

# О ВЛИЯНИИ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН В ТОРОИДАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

*Т. А. Хусаинов<sup>\*</sup>, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 11 октября 2017 г.

Исследуется эффективность туннелирования квазиоптических волновых пучков через область непрозрачности в окрестности плазменной отсечки в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме. Предложена новая теоретическая модель, позволяющая исследовать влияние случайной модуляции фазы, наведенной флуктуациями плотности на трассе распространения волнового пучка, на эффективность линейной трансформации волн в двумерной геометрии, отвечающей условиям эксперимента по нагреву закритической плазмы в тороидальных магнитных системах. Получено общее аналитическое выражение, связывающее коэффициент трансформации волнового пучка, усредненный по ансамблю реализаций случайного волнового поля, и его фазовую корреляционную функцию. Проанализирована зависимость коэффициента трансформации от длины корреляции распределения случайной фазы в пучке и от длины пройденной трассы до области взаимодействия. Найден порог для длины трассы, при превышении которого флуктуации становятся доминирующим эффектом. Показана важность учета двумерных эффектов.

DOI: 10.7868/S0044451018030021

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная трансформация обыкновенной и необыкновенной волн в окрестности поверхности плазменной отсечки — не только один из интереснейших фундаментальных волновых процессов в магнитоактивной плазме, но и важнейшая составляющая перспективных схем СВЧ-нагрева и диагностики плотной плазмы, удерживаемой в магнитных ловушках различной конфигурации, для освоения управляемого термоядерного синтеза [1–3]. Существенное влияние флуктуаций плотности, характерных для горячей магнитоактивной плазмы в тороидальных магнитных ловушках, на процесс линейной трансформации было отмечено в работе [3], где была предложена простейшая качественная картина этого явления. Впоследствии в работах [4–6] на основе более строгого анализа эта

картина была существенно пересмотрена. В результате решения укороченных уравнений Максвелла в области трансформации в присутствии флуктуаций было показано, что флуктуации плотности при параметрах, отвечающих современным экспериментам по микроволновому нагреву плазмы, изменяют коэффициент трансформации в основном за счет малоуглового рассеяния на трассе распространения волнового пучка до области линейного взаимодействия. Рассеяние модифицирует падающий на область трансформации волновой пучок, что сказывается на его последующей трансформации. Важно отметить, что при этом не возникает характерного для окрестности поверхности отсечки усиления эффективности рассеяния на флуктуациях плотности плазмы [7], что связано с тонкими особенностями распространения волн в окрестности точки поляризационного вырождения [5]. При этом возмущения усредненного коэффициента трансформации в результате возмущения самой области трансформации обычно пренебрежимо малы.

<sup>\*</sup> E-mail: hta@appl.sci-nnov.ru

Результаты работ [4, 5] были получены в предположении, что регулярные (без учета флуктуаций) градиенты плотности плазмы и модуля магнитного поля сонаправлены; в работе [6] неоднородность магнитного поля вообще не учитывалась. При этом регулярная плазма ранее всегда описывалась в рамках одномерного приближения, в то время как флуктуации приводили к трехмерным возмущениям одномерной геометрии. С другой стороны, такое предположение заведомо не выполняется для тороидальных установок за исключением выделенного случая экваториального ввода излучения. Известно, что неоднородный характер области трансформации в регулярной тороидальной плазме приводит к качественно новым физическим эффектам [8–10], которые в определенных условиях могут существенно влиять на эффективность трансформации [11–15].

В настоящей работе мы исследуем влияние флуктуаций плотности на процесс линейной трансформации в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме. При этом необходимо иметь в виду, что учет трехмерной неоднородности магнитного поля и кривизны магнитных поверхностей в токамаках и стеллараторах не приводит к качественному изменению уравнений, описывающих линейную трансформацию. Как показано в работах [12, 15], эти уравнения все равно могут быть сведены к «эталонным» двумерным уравнениям, формально совпадающим с рассматриваемыми ниже. Это обстоятельство позволяет ограничиться более простой двумерной моделью области трансформации, в которой направление магнитного поля считается неизменным.

