

ДИНАМИКА ДИПОЛЯРИТОННОГО ОПТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МИКРОРЕЗОНАТОРЕ

П. И. Хаджи^b, О. Ф. Васильева^{a}, И. В. Белоусов^b*

^a *Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
МД 3300, Тирасполь, Молдова*

^b *Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
МД 2800, Кишинев, Молдова*

Поступила в редакцию 26 апреля 2017 г.

Изучена динамика диполяритонных состояний в планарном микрорезонаторе при накачке состояния, отвечающего средней диполяритонной ветви. Показано, что в условиях точного резонанса имеют место как периодический, так и аperiodический режимы превращения диполяритонов накачки в диполяритоны холостых и сигнальных мод. Изучен также периодический режим конверсии диполяритонов сигнальных и холостых мод без участия диполяритонов накачки на средней ветви.

DOI: 10.7868/S0044451018020013

1. ВВЕДЕНИЕ

Смешанные экситон-фотонные состояния в планарных полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных состояний с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора, в результате чего формируются верхняя и нижняя микрорезонаторные экситон-поляритонные моды. Большой интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. Такие нелинейности были обнаружены в спектрах люминесценции микрорезонаторов [14–19] при резонансном возбуждении нижней поляритонной ветви, которые объясняются параметрическим рассеянием фотовозбужденных поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды. Используя метод накачки-зондирования (pump-probe-method), в работах [8, 9] впервые наблюдалось параметрическое усиление в микрорезонаторе, а в [9, 14] —

режим параметрического осциллятора при накачке нижней поляритонной ветви. В работах [20–24] теоретически изучена динамика параметрического экситон-поляритонного осциллятора в микрорезонаторе, которая представляет собой периодические превращения пар поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод и обратно. Показано, что период и амплитуда колебаний существенно зависят от начальной плотности поляритонов.

Наряду с экситон-поляритонами в работах [25–30] впервые наблюдалась новая квазичастица — диполяритон — бозонная частица, которая образуется в связанных двойных квантовых ямах в микрорезонаторе. По сравнению с экситон-поляритоном диполяритон представляет собой суперпозицию фотона микрорезонатора, прямого и непрямого экситонов. Здесь прямой экситон является связанным состоянием электронно-дырочной пары одной и той же ямы, а не прямой экситон образуется путем связывания электрона и дырки соседних ям. Обычно не прямой экситон слабо связан со светом из-за слабого перекрытия волновых функций электрона и дырки. Однако если использовать асимметричные квантовые ямы, то подбором электрического поля можно обеспечить сильную связь всех трех компонент. Связанное состояние фотона микрорезонатора с прямым и непрямым экситонами приводит к формированию собственных мод системы с тремя

* E-mail: florina_of@mail.ru

ветвями закона дисперсии, нижней, средней и верхней диполяритонными ветвями [31]. Благодаря большому дипольному моменту диполяритона он был предложен в качестве идеальной квазичастицы для генерации терагерцевого излучения [32–37]. Недавно диполяритоны были реализованы также и в широкой, отдельно взятой, квантовой яме, вставленной в диэлектрический волновод [38]. Однако несмотря на значительный экспериментальный успех в исследовании диполяритонов, в настоящее время отсутствует строгое теоретическое рассмотрение их физических свойств [39–41]. Поэтому дальнейшие исследования в этой области являются актуальными. В работе [42] показано, что оптическая нелинейность в системе экситон-поляритонов и диполяритонов, обусловленная интерактивной связью, превышает по величине нелинейность, обусловленную поляритон-поляритонным взаимодействием.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель данной работы — изучить динамику диполяритонных возбуждений в режиме параметрического осциллятора на временах, меньших времени релаксации возбуждений. Существенный интерес представляет исследование поведения диполяритонов в нестационарном режиме, когда накачка осуществляется фемтосекундным импульсом лазерного излучения. В этом случае можно считать, что ультракороткие импульсы возбуждения служат лишь для создания начальных плотностей диполяритонов. Затем система предоставляется самой себе и эволюционирует во времени. Такая постановка задачи используется и при исследовании явления оптической нутации в пространственно-однородной системе двухуровневых атомов [37] либо экситонов [43, 44]. Мы считаем, что с помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных диполяритонов. Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования диполяритонов. Квантовая яма вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропусканием, отражением и потерями [30–37, 45]. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации вторичных субимпульсов излучения.

Рассмотрим ситуацию, когда диполяритоны большой плотности возбуждаются на средней ветви

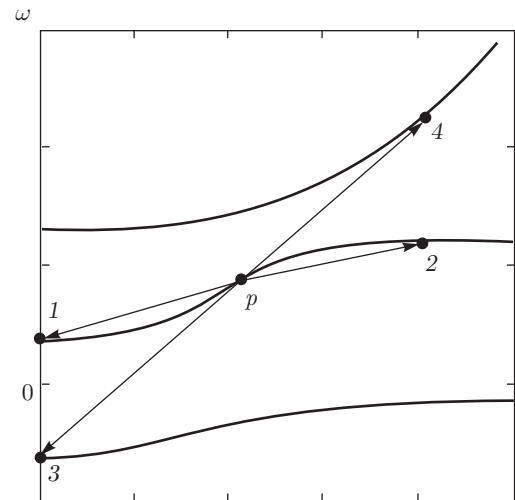


Рис. 1. Энергетическая схема диполяритонов

закон дисперсии (рис. 1) мощным импульсом лазерного излучения (накачка) [31]. В результате возникает параметрическое рассеяние диполяритонов накачки и генерация диполяритонов сигнальной и холостой мод. При этом возможны три канала рассеяния диполяритонов, удовлетворяющие законам сохранения энергии и импульса [31]. Один из них — это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием диполяритонов сигнальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии: $2\mathbf{k}_p \leftrightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Другой канал — это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием сигнального диполяритона на нижней ветви и холостого диполяритона на верхней ветви закона дисперсии: $2\mathbf{k}_p \leftrightarrow \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. При этом \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2) не обязательно равен \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_4). Наконец, третий канал — это рассеяние сигнального и холостого диполяритонов средней ветви в сигнальный диполяритон нижней ветви и холостой диполяритон верхней ветви: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. При больших уровнях возбуждения плотности диполяритонов на указанных модах могут быть достаточно большими. Переходы по каждому из указанных каналов могут происходить как в прямом, так и в обратном направлениях. Это и определяет динамику изменения плотностей диполяритонов на каждой моде. Гамильтониан взаимодействия, описывающий процесс параметрического рассеяния диполяритонов накачки (рис. 1) в диполяритоны сигнальной и холостой мод, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & \hbar g_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 \right) + \\ & + \hbar g_2 \left(\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_4 \right) + \\ & + \hbar g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right), \quad (1) \end{aligned}$$

где g_1, g_2, g — константы взаимодействия по каждому каналу рассеяния, \hat{a}_p и \hat{a}_i ($i = 1, \dots, 4$) — операторы уничтожения диполяритонов накачки, а также сигнальной ($i = 1, 3$) и холостой ($i = 2, 4$) мод соответственно.

