

ПОИСК ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ СТАРОБИНСКОГО С ИСЧЕЗАЮЩЕЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ НА МАСШТАБАХ СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

С. О. Алексеев^{a}, Б. Н. Латош^{b,c}, В. А. Ечеистов^d*

*^a Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия*

*^b Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

*^c Государственный университет «Дубна»
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

*^d Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 июля 2017 г.

Рассмотрены предсказания модели $f(R)$ -гравитации с исчезающей космологической постоянной (модель Старобинского) на масштабах, характерных для галактик и их скоплений. Установлено отсутствие отличия зависимости радиуса разворота от массы между моделью Старобинского и ОТО, доступного для наблюдения при текущей точности измерений. Это справедливо как для небольших масс (от $10^9 M_{Sun}$), соответствующих отдельной галактике, так и для масс, соответствующих крупным скоплениям (вплоть до $10^{15} M_{Sun}$). Радиус разворота возрастает с увеличением параметра n для всех значений масс. Несмотря на то что некоторые модели давали значительно меньший по сравнению с ОТО радиус разворота, ни одна модель не вышла за пределы, заданные наблюдательными данными.

DOI: 10.7868/S0044451017120124

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общепринятой теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО), которая успешно описывает все наблюдаемые гравитационные явления на масштабах Солнечной системы [1]. Недавнее открытие гравитационных волн [2] подтвердило применимость ОТО для описания гравитационного взаимодействия [3] в широком диапазоне расстояний (все блестяще подтвержденные LIGO теоретические расчеты делались в рамках ОТО или в ньютоновском приближении, см., например, [4, 5]). Тем не менее есть основания считать, что ОТО не способна предоставить полностью корректное описание гравитации на больших пространственных масштабах и в режиме силь-

ных энергий. Указанием на неполную применимость ОТО для описания динамики Вселенной является феномен ускоренного расширения Вселенной [6]. Это явление лучше всего описывается космологической постоянной, но её введение вызывает дополнительные трудности при согласовании с квантовой теорией [7, 8]. На неполную применимость ОТО в режиме высоких энергий указывают несколько явлений. Во-первых, ОТО неперенормируема [9], поэтому в квантовом режиме ее трактуют как эффективную теорию поля [10]. Кроме того, построение самосогласованной космологической модели требует введения инфляционной фазы расширения Вселенной, которая не может быть получена только в рамках ОТО [11]. Одним из путей решения этой проблемы стали модифицированные теории гравитации [12–14]. В рамках данной работы мы обсудим модель, принадлежащую классу $f(R)$ -гравитации (т. е. ее лагранжиан является функцией f скалярной кри-

* E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

визны R [15]). Выбор функции f не произволен, иначе возможно появление нестабильностей [16, 17]. Лагранжианы подобного вида возникают при учете радиационных поправок квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени [18], а также в струнных теориях [19].

Далее, ньютоновскую теорию гравитации можно трактовать как асимптотику более общей теории гравитации — ОТО — в слабых гравитационных полях. Следуя этой логике, мы вправе предположить, что и сама ОТО является приближением более общей теории на масштабах Солнечной системы. Этот подход позволяет рассматривать расширенные теории гравитации различных видов, необходимые для описания темной материи и темной энергии. Для объяснения этих нерешенных проблем современной астрофизики предлагаются, с одной стороны, обнаруженные популяции объектов известных типов (черные дыры и другие объекты) и новые типы частиц и полей («новая физика»), с другой — модифицированные теории гравитации [14, 20] («новая гравитация»). Объединение этих подходов дает возможность использования сильных сторон каждого из них, например, в рамках скалярно-тензорной гравитации [12].