## 2. УСРЕДНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРАНСФОРМАЦИИ ПО СЛУЧАЙНЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Как было показано в работе [4], основной путь влияния флуктуаций на эффективность трансформации — малоугловое рассеяние на трассе, при этом влиянием флуктуаций на сам процесс туннелирования через область непрозрачности можно пренебречь. Под малоугловым мы будем понимать рассеяние на флуктуациях, характерные масштабы которых много больше длины волны излучения. Такое рассеяние приводит к дополнительной фазовой модуляции волнового пучка, но не к отклонению или отражению пучка как целого. Как было показано в работах [4, 5], область трансформации в этом про-

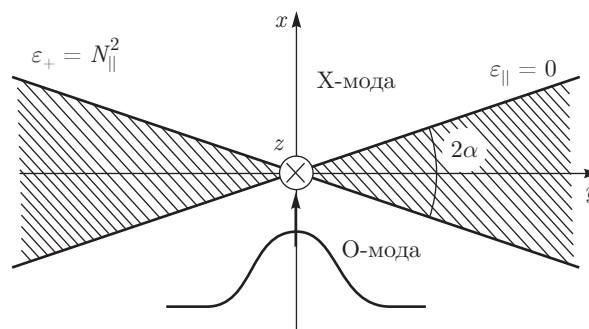


Рис. 1. Система координат и область непропускания (изображена штриховкой) для левополяризованных плоских электромагнитных волн с заданными  $k_z = \omega N_{||}/c$  и  $k_y = 0$

цессе ничем не выделена, т. е. в ней рассеяние происходит с той же эффективностью, что и вне ее, а усиления эффективности рассеяния, характерного для области отсечки в случае, когда моды распространяются независимо, нет. При этом размеры области трансформации, как правило, много меньше длины полной трассы распространения пучка. Поэтому для описания процесса трансформации мы можем считать, что в области линейного взаимодействия флуктуаций нет. Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи: пучок, испытавший влияние флуктуаций на трассе, падает на регулярную область трансформации. Также будем считать, что пучок был введен под оптимальным (без учета флуктуаций) углом, обеспечивающим наиболее эффективную трансформацию [1].

Рассмотрим плавно неоднородную магнитоактивную плазму с двумерными и регулярными распределениями плотности плазмы  $n_e(x, y)$  и модуля магнитного поля  $B(x, y)$ . Система координат в плоскости  $x, y$  введена на рис. 1. Будем считать, что направление магнитного поля постоянно и совпадает с осью  $z$ . Область трансформации при этом находится в окрестности точки пересечения поверхностей

$$\begin{aligned} \varepsilon_+(x, y) - N_{||}^2 &= 0, \\ \varepsilon_{||}(x, y) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_{||}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости в стиковом представлении,

$$\varepsilon_{||} = 1 - \frac{n_e}{n_{cr}}, \quad \varepsilon_+ = 1 - \frac{n_e/n_{cr}}{1 + B/B_{res}},$$

$n_{cr} = m_e \omega^2 / 4\pi e^2$  — критическая концентрация плазмы для частоты волны  $\omega$ ,  $B_{res} = m_e c \omega / e$  — магнитное поле, соответствующее электронному циклотронному резонансу, а  $N_{||}$  — продольный по отношению к магнитному полю показатель преломления,

который в нашем приближении сохраняется (случай, когда продольный показатель преломления не сохраняется, рассмотрен в работах [12, 15]).

Коэффициент трансформации обыкновенной волны в необыкновенную по интенсивности может быть определен как доля потока электромагнитной энергии, просачивающейся через область непропускания  $\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2) < 0$ . Для рассматриваемой геометрии эта задача впервые решена в работе [9]. В частности, для нормированного распределения амплитуды в падающем монохроматическом волновом пучке вида

$$A(y) \exp(ik_0 N_{\parallel} z - i\omega t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |A(y)|^2 dy = 1$$

коэффициент трансформации  $T$  может быть вычислен как свертка с функцией Грина

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} G(y_1, y_2) A(y_1) A^*(y_2) dy_1 dy_2, \quad (2)$$

$$G(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\pi L_{\nabla}^2 (1 - \exp(-4\tilde{\alpha}))}} \times \exp\left(\frac{2y_1 y_2 - (y_1^2 + y_2^2) \operatorname{ch} 2\tilde{\alpha}}{2L_{\nabla}^2 \operatorname{sh} 2\tilde{\alpha} / \sin \alpha}\right).$$