Используя (1), легко получить систему гейзенберговских уравнений для операторов \hat{a}_p и \hat{a}_i ($i = 1, \dots, 4$). Усредняя эту систему и используя приближение среднего поля (mean field approximation), для комплексных амплитуд диполяритонов $a_p = \langle \hat{a}_p \rangle$, $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$ ($i = 1, \dots, 4$) получаем следующую систему эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_p &= \omega_p a_p + 2g_1 a_p^* a_1 a_2 + 2g_2 a_p^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_1 &= \omega_1 a_1 + g_1 a_2^* a_p a_p + g a_2^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_2 &= \omega_2 a_2 + g_1 a_1^* a_p a_p + g a_1^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_3 &= \omega_3 a_3 + g_2 a_4^* a_p a_p + g a_4^* a_1 a_2, \\ i\dot{a}_4 &= \omega_4 a_4 + g_2 a_3^* a_p a_p + g a_3^* a_1 a_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω_p, ω_i ($i = 1, \dots, 4$) — собственные частоты диполяритонов. В условиях точного резонанса, когда $2\omega_p = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$, решения этих уравнений ищем в виде $a_p = A_p \exp(i\varphi_p)$, $a_i = A_i \exp(i\varphi_i)$ ($i = 1, \dots, 4$), где A_p, A_i и φ_p, φ_i — действительные амплитуды и фазы. В результате мы получаем систему нелинейных эволюционных уравнений для амплитуд и разностей фаз:

$$\begin{aligned} \dot{A}_p &= -2g_1 A_p A_1 A_2 \sin \theta_{12} - 2g_2 A_p A_3 A_4 \sin \theta_{34}, \\ \dot{A}_1 &= g_1 A_p^2 A_2 \sin \theta_{12} + g A_2 A_3 A_4 \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{A}_2 &= g_1 A_p^2 A_1 \sin \theta_{12} + g A_1 A_3 A_4 \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{A}_3 &= g_2 A_p^2 A_4 \sin \theta_{34} - g A_1 A_2 A_4 \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{A}_4 &= g_2 A_p^2 A_3 \sin \theta_{34} - g A_1 A_2 A_3 \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{12} &= g_1 \left(\frac{A_p^2 (A_1^2 + A_2^2)}{A_1 A_2} - 4A_1 A_2 \right) \cos \theta_{12} - \\ & - 4g_2 A_3 A_4 \cos \theta_{34} + g A_3 A_4 \frac{A_1^2 + A_2^2}{A_1 A_2} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{34} &= g_2 \left(\frac{A_p^2 (A_3^2 + A_4^2)}{A_3 A_4} - 4A_3 A_4 \right) \cos \theta_{34} - \\ & - 4g_1 A_1 A_2 \cos \theta_{12} + g A_1 A_2 \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_3 A_4} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta_{12} = 2\varphi_p - \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta_{34} = 2\varphi_p - \varphi_3 - \varphi_4$.

Вводя далее плотности диполяритонов $N_p = A_p^2$, $N_j = A_j^2$ ($j = 1, 2, 3, 4$), приходим к следующей системе нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{N}_p &= -4g_1 N_p \sqrt{N_1 N_2} \sin \theta_{12} - \\ & - 4g_2 N_p \sqrt{N_3 N_4} \sin \theta_{34}, \\ \dot{N}_1 &= \dot{N}_2 = 2g_1 N_p \sqrt{N_1 N_2} \sin \theta_{12} + \\ & + 2g \sqrt{N_1 N_2 N_3 N_4} \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{N}_3 &= \dot{N}_4 = 2g_2 N_p \sqrt{N_3 N_4} \sin \theta_{34} - \\ & - 2g \sqrt{N_1 N_2 N_3 N_4} \sin(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{12} &= g_1 \left(-4\sqrt{N_1 N_2} + N_p \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1 N_2}} \right) \cos \theta_{12} - \\ & - 4g_2 \sqrt{N_3 N_4} \cos \theta_{34} + \\ & + g \sqrt{N_3 N_4} \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1 N_2}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{34} &= g_2 \left(-4\sqrt{N_3 N_4} + N_p \frac{N_3 + N_4}{\sqrt{N_3 N_4}} \right) \cos \theta_{34} - \\ & - 4g_1 \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta_{12} + \\ & + g \sqrt{N_1 N_2} \frac{N_3 + N_4}{\sqrt{N_3 N_4}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что вклад в динамику диполяритонов в уравнениях (2)–(4) вносят только слагаемые, соответствующие индуцированным переходам между различными диполяритонными состояниями. При больших уровнях возбуждения именно эти слагаемые являются определяющими. Считаем, что характерные времена спонтанных процессов намного больше характерных времен индуцированных переходов, так что за время протекания индуцированных переходов спонтанные переходы не успевают произойти. Поэтому далее мы ими пренебрегаем.

Дополним систему (4) начальными условиями: $N_p|_{t=0} = N_{p0}$, $N_j|_{t=0} = N_{j0}$ ($j = 1, \dots, 4$), $\theta_{12}|_{t=0} = \theta_{12,0}$, $\theta_{34}|_{t=0} = \theta_{34,0}$. Из (4) удается получить следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} N_p + 2(N_1 + N_3) &= N_{p0} + 2(N_{10} + N_{30}), \\ N_2 - N_1 = N_{20} - N_{10}, \quad N_4 - N_3 &= N_{40} - N_{30}, \\ g_1 N_p \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta_{12} + g_2 N_p \sqrt{N_3 N_4} \cos \theta_{34} + \\ & + g \sqrt{N_1 N_2 N_3 N_4} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}) = \\ & = g_1 N_{p0} \sqrt{N_{10} N_{20}} \cos \theta_{12,0} + \\ & + g_2 N_{p0} \sqrt{N_{30} N_{40}} \cos \theta_{34,0} + \\ & + g \sqrt{N_{10} N_{20} N_{30} N_{40}} \cos(\theta_{12,0} - \theta_{34,0}), \end{aligned} \quad (5)$$

которые представляют собой законы сохранения чисел частиц в системе и закон сохранения энергии.

Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений (4) в общем случае не представляется возможным. Поэтому далее рассмотрим ряд частных случаев. Из (4) видно, что если начальные условия для диполяритонов сигнальной и холостой мод по одному и тому же каналу одинаковы (например, $N_{10} = N_{20}$ или $N_{30} = N_{40}$), то из интегралов движения следует, что и далее со временем имеет место совпадение мгновенных плотностей диполяритонов сигнальной и холостой мод: $N_1 = N_2$ либо $N_3 = N_4$. В самом деле, полагая $N_{30} = N_{40}$, из (4) получаем дифференциальное уравнение для N_3 , формальное решение которого дается выражением

$$N_3(t) = N_{30} \exp \left\{ 2 \int_0^t dt' \left(g_2 N_p(t') \sin \theta_{34}(t') - g \sqrt{N_1(t') N_2(t')} \sin (\theta_{12}(t') - \theta_{34}(t')) \right) \right\}. \quad (6)$$

Если теперь рассматривать решения системы уравнений при $N_{30} = N_{40} = 0$, то отсюда получаем $N_3(t) = N_4(t) = 0$. Система уравнений (4), (5) при этом значительно упрощается и приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{N}_p &= -4g_1 N_p \sqrt{N_1 N_2} \sin \theta_{12}, \\ \dot{N}_1 &= \dot{N}_2 = 2g_1 N_p \sqrt{N_1 N_2} \sin \theta_{12}, \\ \dot{\theta}_{12} &= g_1 \left(-4\sqrt{N_1 N_2} + N_p \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1 N_2}} \right) \cos \theta_{12}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя эти уравнения, получаем интегралы движения

$$\begin{aligned} N_p + 2N_1 &= N_{p0} + 2N_{10}, \\ N_2 - N_1 &= N_{20} - N_{10}, \\ \cos \theta_{12} &= \frac{N_{p0} \sqrt{N_{10} N_{20}}}{N_p \sqrt{N_1 N_2}} \cos \theta_{12,0} \end{aligned} \quad (8)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию плотности диполяритонов $N_1(t)$:

$$\frac{dN_1}{dt} = \pm 2g_1 \{ N_1 (N_1 + N_{20} - N_{10}) (N_{p0} + 2N_{10} - 2N_1)^2 - N_{p0}^2 N_{10} N_{20} \cos^2 \theta_{12,0} \}^{1/2}. \quad (9)$$

Аналогичным образом при $N_{10} = N_{20} = 0$ можно получить нелинейное дифференциальное уравнение для плотности диполяритонов $N_3(t)$.