Проблема темной энергии и, следовательно, космологической постоянной как способа ее описания, является сильным стимулом для модификации ОТО. Часть моделей трактует темную энергию, как эффект геометрии пространства-времени: массивная гравитация, где переносчик гравитационного взаимодействия (гравитон) сам обладает ненулевой массой, теории с нарушением лоренц-инвариантности (в экстремальных условиях), теории с дополнительными полями или пространственно-временными измерениями (которые тоже можно представить в виде дополнительных полей) [12, 21]. Далее, в рамках модифицированных теорий гравитации проблема темной материи получает иную трактовку. А именно, если в стандартной парадигме темная материя рассматривается как гравитирующая и не испускающая видимый свет, то в рамках $f(R)$ -гравитации — это новые эффекты, связанные с изменением общей структуры теории. Значит, и динамика галактики как единого массивного объекта может существенно отличаться от стандартной картины в ОТО. Как следствие, новая динамика гравитационного поля может приводить к новым физическим эффектам, например, к новой картине гравитационного линзирования. Интерпретация эффектов $f(R)$ -гравитации в рамках ОТО приводит к их трактовке в качестве свидетельства существова-

ния темной материи [12]. Таким образом, в рамках $f(R)$ -гравитации темная материя — это проявление вклада от членов высших порядков по кривизне.

С учетом соотношений между $f(R)$ -гравитацией и скалярно-тензорными моделями, а также их взаимных преобразований [22] обсудим в качестве первого шага модель, предложенную в работе [17]. Она построена таким образом, чтобы удовлетворять двум требованиям. Функция $f(R)$ должна быть регулярной и становиться равной нулю при $R = 0$ (предельный переход к ОТО). Модели, в которых функция f расходится в области малой кривизны, неотличимы от ОТО или не предоставляют адекватного описания имеющихся опытных данных (детальное обсуждение приведено в работе [17]). Кроме того, в модель вводится масштаб кривизны Λ , который трактуется как величина эффективной космологической постоянной. При значениях $R \gg \Lambda$ функция f стремится к $R - 2\Lambda$. В данной модели эффективная космологическая постоянная будет исчезать в режиме малой кривизны, поэтому в оригинальной работе модели такого класса названы «моделями с исчезающей космологической постоянной». В рамках данной работы в целях простоты будем называть модель, предложенную в работе [17], моделью Старобинского.

В работе [17] предложен следующий вид функции f :

$$f(R) = R + \lambda R_0 \left(\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right), \quad (1)$$

где R — скалярная кривизна, λ , R_0 и n — параметры модели. При этом считается, что $\lambda > 0$, а R_0 совпадает с принятым в модели Λ CDM значением космологической постоянной по порядку величины. В оригинальной работе было показано, что при больших значениях кривизны (эффективная) космологическая постоянная выражается через параметры исходной модели как

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2} R_0. \quad (2)$$

Поэтому в целях удобства в данной работе принимаем, что $\lambda = 2$, а $R_0 = \Lambda$.

Согласно [17], в режиме промежуточной кривизны, когда $0 < R < \Lambda$, модель Старобинского будет отличаться от ОТО и может описывать эффекты темной материи. Лабораторные тесты и проверки в масштабах Солнечной системы дают следующее ограничение: $n \geq 2$. Обсуждаемая модель должна описывать гравитационные явления на всех масштабах, поэтому в рамках данной работы мы изучим ее

проявления на масштабах галактик и скоплений галактик.

Для того чтобы проводить верификацию модели, необходимо использовать величины, связанные с реальными наблюдательными данными. В рамках обсуждения ускоренного расширения Вселенной полезно обратиться к эффектам, которые оно оказывает на гравитационно-связанные системы. На этом уровне расширение Вселенной проявляется как сила, одинаково действующая на все тела и препятствующая их гравитационной связи [23] (более подробное изложение в книге [24]). Баланс силы гравитационного притяжения и силы, связанной с ускоренным расширением, будет задавать пространственный масштаб, называемый радиусом разворота, определяющий максимальный размер гравитационной связанной системы [25–28].