Здесь  $\alpha$  определяет угол между поверхностями (1),

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{(\nabla \varepsilon_+, \nabla \varepsilon_{\parallel})}{|\nabla \varepsilon_+| |\nabla \varepsilon_{\parallel}|}, \quad \tilde{\alpha} = \pi \operatorname{tg} \alpha,$$

$L_{\nabla}$  определяет характерный масштаб области трансформации,

$$L_{\nabla} = \left( \frac{N_{\parallel}^2}{2k_0^2 |\nabla \varepsilon_+| |\nabla \varepsilon_{\parallel}|} \right)^{1/4},$$

$k_0 = \omega/c$  — вакуумное волновое число. Предел  $\alpha \rightarrow 0$  соответствует плоскостроистому приближению в случае оптимального направления распространения  $N_{\parallel} = \sqrt{B_0/(B_0 + B_{res})}$ , где  $B_0 = B(0, 0)$ . Функция Грина в этом случае зависит только от разности  $y_1 - y_2$ ,

$$G(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi L_{\nabla}} \exp\left(-\frac{(y_1 - y_2)^2}{4\pi L_{\nabla}^2}\right),$$

поэтому мы можем перейти к фурье-представлению:

$$G(y_1, y_2) = \int g(k) \exp(-ik(y_1 - y_2)) dk, \quad (3)$$

$$g(k) = (2\pi)^{-1} \exp(-\pi L_{\nabla}^2 k^2).$$

Вспомним наше предположение, что флуктуации меняют структуру падающего пучка  $A(y)$ , но не проявляются в самой области трансформации. После усреднения по ансамблю флуктуаций коэффициент трансформации примет вид

$$\langle T \rangle = \int G(y_1, y_2) \langle A(y_1) A^*(y_2) \rangle dy_1 dy_2. \quad (4)$$

Поскольку параметры плазмы в области трансформации мы считаем детерминированными, функция Грина  $G$  вынесена из-под усреднения. Таким образом, в двумерно-неоднородном случае усредненный коэффициент трансформации определяется двойным интегралом от кросскорреляционной функции  $\langle A(y_1) A^*(y_2) \rangle$  для комплексной амплитуды падающего пучка. В одномерном случае ситуация упрощается — усредненный коэффициент трансформации полностью определяется усредненной спектральной плотностью  $\langle |A(k)|^2 \rangle$  падающего случайно-неоднородного пучка:

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \langle |A(k)|^2 \rangle dk,$$

$$\langle |A(k)|^2 \rangle = \int A(y_1) A^*(y_2) \exp(-ik(y_1 - y_2)) dy_1 dy_2.$$

Таким образом, в плоскостроистой среде эффективность трансформации определяется шириной спектра падающего на область трансформации волнового пучка — в общем случае, чем шире спектр, тем ниже эффективность трансформации. Уширение спектральной ширины пучка из-за малоуглового рассеяния на флуктуациях плотности может существенно снизить эффективность трансформации, поскольку это уширение накапливается на трассе до области взаимодействия. В двумерно-неоднородной среде ситуация несколько меняется, поскольку коэффициент трансформации уже не определяется однозначно шириной спектра падающего пучка.

### 3. УСРЕДНЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

В нашей задаче можно считать, что малоугловое рассеяние на флуктуациях в первую очередь возмущает распределение фазы в падающем волновом пучке. Мы будем считать, что длина трассы распространения пучка до области трансформации  $l_{tr}$  меньше характерной дифракционной длины

$$l_{tr} < l_d \sim k_0 / (\Delta k)^2,$$

где  $\Delta k$  — характерная ширина спектра пучка. Это приближение выглядит оправданным, поскольку в тороидальных установках область трансформации находится близко к периферии плазмы [2]. Рассмотрение более длинных трасс не представляет для нас интереса — модуляция фазы для таких трасс будет настолько сильна, что эффективная трансформация станет невозможной. Действительно, если трасса распространения настолько длинная, что из-за дифракционной расходимости флуктуации приведут к дополнительному расплыванию пучка, то можно утверждать, что флуктуации полностью «разрушили» падающий пучок и говорить о его эффективной трансформации не имеет смысла.

