимости от того, сколько раз в течение лавины данный узел осыпался, цифры показывают количество осыпаний узлов. *б)* Полученная численным моделированием зависимость $\langle N_a \rangle / M$ — средней по лавинам доли узлов, остающихся надкритическими на момент окончания лавины, от величины активностей p узлов в решетке

Оценки (12) достоверны лишь в случае $M \rightarrow \infty$, а также при усреднении по всем возможным реализациям нашего динамического процесса, но все же из выражения для ρ_a видно, что, поскольку $h/\epsilon \rightarrow 0$, лишь при малых значениях p значение ρ_a может заметно отличаться от нуля, что и подтверждается численными расчетами (см. рис. 8).

5. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА

Помимо предельных случаев $\Delta t_n = T_n$ и $\Delta t_l = 1$ мы также рассмотрели промежуточные случаи, когда установившиеся в решетке связи существуют на протяжении определенного числа волн текущей лавины, $\Delta t_l = m$. Для каждого значения m и при различных p мы в стационарном режиме определяли размеры s_n лавин и рассчитывали функцию плотности вероятности $\rho(s)$ для них.

Оказалось, что при каждом из рассмотренных значений активности p узлов в зависимости от величины m в системе реализуется один из трех типов поведения. Для первого из них функция плотности вероятности $\rho(s)$ для размеров лавин близка к степенной, в системе возникают лавины любых размеров, от малых до катастрофических, а область, затрагиваемая лавиной, чаще всего представляет со-

бой единый кластер связанных между собой узлов. Второй, переходный, тип поведения характеризуется экспоненциальной функцией $\rho(s)$. В этом случае лавина, как правило, состоит из нескольких независимых подлавин, развивающихся в различных частях системы, но среди них можно выделить одну, затрагивающую область узлов решетки, значительно большую, чем охватывают остальные подлавин. Для третьего типа зависимость $\rho(s)$ близка к таковой для нормального распределения, а возникающие в системе лавины представляют собой совокупность независимых каскадов осыпаний примерно одинаковых размеров, возникающих на различных участках решетки.

Таким образом, по результатам проведенных расчетов мы можем построить фазовую диаграмму поведения исследуемой системы с лавинообразной динамикой на меняющейся во времени решетке в зависимости от активностей узлов решетки и времени существования установленных в ней связей (рис. 9).

Границы областей с различным поведением $\rho(s)$ мы определяли по коэффициенту асимметрии соответствующих распределений $\gamma = \langle (s - \langle s \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$, где σ — стандартное отклонение s , а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем лавинам в реализации. Известно, что $\gamma = 0$ для нормального распределения и $\gamma = 2$ для экспоненциального. Мы условно считали, что

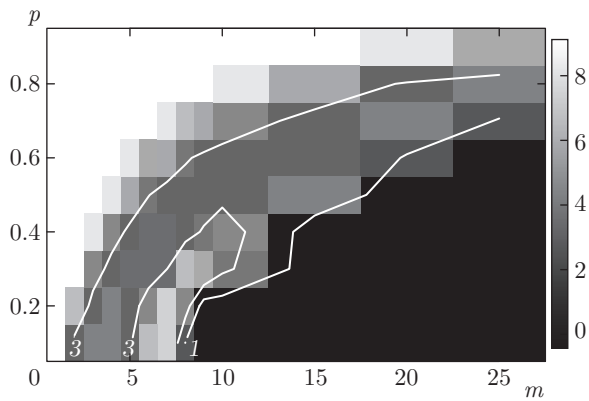


Рис. 9. Фазовая диаграмма поведения исследуемой системы с лавинообразной динамикой на меняющейся во времени решетке в зависимости от активности p узлов решетки и времени $\Delta t_l = m$ существования установившихся в решетке связей. Сплошные белые линии соответствуют значениям коэффициента асимметрии распределения $\gamma = 1$ и $\gamma = 3$, интенсивность окрасивания областей диаграммы соответствует изменению величины γ — от черного при $\gamma = 0$ до белого при $\gamma > 6$ (см. шкалу справа от графика). При $0 \leq \gamma < 1$ возникающие в системе лавины имеют преимущественно размер $s = SM$ и представляют собой совокупность независимых каскадов осыпаний, происходящих в разных областях решетки. При $1 \leq \gamma \leq 3$ поведение системы является переходным, а функция $\rho(s)$ близка к экспоненциальной. При $\gamma > 3$ в системе могут возникать лавины любых размеров, а область решетки, затрагиваемая лавиной, представляет собой единый кластер связанных между собой узлов