Таким образом, можно вычислить радиусы разворота в ОТО и модели Старобинского и сравнить их с наблюдаемыми пространственными масштабами галактик и галактических скоплений, что позволит установить ограничения на параметры модели Старобинского на данных масштабах. Идеи использования такого подхода для Λ CDM-космологии обсуждались ранее, например, в работах [29, 30], мы лишь развиваем этот подход.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА РАЗВОРОТА

Сфероидальные и некоторые эллиптические галактики, а также так называемые регулярные скопления галактик имеют сферическую или близкую к ней форму, малые скорости вращения (по сравнению с дисперсией скоростей) и ярко выраженную центральную часть [31–33]. Поэтому для описания гравитационного поля галактики мы будем использовать сферически-симметричную метрику, допустив, что подавляющая часть массы сосредоточена в центре. Такое упрощение можно рассматривать в качестве нулевого приближения.

Мы хотели бы особо подчеркнуть, что используемый нами метод применим в полной мере лишь для сферически-симметричных галактик. Гравитационное поле галактики, безусловно, определяется не только ее полной массой, но и пространственным распределением массы внутри нее самой. Поэтому, чтобы вычислить гравитационное поле конкретной галактики, необходимо знать ее распределение массы. Поскольку распределение массы в галактиках существенно зависит от их типа, задачу практически невозможно решить в общем ви-

де. Иными словами, результаты вычислений радиуса разворота для эллиптической галактики неприменимы для дисковой галактики, потому что их гравитационные поля, определяемые пространственным распределением массы, существенно отличаются друг от друга. Чтобы решить задачу в максимально возможном общем случае, мы и используем метрику Шварцшильда. При этом мы пренебрегаем внутренней структурой галактики. Именно поэтому необходимо рассматривать предложенный нами подход в качестве нулевого приближения, описывающего ведущий вклад гравитационного взаимодействия, но пренебрегающего гравитационными эффектами, связанными со сложной структурой галактики. Итак, в качестве нулевого приближения используем метрику шварцшильдовского типа, которую запишем в виде

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^{-A} dr^2 - r^2 d\Omega, \quad (3)$$

где $A = A(r)$ — неизвестная функция. Заметим, что использование данной метрики для описания гравитационного поля галактики также ограничено теоремой Биркгофа, которая в наиболее общем случае неприменима для $f(R)$ -гравитации [34–36]. Тем не менее, именно в рассматриваемом нами частном случае, когда тензор Риччи зависит лишь от радиальной координаты, теорема применима [12].

Уравнения поля в моделях $f(R)$ -гравитации имеют следующий вид [15, 17]:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) = 0, \quad (4)$$

где $f'(R) = df(R)/dR$, ∇_μ — ковариантная производная, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ — оператор Даламбера. Уравнения (4) — нелинейная система второго порядка, которую будем решать численно. Чтобы упростить задачу, понизим порядок уравнения, введя дополнительную переменную a :

$$a = \frac{dA}{dr}. \quad (5)$$

Аналогично, для простоты будем считать скалярную кривизну независимой переменной. В качестве уравнения, связывающего ее с A и a , используем ее явный вид:

$$R = -\frac{2}{r^2} + e^A \left(\frac{da}{dr} + a^2 + \frac{4a}{r} + \frac{2}{r^2} \right). \quad (6)$$