С учетом сделанных предположений падающий пучок можно рассмотреть в виде

$$A(y) = \tilde{A}(y) \exp(i\phi(y)),$$

где  $\tilde{A}(y)$  — детерминированное распределение комплексной амплитуды,  $\phi(y)$  — добавленная к нему случайная фаза. Кросскорреляционная функция при этом переписывается как

$$\langle A(y_1)A^*(y_2) \rangle = \tilde{A}(y_1)\tilde{A}^*(y_2)\langle \exp(i\phi(y_1) - i\phi(y_2)) \rangle.$$

Далее естественно предположить (как это было сделано, например, в работе [7]), что случайные фазы  $\phi(y_1)$  и  $\phi(y_2)$ , являющиеся интегралами от независимых одинаково распределенных случайных величин, имеют в силу центральной предельной теоремы нормальное распределение. Этого предположения достаточно, чтобы явно провести усреднение. Величина  $\Delta\phi = \phi(y_1) - \phi(y_2)$  тоже имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Разложим экспоненту в ряд и усредним слагаемые по отдельности, учитывая, что средние от нечетных степеней равны нулю:

$$\begin{aligned} \langle \exp(i\Delta\phi) \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Delta\phi)^n}{n!} \right\rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \langle (-\Delta\phi)^{2m} \rangle. \end{aligned}$$

Вычисляя среднее от четных степеней, воспользуемся нормальным распределением величины  $\Delta\phi$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \langle (-\Delta\phi)^{2m} \rangle &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!} \langle -(\Delta\phi)^2 \rangle^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} \langle -(\Delta\phi)^2 \rangle^m = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle\right). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\langle \exp(i\Delta\phi) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle (\phi(y_1) - \phi(y_2))^2 \rangle\right).$$

Допустим теперь, что свойства распределения флуктуаций не меняются на апертуре пучка, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \phi(y_1)\phi(y_2) \rangle &= \text{Cor}(y_1 - y_2), \\ \langle \phi^2(y) \rangle &= \text{Cor}(0) = \text{const}. \end{aligned}$$

В результате мы можем выразить результат усреднения через детерминированную функцию  $\Phi$  от разности  $y_1 - y_2$ :

$$\langle \exp(i\Delta\phi) \rangle = \exp(-\langle \phi^2 \rangle + \langle \phi(y_1)\phi(y_2) \rangle) = \Phi(y_1 - y_2),$$

где

$$\Phi(y_1 - y_2) = \exp(\text{Cor}(y_1 - y_2) - \text{Cor}(0)). \quad (5)$$

Отметим, что функция  $\Phi(\Delta y)$  должна удовлетворять следующим естественным условиям:

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi(\infty) = \exp(-\langle \phi^2 \rangle).$$

Первое условие очевидно, второе условие означает, что при  $\Delta y = y_1 - y_2 \rightarrow \infty$  фазы оказываются полностью некоррелированными.

Введенная функция  $\Phi$  позволяет учитывать влияние модуляции фазы на эффективность трансформации просто с помощью добавления дополнительного детерминированного множителя в интегральный оператор (2):

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(y_1, y_2) \tilde{A}(y_1) \tilde{A}^*(y_2) \Phi(y_1 - y_2) dy_1 dy_2. \quad (6)$$

Аналогичным образом можно ввести усредненную спектральную плотность пучка,

$$\begin{aligned} \langle |A(k)|^2 \rangle &= \int \tilde{A}(y_1) \tilde{A}^*(y_2) \Phi(y_1 - y_2) \times \\ &\times \exp(-ik(y_1 - y_2)) dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

полностью определяющую усредненный коэффициент трансформации в одномерном приближении.