Также можно убедиться в том, что первое из уравнений (4) имеет формальное решение

$$\begin{aligned} N_p(t) &= \\ &= N_{p0} \exp \left(-4g_1 \int_0^t \sqrt{N_1(t') N_2(t')} \sin \theta_{12}(t') dt' - \right. \\ &\quad \left. - 4g_2 \int_0^t \sqrt{N_3(t') N_4(t')} \sin \theta_{34}(t') dt' \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где N_{p0} — начальная плотность диполяритонов накачки. Отсюда видно, что если в начальный момент времени ($t = 0$) плотность диполяритонов накачки N_{p0} равна нулю, то и в дальнейшем в процессе эволюции системы диполяритоны накачки не возникнут ($N_p(t) = 0$), хотя плотности диполяритонов сигнальных и холостых мод могут быть отличными от нуля и даже могут изменяться во времени. Таким образом, в условиях, когда $N_{p0} = 0$, система уравнений (4) упрощается и приводит к двум новым, дополнительным интегралам движения:

$$\begin{aligned} N_1 + N_3 &= N_{10} + N_{30}, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{N_{10} N_{20} N_{30} N_{40}}{N_1 N_2 N_3 N_4}} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\theta = \theta_{12} - \theta_{34} = \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2$ — полная разность фаз, а θ_0 — начальная разность фаз. Отсюда видно, что если в начальный момент времени $\theta_0 = \pm(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то разность фаз $\theta(t)$ остается постоянной, равной θ_0 , тогда как плотности диполяритонов изменяются во времени. Точно так же, если какая-то из начальных плотностей диполяритонов $N_{10}, N_{20}, N_{30}, N_{40}$ равна нулю, то $\cos \theta = 0$ и, следовательно, разность фаз $\theta(t)$ сохраняется во времени.

Используя (4), (5) и (11), легко получить замкнутое нелинейное дифференциальное уравнение для $N_1(t)$ (при $N_{p0} = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \pm 2g \{ N_1 (N_1 - N_{10} + N_{20}) (N_1 - N_{10} - N_{30}) \times \\ &\times (N_1 - N_{10} - N_{40}) - N_{10} N_{20} N_{30} N_{40} \cos^2 \theta_0 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. ДИНАМИКА ДИПОЛЯРИТОННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ $N_{30} = N_{40} = 0$

Рассмотрим теперь решения уравнения (9) и изучим особенности временной эволюции плотности диполяритонов $N_1(t)$ для случая $N_{30} = N_{40} = 0$. Представим (9) в виде $\dot{N}^2 + W = E_0^2$, где потенциальная $W(N_1)$ и полная E_0 энергии эквивалентного нелинейного осциллятора равны

$$W = -16g_1^2 N_1 (N_{20} - N_{10} + N_1) \times \left(N_1 - N_{10} - \frac{1}{2} N_{p0} \right)^2, \quad (13)$$

$$E_0 = -4g_1^2 N_{10} N_{20} N_{p0}^2 \cos^2 \theta_{12,0}.$$

Из формул (9) и (13) видно, что особенности эволюции плотности диполяритонов $N_1(t)$ определяются начальными плотностями N_{10} , N_{20} и N_{p0} , начальной разностью фаз $\theta_{12,0}$, а также направлением изменения начальной скорости $\dot{N}_1(t)|_{t=0}$, т. е. знаками «+» и «-» в (9). Если начальная разность фаз $\theta_{12,0} = \pm(2n+1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то мгновенная разность фаз $\theta_{12}(t)$ в процессе эволюции сохраняется равной $\theta_{12,0}$. Поэтому сначала мы рассмотрим наиболее простой случай эволюции, когда $\theta_{12,0} = \pm(2n+1)\pi/2$. В этом случае полная энергия E_0 нелинейного осциллятора равна нулю. На рис. 2 представлены зависимости потенциальной энергии W от плотности диполяритонов. Видно, что уравнение $W(N_1) = 0$ имеет двукратный корень $N_1 = N_{10} + N_{p0}/2$. Поэтому временная эволюция функции $N_1(t)$ является аperiодической. Решение уравнения (9) при $N_{10} \geq N_{20}$ имеет вид

$$N_1(t) = \left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) (N_{10} - N_{20}) \left\{ N_{10} - N_{20} + \left(N_{20} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) \times \operatorname{sch}^2 \left(g_1 \sqrt{(N_{p0} + 2N_{10})(N_{p0} + 2N_{20})} t \pm \varphi_0 \right) \right\}^{-1}, \quad (14)$$

где фаза φ_0 определяется равенством

$$\varphi_0 = \operatorname{arch} \sqrt{\frac{N_{10}}{N_{p0}} \frac{N_{p0} + 2N_{20}}{N_{10} - N_{20}}}. \quad (15)$$

Из (14) и рис. 3 видно, что решение со знаком «+» перед фазой φ_0 монотонно растет со временем от значения $N_1 = N_{10}$ до предельного значения $N_{10} + N_{p0}/2$. Это соответствует движению изображающей точки на рис. 2а вправо от начального положения (точка N_{10}) до точки, являющейся двукратным корнем уравнения $W(N_1) = 0$, которая достигается за бесконечно большое время. Если рассматривать решение со знаком «-» перед фазой φ_0 в (14), то из рис. 3 видно, что плотность диполяритонов $N_1(t)$ сначала убывает со временем от значения N_{10} до минимального значения $N_{10} - N_{20}$, которое достигается в момент времени

$$t = t_{min} = \varphi_0 \left\{ g_1 \sqrt{(N_{p0} + 2N_{10})(N_{p0} + 2N_{20})} \right\}^{-1}, \quad (16)$$

затем начинает расти и монотонно стремится к предельному значению $N_{10} + N_{p0}/2$. Такое поведение функции $N_1(t)$ обусловлено тем, что при знаке «-» изображающая точка на рис. 2а сначала движется влево, доходит до точки поворота траектории $N_{10} - N_{20}$, после чего направление движения изменяется и изображающая точка стремится, как и ранее, к

двукратному корню $N_{10} + N_{p0}/2$. Таким образом, на больших временах решение $N_1(t)$ как со знаком «+», так и со знаком «-» перед фазой φ_0 в (14) стремится к определенному значению плотности диполяритонов $N_{10} + N_{p0}/2$, чем эволюция и завершается. При этом исходные диполяритоны накачки N_{p0} попарно превращаются в диполяритоны сигнальной и холостой мод. Обратная эволюция, т. е. эволюция с истощением диполяритонов сигнальной и холостой мод, невозможна в силу квантового механизма стимулирования. Как только $N_p(t)$ стало равным нулю, то, как видно из (7), $\dot{N}_p = \dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$. Характерное время t_{min} определяется начальными плотностями диполяритонов и монотонно убывает с ростом $N_{10} - N_{20}$.

Рассматривая решение для $N_1(t)$ в случае, когда $N_{20} = 0$, из (14) получаем

$$N_1 = N_{10}(N_{p0} + 2N_{10}) \left(2N_{10} + N_{p0} \times \operatorname{sch}^2 \left(g_1 \sqrt{N_{p0}(N_{p0} + 2N_{10})} t \right) \right)^{-1}. \quad (17)$$

В этом случае функция $N_1(t)$ монотонно возрастает со временем от N_{10} до предельного значения $N_{10} + N_{p0}/2$.

В случае, если $N_{10} < N_{20}$, решение для функции $N_1(t)$ имеет вид

$$N_1 = \left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) (N_{20} - N_{10}) \left\{ N_{20} - N_{10} + \left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{csch}^2 \left(g_1 \sqrt{(N_{p0} + 2N_{10})(N_{p0} + 2N_{20})} t \pm \psi_0 \right) \right\}^{-1}, \quad (18)$$

где ψ_0 определяется равенством

$$\psi_0 = \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{N_{10}}{N_{p0}} \frac{N_{p0} + 2N_{10}}{N_{20} - N_{10}}}. \quad (19)$$

Из рис. 2б и рис. 3б видно, что в этом случае решение со знаком «+» в (19) монотонно возрастает с ростом t от начального значения N_{10} до предельного значения $N_{10} + N_{p0}/2$. Что касается решения со знаком «-», то оно сначала монотонно убывает от N_{10} до нуля, который достигается в момент времени t_0 , равный

$$t_0 = \psi_0 \left\{ g_1 \sqrt{(N_{p0} + 2N_{10})(N_{p0} + 2N_{20})} \right\}^{-1}, \quad (20)$$

после чего оно начинает расти и асимптотически приближается снизу к предельному значению $N_{10} + N_{p0}/2$. Таким образом, и при $N_{10} < N_{20}$ эволюция системы на больших временах завершается полным истощением моды накачки и превращением диполяритонов накачки в диполяритоны холостой и сигнальной мод.