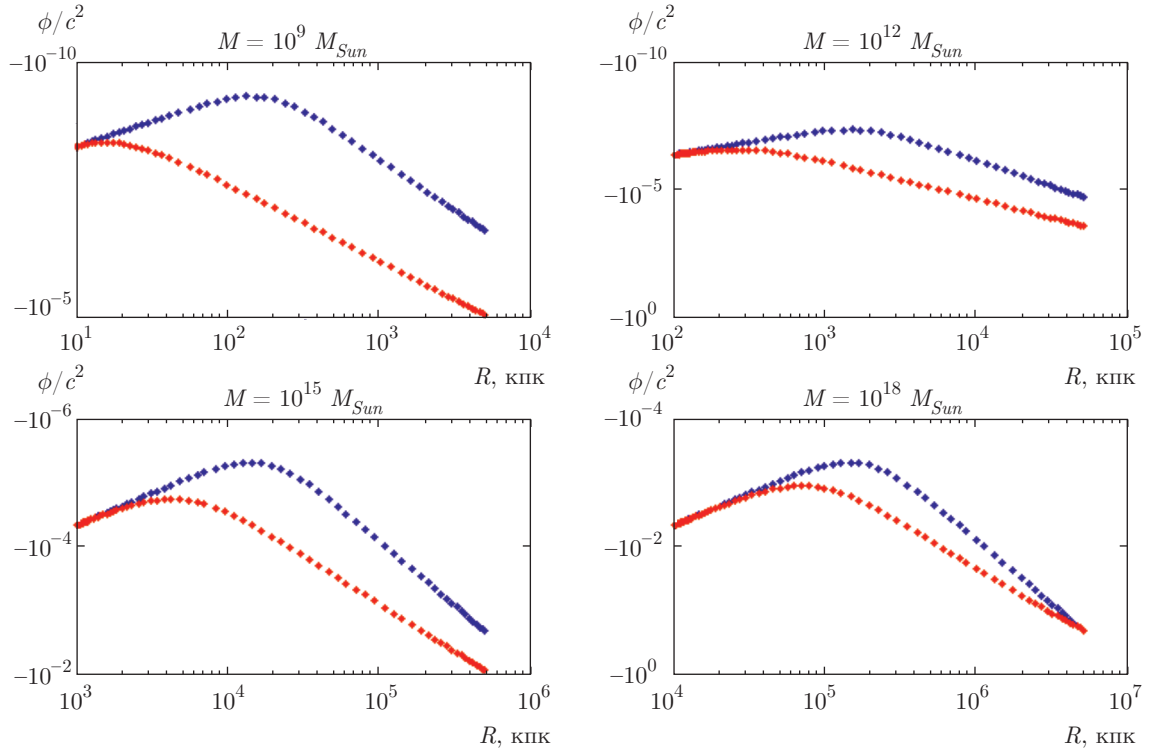


Рис. 1. Зависимости безразмерного гравитационного потенциала ϕ/c^2 от расстояния для различных значений масс галактик и скоплений. Верхние кривые — поведение ϕ/c^2 в ОТО, нижние — для модели Старобинского при $n = 1$

Из (1, 1)-компоненты уравнений (4) можно выразить $d^2 f/dr^2$ и, используя (0, 0)-компоненту (4), показать, что эта величина равна нулю:

$$\frac{d^2}{dr^2} f' = f' \left(R_{11} - \frac{g_{11}}{g_{00}} R_{00} \right) + \frac{d}{dr} f' \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{g_{11}}{g_{00}} \Gamma_{00}^1 \right) = 0, \quad (7)$$

так как выражения в скобках равны нулю. Как следствие, выражение для $\square f'$ упростится и примет вид

$$\square f' = -e^A \left(a + \frac{2}{r} \right) f'' \frac{d}{dr} R. \quad (8)$$

Подставляя его явное выражение в (0, 0)-компоненту уравнений (4), получаем последнее уравнение, необходимое для завершения системы:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{f'(R)R_{00}/g_{00} - f(R)/2}{(e^A(a + 2/r) + a/2)f''(R)}. \quad (9)$$

Таким образом, объединим уравнения (5), (6) и (9) в следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dr} = a, \\ \frac{da}{dr} = e^{-A} \left(R + \frac{2}{r^2} \right) - a^2 - \frac{4a}{r} - \frac{2}{r^2}, \\ \frac{dR}{dr} = \frac{f'(R)R_{00}/g_{00} - f(R)/2}{(e^A(a + 2/r) + a/2)f''(R)}, \end{cases} \quad (10)$$

где функция f задана формулой (1), а компоненты тензора Риччи вычислены по метрике (3).