Функция  $\Phi(\Delta y)$  задается распределением флуктуаций плотности плазмы на всей трассе волнового пучка до области трансформации, явное определение этой функции требует решения полной задачи распространения волнового пучка в случайно-неоднородной плазме. Детальный анализ этой задачи выходит за рамки нашей работы, отметим лишь, что подобная задача рассматривалась, например, в работах [7, 16, 17]. После нахождения функции  $\Phi(\Delta y)$  соотношение (6) позволяет в явном виде учесть влияние «трассовых» эффектов флуктуаций плотности плазмы на эффективность линейной трансформации для любого заданного пучка с учетом неоднородного характера неоднородности. Это универсальное соотношение мы рассматриваем как основной результат работы.

#### 4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТРАНСФОРМАЦИИ ГАУССОВОГО ПУЧКА ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

В этом разделе мы исследуем достаточно общий пример, позволяющий на качественном уровне проанализировать эффекты, связанные с двумерной геометрией области трансформации. Рассмотрим флуктуации фазы с гауссовым пространственным спектром вдоль  $y$  (поперек волнового пучка) и дельта-коррелированными фурье-гармониками. Соответствующая кросскорреляционная функция в реальном пространстве имеет вид

$$\text{Cor}(y_1 - y_2) = \langle \phi^2 \rangle \exp\left(-\frac{(y_1 - y_2)^2}{\lambda_y^2}\right). \quad (7)$$

Параметр  $\lambda_y$  имеет очевидный физический смысл — это корреляционная длина флуктуаций плотности плазмы поперек пучка, а  $\langle \phi^2 \rangle$  определяет однородную амплитуду флуктуаций фазы. Для оценки величины  $\langle \phi^2 \rangle$  рассмотрим простейшую диффузионную модель, считая, что характерные масштабы флуктуаций  $\lambda_x \approx \lambda_y \approx \lambda_{fl}$  вдоль и поперек направления пучка одинаковы, а амплитуда флуктуаций плотности плазмы однородна и равна  $\delta n$ , плотность основной плазмы мы при этом будем считать существенно меньшей критической. При прохождении пучком длины  $\lambda_x$  фаза пучка, отвечающая заданной поперечной координате, получает случайную добавку  $\delta\phi \approx (1/2)k_0\lambda_y\delta n/n_{cr}$ . Эволюция распределения плотности вероятности фазы при распространении пучка на конечное расстояние  $l_{tr} \gg \lambda_{fl}$  описывается уравнением диффузии с коэффициентом диффу-

зии  $D_\phi \approx (1/2)\delta\phi^2/\lambda_x$ , поэтому величина  $\langle \phi^2 \rangle$  может быть рассчитана как  $\langle \phi^2 \rangle = 2D_\phi l_{tr}$  или

$$\langle \phi^2 \rangle \approx \frac{1}{4} k_0^2 l_{tr} \lambda_{fl} \left(\frac{\delta n}{n_{cr}}\right)^2. \quad (8)$$

Эта формула верно передает зависимость от частоты излучения, масштаба и амплитуды флуктуаций, поэтому может использоваться для оценки уровня флуктуаций фазы пучка. Для моделирования условий реальных экспериментов может потребоваться расчет величины  $\langle \phi^2 \rangle = 2 \int D_\phi dl$ , т. е. интегрирование неоднородного коэффициента диффузии вдоль трассы распространения с учетом дисперсионных свойств плазмы. Как нетрудно заметить, эта процедура приводит в основном к переопределению эффективной величины  $l_{tr}$  в формуле (8).

В соответствии с формулой (5), функция  $\Phi(\Delta y)$ , отвечающая кросскорреляционной функции (7), принимает вид

$$\Phi(\Delta y) = \exp\left(-\langle \phi^2 \rangle \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta y^2}{\lambda_y^2}\right)\right)\right). \quad (9)$$

Несмотря на ясный физический смысл, функция (9) при подстановке в (6) приводит к неоправданно громоздким выражениям для усредненного коэффициента трансформации. Поэтому для упрощения дальнейшего анализа мы заменим «строгое» выражение на новую модельную функцию  $\Phi(\Delta y)$ , допускающую простое вычисление интеграла (6) для гауссовых пучков.