Из формул (14) и (18) в пределе $N_{10} = N_{20}$ получаем решение

$$N_1 = \frac{N_{10}(N_{p0} + 2N_{10})}{2N_{10} + N_{p0} \exp(\pm 2g_1(N_{p0} + 2N_{10})t)}. \quad (21)$$

В этом случае эволюция системы также является аperiodической. Плотность диполяритонов $N_1(t)$ асимптотически стремится либо к $N_1 = 0$, либо к предельному значению $N_{10} + N_{p0}/2$ (рис. 3в) в зависимости от направления начальной скорости изменения функции $N_1(t)|_{t=0}$. Этот же результат следует и из графика потенциальной энергии (рис. 2в). Времена t_{min} и t_0 обращаются в бесконечность. Следовательно, временная эволюция системы при $N_{10} = N_{20}$ сводится к тому, что либо все диполяритоны накачки превращаются в диполяритоны сигнальной

и холостой мод, либо диполяритоны сигнальной и холостой мод превращаются в диполяритоны накачки, чем эволюция и завершается.

Отметим здесь, что если $N_{p0} = 0$, то потенциальная энергия $W(N_1)$ имеет максимум при $N_1 = N_{10}$, причем $W(N_1) = 0$. Следовательно, изображающая точка не может сойти с вершины максимума и эволюционировать. Так что при $N_{p0} = 0$, но $N_{10} \neq 0$ и $N_{20} \neq 0$, система не эволюционирует.

Представим теперь решения при начальной разности фаз $\theta_{12,0} = 0$ ($k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$), сохраняя по-прежнему условие $N_{30} = N_{40} = 0$. Из (13) следует, что в этом случае одним из четырех действительных корней уравнения $W(N_1) = E_0$ является корень $N_1 = N_{10}$. Оказывается, что этот корень является двукратным при выполнении условия

$$N_{p0}(N_{10} + N_{20}) = 4N_{10}N_{20}. \quad (22)$$

Обозначим четыре корня уравнения $W(N_1) = E_0$ через α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и расположим их в порядке убывания: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$. Тогда, если $N_{p0}(N_{10} + N_{20}) > 4N_{10}N_{20}$, то корни располагаются в порядке $\alpha_1 > N_{10} > \alpha_3 > \alpha_4$, а если $N_{p0}(N_{10} + N_{20}) < 4N_{10}N_{20}$, то $\alpha_1 > \alpha_2 > N_{10} > \alpha_4$. В частности, если $N_{10} = N_{20}$, то корни выражаются формулами

$$\alpha_{1,4} = \frac{1}{2} \left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \pm \sqrt{\left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \right)^2 + 2N_{10}N_{p0}} \right),$$

$$\alpha_{2,3} = \max, \min(N_{10}, N_{p0}/2).$$

Зная корни α_i ($i = 1, 2, 3, 4$), легко получить решение уравнения для плотности диполяритонов $N_1(t)$, которое имеет вид

$$N_1(t) = \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_4) - \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right)}{\alpha_2 - \alpha_4 - (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right)}. \quad (23)$$

Здесь $\operatorname{sn}(\varphi)$ — эллиптический синус, $K(k)$ и $F(\varphi_0, k)$ — соответственно полный и неполный эллиптические интегралы с модулем k и параметром φ_0 [46, 47], равными

$$k^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{\alpha_2 - \alpha_3} \frac{N_{10} - \alpha_3}{N_{10} - \alpha_4}}.$$

Отсюда видно, что, в отличие от случая $\theta_{12,0} = \pi/2$, плотность диполяритонов $N_1(t)$ при $\theta_{12,0} = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) изменяется со временем периодически с амплитудой A и периодом T , равными

$$A = \alpha_2 - \alpha_3, \quad T = \frac{K(k)}{g_1 \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}. \quad (24)$$

На рис. 4а представлена временная эволюция плотности диполяритонов N_1 в зависимости от начальной плотности диполяритонов N_{10} . Из рис. 4 и формул (23), (24) видно, что диполяритоны сигнальной (холостой) моды средней ветви закона дисперсии периодически превращаются в диполяритоны накачки и обратно. Если $N_{20} = N_{10} = N_{p0}/2$, то $\alpha_2 = \alpha_3 = N_{10}$ и решение сводится к $N_1(t) = N_{10} = \text{const}$, причем в этом пределе период осцилляций T отличен от нуля и равен $T = \pi/(4g_1 N_{10})$, т. е. наблюдается покой системы (колебание с нулевой амплитудой). Таким образом, как видно на рис. 4б, амплитуда колебаний плотности диполяритонов N_1 при увеличении начальной плотности диполяритонов N_{10} сначала монотонно уменьшается, при $N_{20} = N_{10} = N_{p0}/2$ равна нулю, а затем при увеличении начальной плотности диполяритонов N_{10} монотонно увеличивается. Что касается периода T колебаний плотности диполяритонов N_1 , то он монотонно уменьшается с ростом N_{10} (рис. 4).

При $N_{20} < N_{10}$ корни уравнения $W(N_1) = E_0$ изменяются. Из (13) видно, что в этом случае $N_1 = N_{10}$ также является одним из корней этого уравнения. Сохраняя порядок корней ($\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$), в качестве решения для функции $N_1(t)$ снова приходим к формуле (23). Более того, качественно решение (23) сохраняется и при $N_{20} > N_{10}$.

В общем случае, когда значение $\theta_{12,0}$ произвольно, уравнение $W(N_1) = E_0$ по-прежнему имеет четыре действительных корня ($\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$), зависящих теперь не только от начальных плотностей N_{10} , N_{20} и N_{p0} , но также и от начальной разности фаз $\theta_{12,0}$, причем при $\theta_{12,0} \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $N_1 = N_{10}$ уже не является корнем. Следовательно,

колебание функции $N_1(t)$ с нулевой амплитудой теперь отсутствует. Таким образом, и в этом, более общем, случае колебания функции $N_1(t)$ также определяются формулой (23).

На рис. 5 видно, что, как было показано ранее, при $\theta_{12,0} = \pm(2n+1)\pi/2$ наблюдается аperiodический режим эволюции плотности диполяритонов сигнальной (холостой) моды. При $\theta_{12,0} \neq \pm(2n+1)\pi/2$ будет наблюдаться периодическое превращение диполяритонов сигнальной (холостой) моды в диполяритоны накачки и обратно. Что касается амплитуды колебаний плотности диполяритонов, то она вначале увеличивается, достигая своего максимального значения, затем уменьшается.

4. ДИНАМИКА ДИПОЛЯРИТОННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ $N_{p0} = 0$

Рассмотрим теперь эволюцию системы диполяритонов в случае, когда начальная плотность диполяритонов накачки равна нулю ($N_{p0} = 0$). Тогда из формулы (12) видно, что эволюция системы существенно определяется начальными плотностями диполяритонов N_{10} , N_{20} , N_{30} и N_{40} и начальной разностью фаз θ_0 . Рассмотрим сначала подробнее эволюцию системы при начальной разности фаз $\theta_0 = (2n+1)\pi/2$ ($n = 0, 1, \dots$). В этом случае, как следует из (12), разность фаз $\theta(t)$ остается постоянной во времени, равной θ_0 , тогда как плотности диполяритонов $N_j(t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) изменяются во времени. Точно так же, если какая-то из начальных плотностей диполяритонов N_{j0} равна нулю, то разность $\theta(t)$ оказывается кратной нечетному числу $\pi/2$, т. е. она и в этом случае не изменяется со временем. Поэтому далее мы рассмотрим более простой случай эволюции системы при $N_{p0} = 0$ и $\theta_0 = (2n+1)\pi/2$ ($n = 0, 1, \dots$). Исходя из (4)–(7), легко получить замкнутое нелинейное эволюционное уравнение, например, для функции $N_1(t)$, которое имеет вид

$$\frac{dN_1}{dt} = \pm 2g \{ N_1(N_1 - N_{10} + N_{20}) \times \\ \times (N_1 - N_{10} - N_{30})(N_1 - N_{10} - N_{40}) \}^{1/2}. \quad (25)$$