Система (10) была решена с помощью модифицированного метода Рунге–Кутты (TR-BDF2, [37]). Для расчета был выбран спектр масс от $10^9 M_{Sun}$ до $10^{18} M_{Sun}$, чтобы в него попали значения, характерные как для отдельных галактик (масса галактики Млечный путь равна $5.22 \cdot 10^{11} M_{Sun}$ [38]), так и для скоплений (характерные массы скоплений $\sim 10^{15} M_{Sun}$ [39–41]). В поисках новых ограничений на параметры модели мы проверили значения параметра n от 1 до 9. Используем следующее определение гравитационного потенциала:

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1) = \frac{c^2}{2}(e^A - 1), \quad (11)$$

а также его безразмерную версию — безразмерный гравитационный потенциал (БГП)

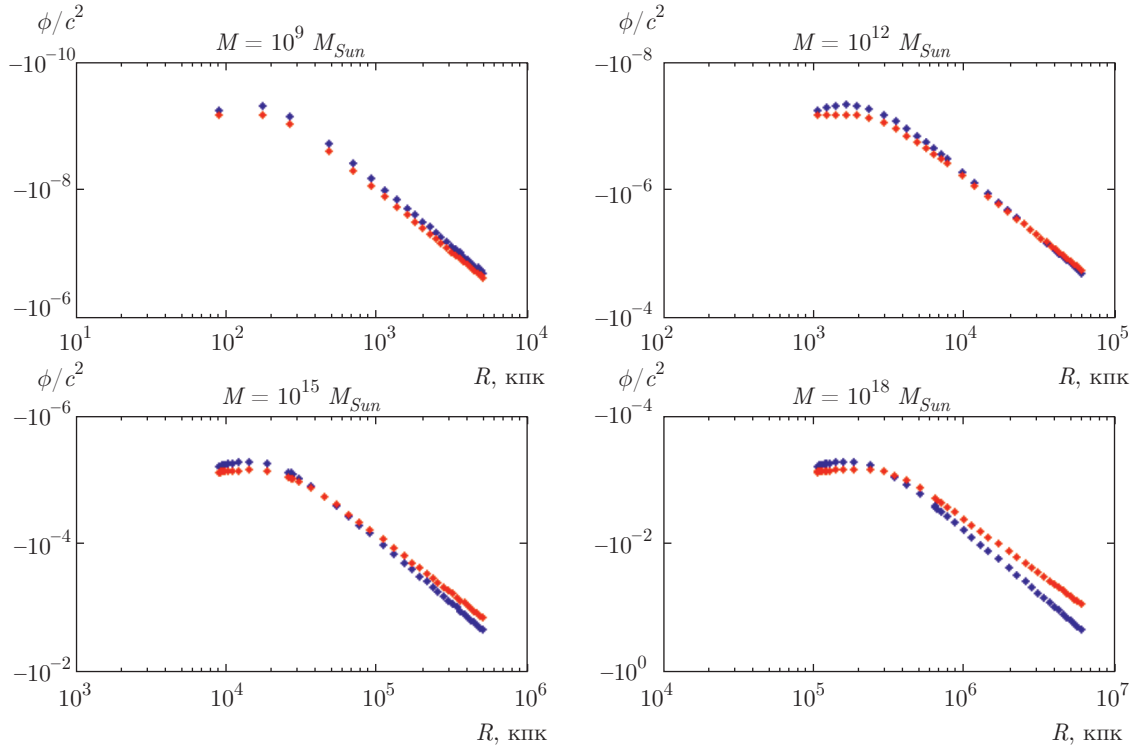


Рис. 2. Зависимости безразмерного гравитационного потенциала ϕ/c^2 от расстояния для различных значений масс галактик и скоплений. Верхние кривые — поведение ϕ/c^2 в ОТО, нижние — для модели Старобинского при $n = 9$

$$\frac{\phi}{c^2} = \frac{e^A - 1}{2}. \tag{12}$$

Нами были получены зависимости БГП от радиуса для модели Старобинского с разными значениями n . Зависимости для $n = 1$ и $n = 9$ (как крайние случаи) представлены соответственно на рис. 1 и 2. Для сравнения на графиках также приведены результаты для стандартной Λ CDM-модели. Из приведенных зависимостей можно заметить, что наибольшее отличие от ОТО получается при малых значениях параметра n , но даже и в этом случае оно не превышает 20%.