Эта модельная функция может быть выбрана в виде

$$\Phi(\Delta y) = (1 - \xi) \exp\left(-\frac{\Delta y^2}{\lambda_0^2}\right) + \xi, \quad (10)$$

$$\xi = \exp(-\langle \phi^2 \rangle),$$

где  $\lambda_0$  — параметр, который находится из требования близости формул (9) и (10) при всех значениях  $\Delta y/\lambda_y$  и  $\langle \phi^2 \rangle$ . Условие совпадения (9) и (10) при  $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow 0$  дает  $\lambda_0 \approx \lambda_y$ . В обратном пределе  $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow \infty$  мы можем пренебречь  $\xi \rightarrow 0$  в формуле (10), а в формуле (9) разложить  $\exp(-\Delta y^2/y_{cor}^2)$  в ряд по  $\Delta y/\lambda_y$ , поскольку  $\Phi(\Delta y) \ll 1$  уже при  $\Delta y^2/y_{cor}^2 \ll 1$  (малые значения не вносят вклад в коэффициент трансформации). Из этого получаем  $\lambda_0 \approx \lambda_y \langle \phi^2 \rangle^{-1/2}$  при  $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow \infty$ . Простейшая форма, обеспечивающая обе указанные асимптотики, имеет вид

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_y}{\sqrt{1 + \langle \phi^2 \rangle}}. \quad (11)$$



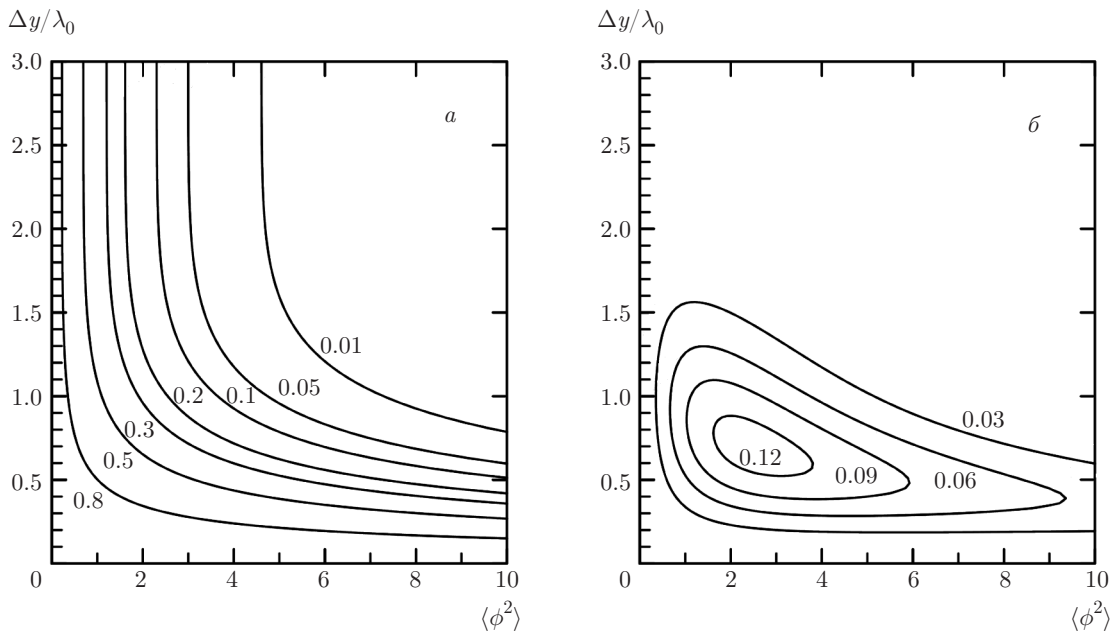


Рис. 2. а) Функция  $\Phi(\Delta y/\lambda_0, \langle \phi^2 \rangle)$ , рассчитанная по формуле (9). б) Ошибка  $\Delta\Phi(\Delta y/\lambda_0, \langle \phi^2 \rangle)$ , вычисленная как разность между выражением (9) и модельным выражением (10), (11)

Здесь нужно отметить, что  $\lambda_0$  — это характеристика именно фазовой модуляции (которая может меняться на трассе из-за изменения  $\langle \phi^2 \rangle$ ), а не характерный пространственный масштаб флуктуаций плотности  $\lambda_y \approx \lambda_{fl}$ . На рис. 2 приведена функция  $\Phi(\Delta y/\lambda_0, \langle \phi^2 \rangle)$ , рассчитанная по формуле (9), и ошибка, вычисленная как разность между выражением (9) и модельным выражением (10), (11). Видно, что выбранное модельное выражение обеспечивает приемлемую точность во всей области параметров.