при $0 \leq \gamma < 1$ наша функция $\rho(s)$ близка к плотности вероятности для нормального распределения, при $1 \leq \gamma \leq 3$ — к экспоненциальному распределению, а при $\gamma > 3$ — к степенному распределению. Конечно, обозначенные границы являются несколько условными, так как переход от одного типа поведения нашей системы к другому достаточно плавный, но, как видно из рис. 9, несмотря на обширную область параметров, в которой поведение системы носит переходный характер, имеются области, где $\rho(s)$ является степенной функцией либо характерной для нормального распределения.

Анализируя полученную фазовую диаграмму, можно сделать вывод, что для любого значения активности p узлов динамической решетки существует промежуток $\Delta t_l = m$ такой, чтобы в изучаемой нами системе реализовался один из трех возможных типов лавинообразной динамики: первый — возникновение с ненулевой вероятностью лавин любых размеров от малых до катастрофических, характеризующийся степенной функцией плотности вероят-

ности размеров лавин; второй — возникновение лавин преимущественно некоторого среднего размера, для которых плотность вероятности для их размеров близка к таковой для нормального распределения; третий — переходный тип динамики с экспоненциальным распределением возникающих лавин по размерам.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование особенностей развития лавинообразных процессов на двумерных квадратных динамических решетках. Динамические решетки — это решетки, структура связей в которых меняется со временем благодаря наличию у каждого узла особой характеристики — активности $a_{i,j}$, которая определяет вероятность для данного узла установить связь со своими ближайшими соседями за один шаг эволюции решетки. Установленные связи существуют в решетке на протяжении времени Δt_l . Под лавинообразным процессом подразумевается инициируемый внешним возмущением каскад последовательных изменений динамической пороговой переменной $z_{i,j}(k)$, заданной на узлах решетки. Для аналитических оценок и численных расчетов в работе использовалась математическая модель системы с лавинообразной динамикой, предложенная ранее в работе [4] и описываемая уравнениями (1). В качестве основной характеристики лавины мы брали ее размер s_n , который вычисляется по формуле (2).

Мы изучили изменения характера лавинообразной динамики в системе в зависимости от величины активности узлов решетки, на которой развиваются лавины, $a_{i,j} = p, 0 \leq p \leq 1$, и от времени Δt_l существования установленных связей. При этом мы рассматривали два варианта изменений решетки: первый — решетка не изменяется во время развития лавины на ней, что соответствует значению $\Delta t_n = T_n$, где T_n — продолжительность n -й лавины; второй — решетка меняется в течение лавины после каждой m -й ее волны, т. е. $\Delta t_l = m, m = 1, 2, \dots$

В результате мы установили, что в исследуемой системе возможна реализация трех динамических режимов. Один из них характеризуется возникновением в системе лавин любых размеров, от малых до катастрофических, что отражает степенное поведение функции плотности вероятности $\rho(s)$ для размеров лавин. В другом режиме в системе возникают преимущественно лавины определенного среднего размера, и плотность вероятности для их раз-

меров близка к таковой для нормального распределения. Также существует переходный режим, при котором функция плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ является экспоненциальной.

Мы показали, что тип динамики изучаемой системы зависит от среднего по лавинам числа узлов решетки, которые остаются надкритическими ($z_{i,j} > z_c$) на момент окончания каждой лавины. Это число $\langle N_a \rangle$ в свою очередь определяется активностью p узлов и временем Δt_l существования установленных в решетке связей. Если значение $\langle N_a \rangle$ велико, то возникающая лавина будет представлять собой совокупность независимых каскадов осыпаний примерно одинаковых размеров, возникающих на разных участках решетки. Очевидно, что плотность вероятности для размеров таких лавин близка к таковой для нормального распределения. В случае же, когда начало лавине может дать малое число узлов, она локализуется на едином кластере узлов решетки. Размеры таких кластеров для различных лавин могут быть любыми, а их плотность вероятности $\rho(s)$ демонстрирует степенное поведение. В переходном режиме лавина также может состоять из отдельных каскадов осыпаний, возникающих на различных участках решетки, но при этом размеры этих каскадов различны. В этом случае функция $\rho(s)$ экспоненциально убывает.