Радиус разворота, как указано выше, находится в точке, где сила гравитационного притяжения уравновешивается силой, связанной с ускоренным расширением Вселенной. В этой точке гравитационный потенциал должен обращаться в нуль:

$$\frac{d\phi}{dr} = 0. \tag{13}$$

Из определения (11) напрямую следует, что в этой точке величина a должна равняться нулю:

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \Leftrightarrow a = 0. \tag{14}$$

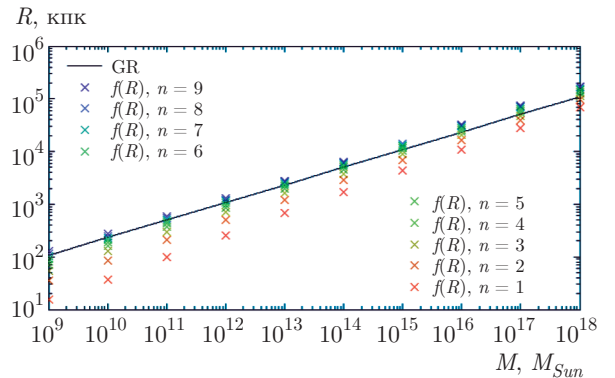


Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости значений радиуса разворота от массы для моделей Старобинского с $n = 1, \dots, 9$ (снизу вверх), а также ОТО (прямая линия) в логарифмическом масштабе

Поскольку a присутствует в системе (10) как независимая переменная, будем искать такие r_1 и r_2 , для которых $a(r_1) > 0$ и $a(r_2) < 0$ соответственно. После этого уже легко вычислить искомое значение радиуса разворота с помощью линейной интерполяции. Зависимости значений радиуса разворота от массы объекта (галактики или скопления га-

Таблица. Значения коэффициентов линейного фитирования (16). Случай $n = 0$ соответствует ОТО

n	α	β
0	0.3333	-0.966
1	0.4084 ± 0.0013	-2.495 ± 0.017
2	0.3807 ± 0.0004	-1.869 ± 0.005
3	0.3683 ± 0.0001	-1.578 ± 0.001
4	0.3617 ± 0.0001	-1.412 ± 0.002
5	0.3577 ± 0.0002	-1.305 ± 0.003
6	0.3552 ± 0.0003	-1.231 ± 0.004
7	0.3528 ± 0.0005	-1.169 ± 0.007
8	0.3486 ± 0.0015	-1.091 ± 0.019
9	0.3428 ± 0.0019	-0.993 ± 0.024

лактик) для моделей Старобинского с различными n , а также ОТО приведены на рис. 3. Зависимости очень близки к степенной, которая в логарифмическом масштабе выглядит как линейная, поэтому будем аппроксимировать зависимость радиуса разворота R_{TAR} (turnaround radius) функциями следующего вида:

$$R_{TAR} = M^\alpha R_{TAR}(M_{Sun}), \quad (15)$$

где R_{TAR} выражен в килопарсеках, а масса объекта M — в массах Солнца M_{Sun} . В логарифмической форме имеем

$$\lg(R_{TAR}) = \alpha \lg(M) + \beta. \quad (16)$$

Значения коэффициентов α и β для различных n ($n=0$ соответствует ОТО) приведены в таблице.

Проиллюстрируем значения отношений радиусов разворота модели Старобинского и ОТО в зависимости от массы графически на рис. 4. Во всем рассмотренном диапазоне масс наименьшими радиусами нулевой массы обладают модели Старобинского с $n = 1$ и $n = 2$, поэтому их и стоит сравнивать с результатами наблюдений в первую очередь.

3. СРАВНЕНИЕ С ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Прямое измерение радиуса разворота в настоящее время представляется затруднительным. Ведь

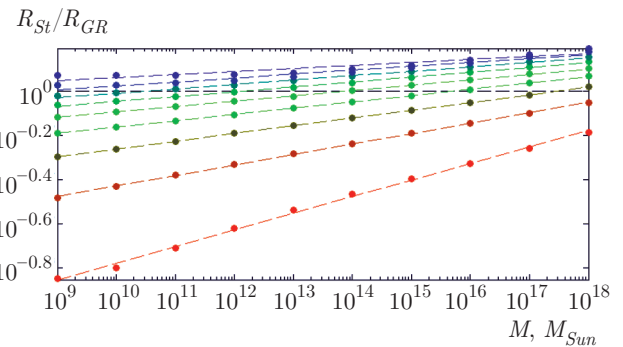


Рис. 4. (В цвете онлайн) Отношение радиуса разворота модели Старобинского к его значению в ОТО в зависимости от массы. Точки — результаты численных расчетов, штриховые линии — аппроксимации линейной зависимостью. Для больших n уже проявляются нелинейные эффекты