Видно, что поведение функции $N_1(t)$ (и всех других функций) определяется только значениями начальных плотностей диполяритонов N_{j0} ($j = 1, 2, 3,$

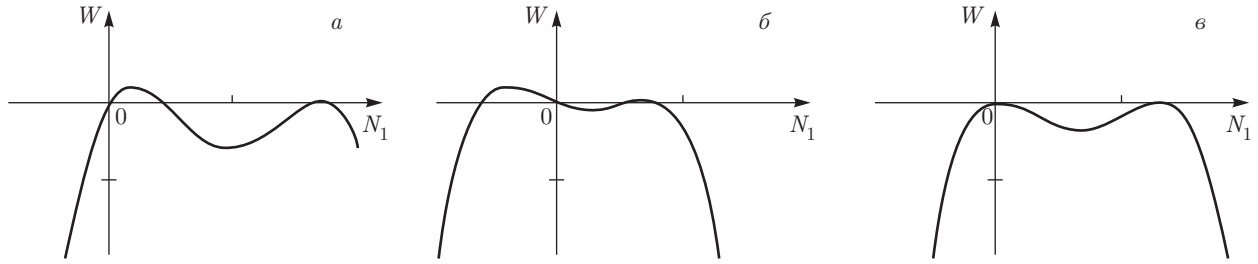


Рис. 2. Зависимости потенциальной энергии эквивалентного нелинейного осциллятора $W(N_1)$ при $N_{30} = N_{40} = 0$, $\theta_{12,0} = \pi/2$ и значениях начальных плотностей: $N_{10} = 0.6, N_{20} = 0.4$ (а), $N_{10} = 0.1, N_{20} = 0.4$ (б), $N_{10} = 0.4, N_{20} = 0.4$ (в). Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

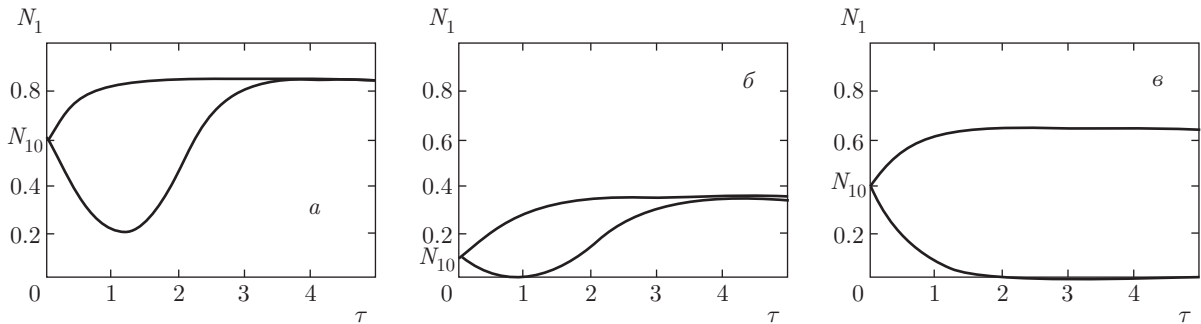


Рис. 3. Временная эволюция плотности диполяритонов $N_1(\tau)$ при $N_{30} = N_{40} = 0$, $\theta_{12,0} = \pi/2$ и значениях начальных плотностей: $N_{10} = 0.6, N_{20} = 0.4$ (а), $N_{10} = 0.1, N_{20} = 0.4$ (б), $N_{10} = 0.4, N_{20} = 0.4$ (в). Здесь $\tau = g_1 t$. Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

4). Пусть $N_{10} < N_{20}$ и $N_{30} < N_{40}$. Тогда решение уравнения (25) имеет вид

$$N_1 = \frac{(N_{20} - N_{10})(N_{30} + N_{10}) \operatorname{sn}^2(2K(k)t/T_1 \pm \varphi_0)}{N_{20} + N_{30} - (N_{30} + N_{10}) \operatorname{sn}^2(2K(k)t/T_1 \pm \varphi_0)}. \quad (26)$$

Здесь $\operatorname{sn}(x)$ — эллиптический синус с модулем k [46, 47], параметром φ_0 и периодом T_1 , которые определяются выражениями

$$k^2 = \frac{(N_{20} + N_{40})(N_{10} + N_{30})}{(N_{10} + N_{40})(N_{20} + N_{30})},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_{10}}{N_{20}} \frac{N_{20} + N_{30}}{N_{10} + N_{30}}}, \quad (27)$$

$$T_1 = \frac{2K(k)}{g\sqrt{(N_{10} + N_{40})(N_{20} + N_{30})}},$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [46, 47] с модулем k . Из (26) видно, что плотность диполяритонов $N_1(t)$ периодически осциллирует со временем в пределах от нуля до максимальной плотности $N_{10} + N_{30}$. Используя полученные в

(7) и (8) интегралы движения, можно утверждать, что все остальные функции также осциллируют во времени с одним и тем же периодом T_1 : $N_2(t)$ периодически изменяются от $N_{20} - N_{10}$ до $N_{20} + N_{30}$, $N_3(t)$ — от нуля до $N_{10} + N_{30}$ и $N_4(t)$ — от $N_{40} - N_{30}$ до $N_{40} + N_{10}$, $N_p(t)$ остается равным нулю. В пределе $N_{10} = 0$ решение (26) упрощается и приводится к виду

$$N_1 = \frac{N_{20}N_{30} \operatorname{sn}^2(2K(k)t/T_1)}{N_{20} + N_{30} \operatorname{cn}^2(2K(k)t/T_1 \pm \varphi_0)}, \quad (28)$$

$$k^2 = \frac{N_{30}}{N_{40}} \frac{N_{20} + N_{40}}{N_{20} + N_{30}},$$

где амплитуда и период соответственно равны

$$A_1 = N_{30}, \quad T_1 = \frac{2K(k)}{g\sqrt{N_{40}(N_{20} + N_{30})}}. \quad (29)$$

При условии, что $N_{10} = N_{20}$ (но по-прежнему $N_{30} < N_{40}$), решение уравнения (25) представляется в виде

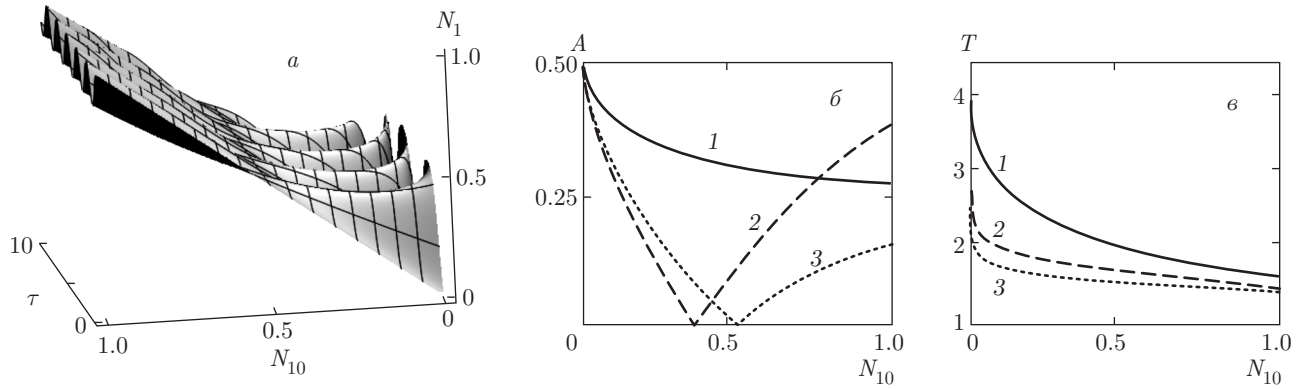


Рис. 4. а) Временная эволюция плотности диполяритонов $N_1(\tau)$ при $\theta_{12,0} = 0$, $N_{20} = 0.5$. Амплитуда (б) и период колебаний (в) при $N_{20} = 0.1$ (1), 0.5 (2), 0.8 (3). Здесь $\tau = g_1 t$. Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