Важным достижением нашей работы является получение аналитических оценок среднего по лавинам числа узлов $\langle N_a \rangle$, остающихся надкритическими на момент окончания лавины. Их удалось провести для двух предельных значений времени существования установленных в решетке связей: когда решетка не меняется в течение лавины ($\Delta t_n = T_n$) и когда решетка меняется после каждой волны лавины ($\Delta t_l = 1$). В первом случае мы получили функциональную зависимость величины доли узлов, остающихся надкритическими после окончания лавины, $\rho_a = \langle N_a \rangle / M$, от значения активностей p (6), которая в достаточно широком диапазоне изменения p совпадает с результатами численных расчетов. Во втором случае мы показали, что величина ρ_a практически не зависит от p за исключением области $p \approx 0$. Этот результат также подтверждается численно.

Основным результатом нашей работы можно считать построение фазовой диаграммы поведения исследуемой системы в зависимости от величин активности узлов p решетки и времени существования установившихся связей в ней, $\Delta t_l = m$, где m — число волн лавины, на протяжении которых решетка остается неизменной. Построенная диаграмма на-

глядно показывает, что для любого значения p существует промежуток $\Delta t_l = m$ такой, чтобы в изучаемой нами системе реализовался один из трех описанных выше типов лавинообразной динамики.

Полученный результат замечателен тем, что дает возможность эффективного управления поведением системы, в частности, предотвращения катастрофических событий.

Касаясь перспектив применения результатов данной работы, мы можем рассмотреть следующую задачу. Следуя [10, 11], мы считаем, что наша система может послужить базой для моделирования взаимодействия между отдельными участниками некоторой социальной группы. В этом случае величина p характеризует активность участников группы (частоту их контактов с другими участниками), а Δt_l — устойчивость связей между участниками. Осыпание в узле решетки может трактоваться как совершение участником какого-либо действия в результате получения информации [10]. Размер s_n лавины в этом случае эквивалентен масштабу события, следующего за поступлением в систему информации. Тогда можно сказать, что при фиксированной активности p участников группы в зависимости от длительности Δt_l контактов между ее членами событие может быть разных масштабов. Если активность участников не экстремально высока ($p < 0.95$), то в системе с более устойчивыми связями, в пределе $\Delta t_n = T_n$, возникновение как катастрофических событий, как и предельно малых маловероятно. Такая система более стабильна, в то время как в случае быстрого изменения структуры связей между участниками группы система становится менее стабильной и вероятность события катастрофических масштабов уже заметна. Особенно же важно то, что при этом существует возможность управления стабильностью такой системы с помощью изменения времени контактов между ее участниками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-22-00281).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Holme and J. Saramaki, Phys. Rep. **519**, 97 (2012).
2. G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, Phys. Rev. Lett. **109**, 248701 (2012).
3. S. Liu, A. Baronchelli, and N. Perra, Phys. Rev. E **87**, 032805 (2013).

4. Н. Е. Савицкая, Письма в ЖЭТФ **103**, 225 (2016).
5. D. Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
6. D. Markovic and C. Gros, Phys. Rep. **536**, 41 (2014).
7. N. Perra, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, Nature Sci. Rep. **2**, 469 (2012).
8. A. Vespignani and S. Zapperi, Phys. Rev. E **57**, 6345 (1997).
9. A. Vazquez and O. Sotolongo Costa, J. Phys. A **32**, 2633 (1999).
10. A. E. Biondo, A. Pluchino, A. Rapisarda, and D. Helbing, Phys. Rev. E **88**, 062814 (2013).
11. A. E. Biondo, A. Pluchino, and A. Rapisarda, Contemp. Phys. **55**, 318 (2014).