необходимо непосредственно пронаблюдать движение пробного тела, например звезды, в дальней галактике, что лежит за пределами современных возможностей. Но взяв границу профиля плотности, полученную методом гравитационного линзирования (характер линзирования определяется на масштабах галактик и меньших), можно использовать ее в качестве ограничения снизу на размер объекта. Радиус разворота, в свою очередь, ограничивает максимальный размер объекта, поэтому не может быть меньше размера границы профиля плотности. Подобные профили были получены из анализа CLASH [39, 40] и других исследований скоплений галактик [41]. Все эти данные сравним с моделями Старобинского с $n = 1$ и $n = 2$, имеющими наименьший радиус разворота, а также с ОТО (см. рис. 5).

Несмотря на значительные отличия, ни одна из обсуждаемых моделей (даже с $n=1$, которая не проходит проверку в Солнечной системе [17]) не отклонилась дальше, чем на 20% от радиуса, определяемого ОТО и фиксируемого наблюдательными данными. Таким образом, современный уровень точности астрономических наблюдений не позволяет ни усилить, ни подтвердить полученные ранее ограничения для модели Старобинского.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрена модель $f(R)$ -гравитации с исчезающей космологической постоянной (модель Старобинского) на масштабах, характерных для галактик и их скоплений. Получены радиусы разворота для масс, характерных для скоплений галактик, как строгое ограничение сверху на размеры скопле-

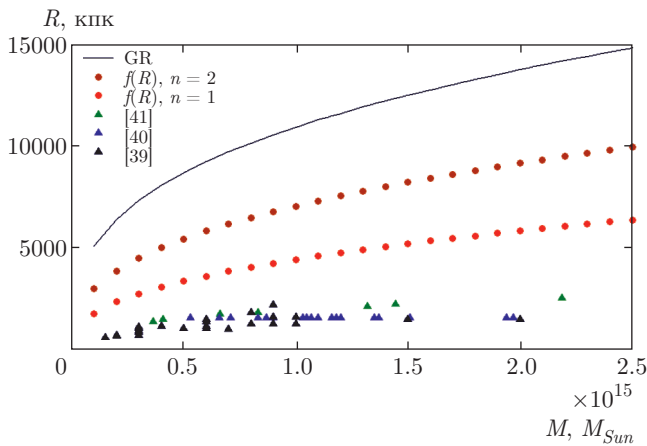


Рис. 5. (В цвете онлайн) Сравнение теоретических значений радиуса разворота с полученными из наблюдений за массами скоплений. Сплошная кривая — значения, даваемые ОТО. Значения для моделей Старобинского с $n = 1$ и $n = 2$ обозначены круглыми точками, значения для $n = 2$ — сверху. Реальные данные обозначены треугольниками

ний. В результате установлено, что зависимость радиуса разворота от массы объекта для модели Старобинского слабо отличается от полученной в рамках ОТО. Установлено, что радиус разворота возрастает с увеличением параметра n для всех значений масс. Наблюдательные данные о размерах скоплений были получены из профилей плотности, построенных методом гравитационного линзирования. Но несмотря на то, что некоторые модели давали значительно меньший по сравнению с ОТО радиус разворота, ни одна модель не вышла за пределы, заданные наблюдательными данными — 20% от радиуса, даваемого ОТО.