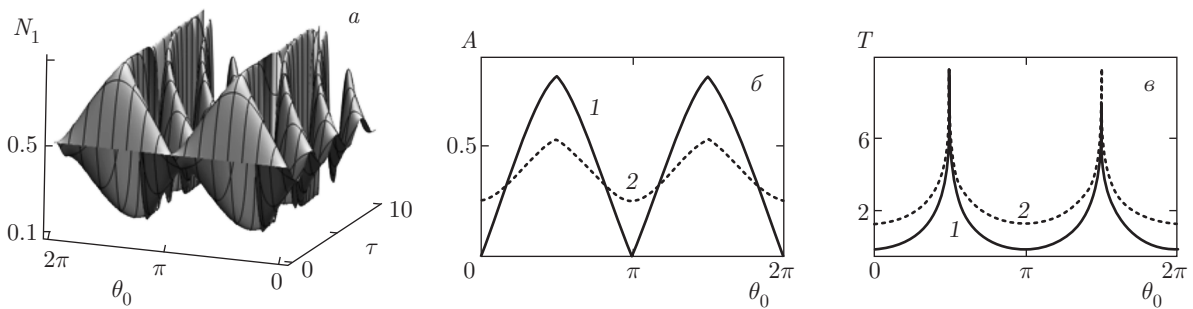


Рис. 5. а) Временная эволюция плотности диполяритонов $N_1(\tau)$ при произвольных значениях θ , $N_{20} = 0.4$, $N_{10} = 0.5$. Амплитуда (б) и период колебаний (в) при $N_{10} = 0.5$, $N_{20} = 0.4$ (1), $N_{10} = 0.1$, $N_{20} = 0.4$ (2). Здесь $\tau = g_1 t$. Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

$$N_1 = (N_{10} + N_{30})(N_{10} + N_{40}) \times \left\{ N_{10} + N_{30} + (N_{40} - N_{30}) \times \operatorname{ch}^2 \left(g \sqrt{(N_{10} + N_{30})(N_{10} + N_{40})} t \pm \psi_0 \right) \right\}^{-1}, \quad (30)$$

где

$$\psi_0 = \operatorname{arch} \sqrt{\frac{N_{40} N_{10} + N_{30}}{N_{10} N_{40} - N_{30}}}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что при $N_{10} = N_{20}$ эволюция системы становится аperiodической. Решение со знаком «+» в аргументе гиперболического косинуса монотонно убывает со временем от значения $N_1 = N_{10}$ до нуля при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что все диполяритоны сигнальных мод N_1 и N_3 со временем превращаются в диполяритоны холостых мод N_2 и N_4 , чем эволюция и завершается. Решение со знаком «-» сначала монотонно возрастает от N_{10} до максималь-

ного значения $N_{10} + N_{30}$, которое достигается в момент времени t_1 , равный

$$t_1 = \operatorname{arch} \left(\sqrt{\frac{N_{40} N_{10} + N_{30}}{N_{10} N_{40} - N_{30}}} \right) / \left(g \sqrt{(N_{10} + N_{30})(N_{10} + N_{40})} \right), \quad (32)$$

после чего монотонно убывает, обращаясь в нуль при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, решение при $N_{10} > N_{20}$ (по-прежнему $N_{30} < N_{40}$) имеет вид

$$N_1 = (N_{10} - N_{20})(N_{10} + N_{30}) \left\{ N_{10} + N_{30} - (N_{20} + N_{30}) \operatorname{sn}^2(2K(k)t/T_1 \pm \varphi_0) \right\}^{-1}, \quad (33)$$

где модуль k эллиптического синуса, фаза φ_0 , амплитуда A_1 и период T_1 колебаний определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{(N_{10} + N_{40})(N_{20} + N_{30})}{(N_{20} + N_{40})(N_{10} + N_{30})}, \\
 \varphi_0 &= \arcsin \sqrt{\frac{N_{20}}{N_{10}} \frac{N_{10} + N_{30}}{N_{20} + N_{30}}}, \\
 A_1 &= N_{20} + N_{30}, \\
 T_1 &= \frac{2K(k)}{g\sqrt{(N_{10} + N_{30})(N_{20} + N_{40})}}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

В этом случае плотность диполяритонов $N_1(t)$ периодически осциллирует с периодом T_1 , изменяясь со временем в пределах от $N_{10} - N_{20}$ до $N_{10} + N_{30}$.

Из полученных результатов и рис. 6 следует, что с ростом N_{10} (при сохранении постоянными N_{20} , N_{30} , N_{40} , причем $N_{30} < N_{40}$) от нуля до $N_{10} \leq N_{20}$ период колебаний T_1 монотонно растет и обращается в бесконечность при $N_{10} = N_{20}$. При дальнейшем увеличении $N_{10} > N_{20}$ период колебаний сначала быстро убывает в окрестности $N_{10} \geq N_{20}$, затем убывание замедляется и при $N_{10} \gg N_{20}$ уменьшение периода колебаний происходит обратно пропорционально квадратному корню из N_{10} по закону

$$T_1 = \frac{2K(k)}{g\sqrt{N_{10}(N_{20} + N_{40})}}, \quad k^2 = \frac{N_{20} + N_{30}}{N_{20} + N_{40}}. \tag{35}$$

Таким образом, изменение плотностей N_{10} и N_{20} (при $N_{30} < N_{40}$) приводит не только к качественному изменению периода колебаний плотностей диполяритонов, но также и к количественному изменению, т. е. к переходу периодического режима в аperiodический и затем снова в периодический режим.

Отметим, что характер эволюции функции $N_1(t)$ существенно зависит также от соотношения между N_{30} и N_{40} . Оказывается, что решения (26) и (33) справедливы и при $N_{30} > N_{40}$. В этом случае в (26) и (33) необходимо заменить везде N_{30} на N_{40} и N_{40} на N_{30} . Что касается случая равенства N_{30} и N_{40} , решение уравнения (25) при $N_{30} = N_{40}$ имеет вид

$$N_1 = \frac{(N_{10} + N_{30})(N_{20} - N_{10}) \operatorname{sh}^2(x)}{N_{10} + N_{30} + (N_{20} - N_{10}) \operatorname{ch}^2(x)}, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}
 x &= g\sqrt{(N_{10} + N_{30})(N_{20} + N_{30})} t \pm \\
 &\pm \operatorname{arch} \left(\sqrt{\frac{N_{20}}{N_{30}} \frac{N_{10} + N_{30}}{N_{20} - N_{10}}} \right),
 \end{aligned}$$

при $N_{10} < N_{20}$ и

$$N_1 = \frac{(N_{10} + N_{30})(N_{10} - N_{20}) \operatorname{ch}^2(x)}{N_{10} + N_{30} + (N_{10} - N_{20}) \operatorname{ch}^2(x)}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
 x &= g\sqrt{(N_{10} + N_{30})(N_{20} + N_{30})} t \pm \\
 &\pm \operatorname{arch} \left(\sqrt{\frac{N_{10}}{N_{30}} \frac{N_{20} + N_{30}}{N_{10} - N_{20}}} \right),
 \end{aligned}$$

при $N_{10} > N_{20}$. Таким образом, изменение отношения N_{30}/N_{40} также приводит к изменению характера эволюции плотности диполяритонов от периодического режима при $N_{30} \neq N_{40}$ к аperiodическому при $N_{30} = N_{40}$.

Отметим также, что в случае, когда $N_{10} = N_{20}$ и $N_{30} = N_{40}$, решение уравнения (25) имеет вид

$$N_1 = \frac{N_{10}(N_{10} + N_{30})}{N_{10} + N_{30} \exp(\pm 2(N_{10} + N_{30})gt)}.$$

Отсюда видно, что решение со знаком «+» в экспоненте монотонно убывает со временем от $N_1 = N_{10}$ до нуля на больших временах, тогда как решение со знаком «-» возрастает от N_{10} до максимальной величины $N_{1 \max} = N_{10} + N_{30}$ на больших временах.

5. ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

Получить аналитические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) при учете эффектов затухания в системе диполяритонов в общем случае при произвольных константах затухания не представляется возможным. Поэтому мы рассмотрим эволюцию системы в случае точного резонанса ($2\omega_p = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$) и одинаковых констант затухания диполяритонов ($\gamma_p = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 \equiv \gamma$). Именно в этом уникальном случае удастся получить точные аналитические решения системы уравнений, аналогичной системе (2):

$$\begin{aligned}
 i\dot{a}_p &= -i\gamma a_p + 2g_1 a_p^* a_1 a_2 + 2g_2 a_p^* a_3 a_4, \\
 i\dot{a}_1 &= -i\gamma a_1 + g_1 a_2^* a_p a_p + g a_2^* a_3 a_4, \\
 i\dot{a}_2 &= -i\gamma a_2 + g_1 a_1^* a_p a_p + g a_1^* a_3 a_4, \\
 i\dot{a}_3 &= -i\gamma a_3 + g_2 a_4^* a_p a_p + g a_4^* a_1 a_2, \\
 i\dot{a}_4 &= -i\gamma a_4 + g_2 a_3^* a_p a_p + g a_3^* a_1 a_2.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Введем новые амплитуды \tilde{a}_p и \tilde{a}_j ($j = 1, \dots, 4$) и новую переменную ξ по формулам

$$a_p = \tilde{a}_p e^{-\gamma t}, \quad a_j = \tilde{a}_j e^{-\gamma t}, \quad \xi = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{2\gamma}. \tag{39}$$

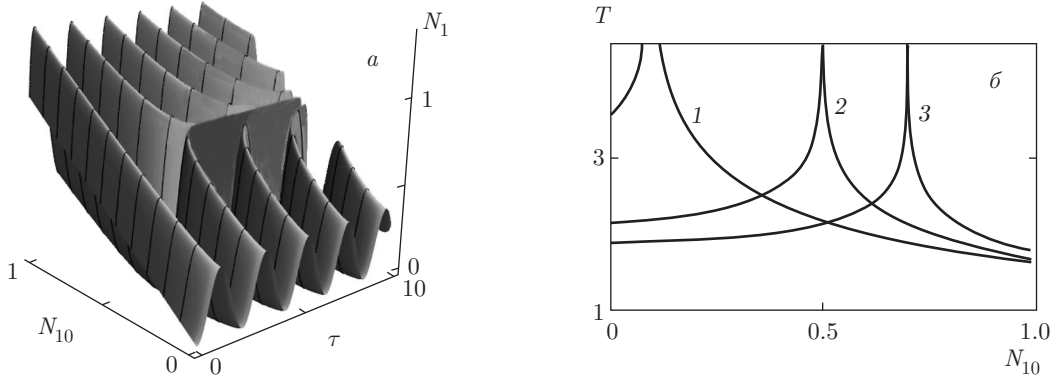


Рис. 6. а) Временная эволюция плотности диполяритонов N_1 в зависимости от начальной плотности диполяритонов N_{10} при фиксированных начальных плотностях диполяритонов: $N_{20} = 0.5, N_{30} = 0.4$. б) Период колебаний плотности диполяритонов N_1 в зависимости от начальной плотности диполяритонов N_{10} при фиксированных начальных плотностях диполяритонов: $N_{20} = 0.1, N_{30} = 0.4$ (1), $N_{20} = 0.5, N_{30} = 0.4$ (2), $N_{20} = 0.7, N_{30} = 0.4$ (3). Все величины нормированы на N_{40}

Переходя в формуле (38) от переменной t к переменной ξ и подставляя (39) в (38), получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений для функций с тильдой:

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial \tilde{a}_p}{\partial \xi} &= 2g_1 \tilde{a}_p^* \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 + 2g_2 \tilde{a}_p^* \tilde{a}_3 \tilde{a}_4, \\
 i \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \xi} &= g_1 \tilde{a}_2^* \tilde{a}_p \tilde{a}_p + g \tilde{a}_2^* \tilde{a}_3 \tilde{a}_4, \\
 i \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \xi} &= g_1 \tilde{a}_1^* \tilde{a}_p \tilde{a}_p + g \tilde{a}_1^* \tilde{a}_3 \tilde{a}_4, \\
 i \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \xi} &= g_2 \tilde{a}_4^* \tilde{a}_p \tilde{a}_p + g \tilde{a}_4^* \tilde{a}_1 \tilde{a}_2, \\
 i \frac{\partial \tilde{a}_4}{\partial \xi} &= g_2 \tilde{a}_3^* \tilde{a}_p \tilde{a}_p + g \tilde{a}_3^* \tilde{a}_1 \tilde{a}_2.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Если принять переменную ξ за время, то систему (40) можно рассматривать как «консервативную», совпадающую с системой (2), решения которой уже были найдены и обсуждались в предыдущих разделах. Легко также увидеть, что начальному моменту $t = 0$ здесь соответствует значение переменной $\xi = 0$. Переменная ξ растет со временем и при $t \gg \gg \gamma^{-1}$ получаем $\xi \rightarrow 1/2\gamma$. Для функций с тильдой получаем далее системы уравнений типа (3), (4) с соответствующими интегралами движения и решениями, в которых вместо переменной t содержится переменная ξ .

Теперь можно записать любое ранее представленное решение с учетом затухания. Например, решение (14) принимает вид

$$\begin{aligned}
 N_1(t) &= \left(N_{10} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) (N_{10} - N_{20}) e^{-2\gamma t} \times \\
 &\times \left\{ N_{10} - N_{20} + \left(N_{20} + \frac{1}{2} N_{p0} \right) \times \right. \\
 &\times \operatorname{sch}^2 \left(g_1 \sqrt{(N_{p0} + 2N_{10})(N_{p0} + 2N_{20})} \times \right. \\
 &\times \left. \left. \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) \pm \varphi_0 \right) \right\}^{-1}, \tag{41}
 \end{aligned}$$

где фаза φ_0 определяется формулой

$$\varphi_0 = \operatorname{arch} \sqrt{\frac{N_{10} N_{p0} + 2N_{20}}{N_{p0} (N_{10} - N_{20})}}.$$

Из выражения (41) и рис. 7 следует, что аperiодические решения при малых временах качественно сохраняют свое поведение, так как затухание не успевает проявиться. Однако при $t \gg \gamma^{-1}$ экспоненциальный множитель $\exp(-2\gamma t)$ у плотностей частиц приводит к тому, что система диполяритонов затухает со временем и плотности всех частиц обращаются в нуль подобно тому, как это представлено на рис. 7. Видно также, что предельные значения плотностей диполяритонов при $t \rightarrow \infty$ теперь оказываются невозможными. Однако растущие со временем на начальном этапе функции имеют максимум плотности диполяритонов. Что касается периодических решений для плотностей диполяритонов, то, например, решение (23) приводится к виду

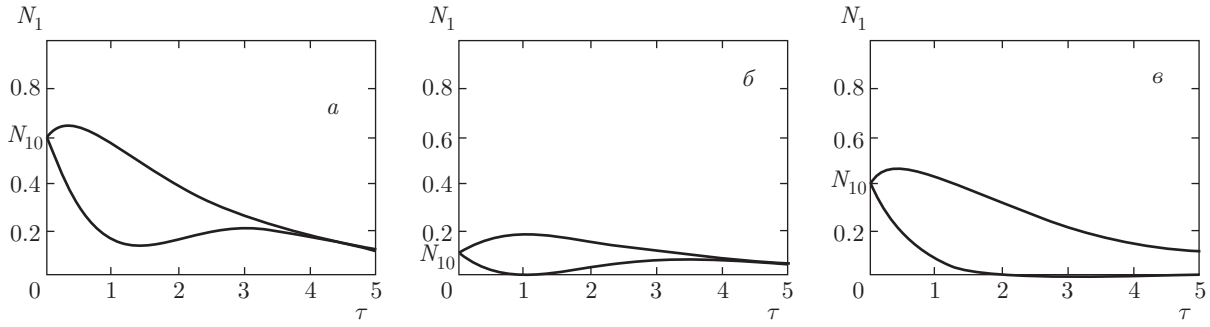


Рис. 7. Временная эволюция плотности диполяритонов $N_1(\tau)$ при $N_{30} = N_{40} = 0$, $\theta_{12,0} = \pi/2$, $\gamma = 0.2$ и значениях начальных плотностей $N_{10} = 0.6$, $N_{20} = 0.4$ (а), $N_{10} = 0.1$, $N_{20} = 0.4$ (б), $N_{10} = 0.4$, $N_{20} = 0.4$ (в). Здесь $\tau = g_1 t$. Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

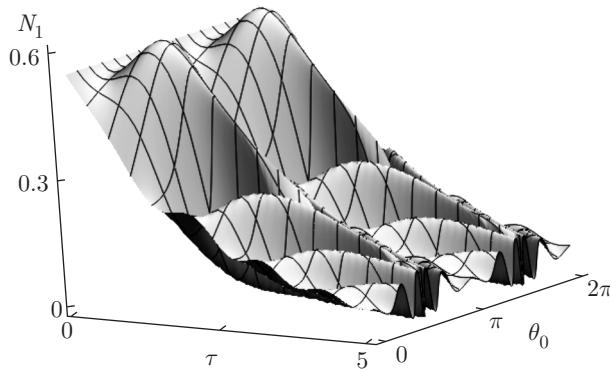


Рис. 8. Временная эволюция плотности диполяритонов $N_1(t)$ при произвольных значениях θ_0 , $N_{20} = 0.4$, $N_{10} = 0.5$, $\gamma = 0.2$. Здесь $\tau = g_1 t$. Все величины нормированы на начальную плотность диполяритонов накачки

$$N_1(t) = e^{-2\gamma t} \left(\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_4) - \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sn}^2 \left(2K(k) \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) \pm F(\varphi_0, k) \right) \right) \times \\ \times \left\{ \alpha_2 - \alpha_4 - (\alpha_2 - \alpha_3) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sn}^2 \left(2K(k) \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) \pm F(\varphi_0, k) \right) \right\}^{-1}, \quad (42)$$

где

$$k^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4}, \\ \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{\alpha_2 - \alpha_3} \frac{N_{10} - \alpha_3}{N_{10} - \alpha_4}}.$$

Таким образом, периодическое решение при учете затухания содержит в качестве множителя старое периодическое решение (42) по переменной ξ , умноженное на $\exp(-2\gamma t)$. Со временем амплитуда ко-

лебаний этих решений экспоненциально затухает и при $t \gg \gamma^{-1}$ они обращаются в нуль (рис. 8).

Аналогичные затухающие решения имеют место и при $N_{p0} = 0$.

Отметим, что если коэффициенты затухания у различных диполяритонов различны, то решения для плотностей частиц также являются затухающими. Если даже у части диполяритонов коэффициенты затухания исчезающе малы по сравнению с другими диполяритонами, то благодаря взаимодействию между ними плотности всех диполяритонов затухают со временем.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что динамика диполяритонного параметрического осциллятора представляет собой процессы периодического и аperiodического превращений диполяритонов накачки на средней ветви в диполяритоны сигнальной и холостой мод. Показано, что период осцилляций плотности диполяритонов существенно зависит от начальных плотностей квазичастиц и начальной разности фаз. Показано также, что в отсутствие накачки оказываются возможными колебания плотностей диполяритонов сигнальных и холостых мод, что принципиально невозможно в системе, состоящей из двух ветвей поляритонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Kavokin and G. Malpuech, *Thin Films, Nanostructures: Cavity Polaritons*, ed. by V. M. Agranovich and D. Taylor, Amsterdam, Elsevier (2003).

2. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
3. A. Kavokin, *Appl. Phys. A* **89**, 241 (2007).
4. M. M. Glazov and K. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 245317 (2006).
5. I. A. Shelykh, R. Johne, D. D. Solnyshkov, A. V. Kavokin, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **76**, 155308 (2007).
6. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **63**, 193305 (2001).
7. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **62**, R 4825 (2000).
8. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
9. J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **62**, R 16247 (2000).
10. C. Ciuti, *Phys. Rev. B* **69**, 245304 (2004).
11. P. Schwendimann, C. Ciuti, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **68**, 165324 (2003).
12. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. Porras, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **65**, 073309 (2002).
13. I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, and G. Malpuech, *Phys. Stat. Sol. B* **242**, 2271 (2005).
14. R. M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680 (2000).
15. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, G. Malpuech, M. Emam-Ismael, A. V. Chernenko, A. V. Kavokin, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **67**, 165302 (2003).
16. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **62**, R 13298 (2000).
17. C. Ciuti, P. Schwendimann, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **63**, 041303 (R) (2001).
18. C. Ciuti, P. Schwendimann, and A. Quattropani, *Semicond. Sci. Technol.* **18**, S 279 (2003).
19. P. G. Savvidis, C. Ciuti, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. M. Roberts, *Phys. Rev. B* **64**, 075311 (2001).
20. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *Опт. и спектр.* **111**, 853 (2011).
21. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *ФТТ* **53**, 1216 (2011).
22. О. Ф. Васильева, П. И. Хаджи, *Опт. и спектр.* **115**, 922 (2013).
23. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanophot.* **6**, 061805 (2012).
24. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanoelectr. Optoelectr.* **9**, 1 (2014).
25. P. Cristofolini, G. Christmann, S. I. Tsintzos, G. Deligeorgis, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, *Science* **336**, 704 (2012).
26. G. Christmann, A. Askitopoulos, G. Deligeorgis, Z. Hatzopoulos, S. I. Tsintzos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, *Appl. Phys. Lett.* **98**, 081111 (2011).
27. O. Kyriienko and T. C. H. Liew, *Phys. Rev. B* **93**, 035301 (2016).
28. K. Sivalertporn and E. A. Muljarov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 077401 (2015); arXiv:1305.5883.
29. J. S. Rojas-Arias, B. A. Rodriguez, and H. Vinck-Posada, arXiv:1603.06154.
30. C. Coulson, G. Christmann, P. Cristofolini, C. Grossman, J. J. Baumberg, S. I. Tsintzos, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, and P. G. Savvidis, *Phys. Rev. B* **87**, 045311 (2013).
31. A. V. Nalitov, D. D. Solnyshkov, N. A. Gippius, and G. Malpuech, arXiv:1410.2812.
32. O. Kyriienko, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh, arXiv:1211.0688; *Phys. Rev. Lett.* **111**, 176401 (2013).
33. K. Kristinsson, O. Kyriienko, T. C. H. Liew, and I. A. Shelykh, arXiv:1304.1316; *Phys. Rev. B* **88**, 245303 (2013).
34. K. Kristinsson, O. Kyriienko, and I. A. Shelykh, arXiv:1310.7414; *Phys. Rev. A* **89**, 023836 (2014).
35. O. Kyriienko, I. A. Shelykh, and T. C. H. Liew, arXiv:1403.7441; *Phys. Rev. A* **90**, 033807 (2014).
36. I. A. Shelykh, O. Kyriienko, K. Kristinsson, and T. C. H. Liew, *Proc. Int. Const. Nanomaterials: Applications and Properties* **3**, 02NAESF03 (2014).
37. J.-Y. Li, S.-Q. Duan, and W. Zhang, *Europhys. Lett.* **108**, 67010 (2014).
38. I. Rosenberg, Y. Harpaz, K. West, L. Pfeiffer, and R. Rapaport, arXiv:1604.05952; *Phys. Rev. B* **93**, 195151 (2016).

39. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, И. В. Белоусов, *Опт. и спектр.* **120**, 116 (2016).
40. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, И. В. Белоусов, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 665 (2015).
41. J. Wilkes and E. A. Muljarov, arXiv:1606.06479; *Phys. Rev. B* **94**, 125310 (2016).
42. N. Bobrovska, M. Matuszewski, T. C. H. Liew, and O. Kyriienko, arXiv:1611.03238.
43. А. И. Бурштейн, А. Ю. Пусеп, *ЖЭТФ* **69**, 1927 (1975).
44. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биекситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1985).
45. T. Byrnes, G. V. Kolmakov, R. Y. Kezerashvili, and Y. Yamamoto, arXiv:1404.5353; *Phys. Rev. B* **90**, 125314 (2014).
46. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1963).
47. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1971).