Остается сделать вывод, что достигнутый уровень точности наблюдений галактик не позволяет получить дополнительные ограничения для модели Старобинского с исчезающей космологической постоянной на масштабах скоплений галактик. Таким образом, на существующем уровне точности модель Старобинского $f(R)$ -гравитации, а следовательно, связанные с ней преобразованиями скалярно-тензорные модели не противоречат астрономическим данным на масштабах галактик и их скоплений. Хотим также подчеркнуть перспективность предложенного в работе метода для проверки других моделей расширенной гравитации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00682). Авторы выражают признательность М. С. Пширкову за интересное обсуждение и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Clifford, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014).
2. B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
3. B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).
4. V. M. Lipunov, K. A. Postnov, and M. E. Prokhorov, New Astron. **2**, 43 (1997).
5. V. M. Lipunov, K. A. Postnov, and M. E. Prokhorov, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **288**, 245 (1997).
6. P. A. R. Ade et al., Astron. Astrophys. **594**, A13 (2016).
7. Я. Б. Зельдович, УФН **95**, 209 (1968) [Ya. B. Zel'dovich, Sov. Phys. Usp. **11**, 381 (1968)].
8. S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
9. M. H. Goroff and A. Sagnotti, Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986).
10. C. P. Burgess, Living Rev. Rel. **7**, 5 (2004).
11. A. D. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008).
12. S. Capozziello and M. De Laurentis, Phys. Rep. **509**, 167 (2011).
13. T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, Phys. Rep. **513**, 1 (2012).
14. E. Berti et al., Class. Quant. Grav. **32**, 243001 (2015).
15. A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).
16. V. Faraoni, Phys. Rev. D **72**, 124005 (2005).
17. A. A. Starobinsky, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **86**, 183 (2007) [JETP Lett. **86**, 157 (2007)].
18. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).
19. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **576**, 5 (2003).
20. S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. **40**, 357 (2008).
21. C. Charmousis, Lect. Notes Phys. **892**, 25 (2015).
22. J. Ntahompagaze, A. Abebe, and M. Mbonye, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **14**(07), 1750107 (2017).
23. G. Byrd, A. Chernin, P. Teerikorpi, and M. Valtonen, De Gruyter Stud. Math. Phys. **28** (2015); arXiv: 1411.5860.

24. G. Byrd, A. D. Chernin, P. Teerikorpi, and M. Valtonen, *Paths to Dark Energy*, Vol. 2, De Gruyter, Berlin (2012).
25. А. Д. Чернин, Письма в ЖЭТФ **98**, 394 (2013) [A. D. Chernin, JETP Lett. **98**, 353 (2013)].
26. A. D. Chernin, N. V. Emelyanov, and I. D. Karachentsev, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **449**, 2069 (2015).
27. R. Nandra, A. N. Lasenby, and M. P. Hobson, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **422**, 2931 (2012).
28. V. Faraoni, Phys. Dark Univ. **11**, 11 (2016).
29. I. D. Karachentsev, R. B. Tully, Po-Feng Wu, E. J. Shaya, and A. E. Dolphin, Astrophys. J. **782**, 4 (2014).
30. V. Pavlidou and T. N. Tomaras, JCAP **1409**, 020 (2014).
31. J. Kormendy, D. B. Fisher, M. E. Cornell, and R. Bender, Astrophys. J. Suppl. **182**, 216 (2009).
32. B. Binggeli, Astron. Astrophys. **107**, 338 (1982).
33. A. I. Zabludoff and M. J. Geller, Astron. J. **107**, 1929 (1994).
34. S. Capozziello, A. Stabile, and A. Troisi, Phys. Rev. D **76**, 104019 (2007).
35. T. Multamaki and I. Vilja, Phys. Rev. D **74**, 064022 (2006).
36. T. Multamaki and I. Vilja, Phys. Rev. D **76**, 064021 (2007).
37. R. E. Bank et al., IEEE Trans. Electron Dev. **39**, 1031 (1983).
38. G. M. Eadie and W. E. Harris, Astrophys. J. **829**, 108 (2016).
39. A. Zitrin et al., Astrophys. J. **801**, 44 (2015).
40. K. Umetsu et al., Astrophys. J. **795**, 163 (2014).
41. A. B. Newman, T. Treu, R. S. Ellis, D. J. Sand, C. Nipoti, J. Richard, and E. Jullo, Astrophys. J. **765**, 24 (2013).