В качестве частного, но практически универсального, случая рассмотрим падающий пучок с гауссовым распределением амплитуды и квадратичной регулярной фазой:

$$\tilde{A}(y) = \frac{1}{\sqrt{a_y} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2a_y^2} - \frac{iK_y y^2}{2}\right). \quad (12)$$

Подставим это распределение в (2) и найдем невозмущенный коэффициент трансформации без учета флуктуаций:

$$T = \frac{1 + \text{th } \tilde{\alpha}}{\sqrt{1 + (a_y^2/a_0^2 + a_0^2/a_y^2 + K_y^2 a_0^2 a_y^2) \text{th } \tilde{\alpha} + \text{th}^2 \tilde{\alpha}}}, \quad (13)$$

где  $a_0^2 = L_{\nabla}^2 / \sin \alpha$ . Прежде чем рассматривать флуктуации, прокомментируем невозмущенное соотношение (13). При  $\alpha > 0$  существует оптимальный

пучок с  $a_y = a_0$  и  $K_y = 0$ , испытывающий полную трансформацию,  $T = 1$ . При  $\alpha < 0$  в формулу (13) следует подставлять  $\alpha_0^2 < 0$ ; пучок с наибольшим коэффициентом трансформации соответствует  $a_y = |a_0|$  и  $K_y = 0$ , коэффициент трансформации при этом равен

$$T = \frac{1 + \text{th } \tilde{\alpha}}{1 - \text{th } \tilde{\alpha}} = \exp(-2\pi \text{tg } |\alpha|) < 1.$$

Таким образом, в двумерной геометрии  $|a_0| = L_{\nabla} / \sqrt{|\sin \alpha|}$  определяет оптимальный размер гауссова пучка при любом знаке  $\alpha$  [9]. При  $K_y \neq 0$  максимальный коэффициент трансформации реализуется для пучка шириной

$$a_y = |a_0|(1 + K_y^2 a_0^4)^{-1/4}.$$

В одномерном случае ( $\alpha \rightarrow 0$ ) коэффициент трансформации представляется в виде

$$T = \frac{a_y}{\sqrt{a_y^2 + \pi L_{\nabla}^2 (1 + K_y^2 a_y^4)}}, \quad (14)$$

а оптимальный пучок переходит в оптимальную плоскую волну.

Для гауссового пучка (12) и модельной функции (10), (11) возмущенный за счет флуктуаций коэффициент трансформации (2) также может быть вычислен явно. Ответ можно представить в виде

$$\langle T \rangle = (1 - \xi)\tilde{T} + \xi T, \quad (15)$$

где  $T$  определяется формулой (13) или в плоскостом приближении (14), а  $\tilde{T}$  отличается от  $T$  заменой

$$K_y^2 \rightarrow \tilde{K}_y^2 = K_y^2 + \frac{4}{a_y^2 \lambda_y^2} (1 + \langle \phi^2 \rangle) \times \left( 1 + \frac{a_y^2}{L_{\nabla}^2} \sin \alpha \operatorname{th} \tilde{\alpha} \right). \quad (16)$$

Как и следовало ожидать, флуктуации фазы формально учитываются дополнительной регулярной фазовой модуляцией. Из выражения (16) видно, что с ростом  $\alpha$  эффективная фазовая модуляция увеличивается. Это должно приводить к уменьшению максимально возможного коэффициента трансформации, при этом оптимальный размер падающего пучка, соответствующий наиболее эффективной трансформации, также уменьшается.

Из соотношения (15) видно, что, для того чтобы флуктуации могли существенно повлиять на коэффициент трансформации, требуется одновременное выполнение двух условий:  $\xi$  должно отличаться от единицы и  $\tilde{T}$  должно отличаться от  $T$ . Первое условие означает, что среднеквадратичное значение случайной фазы должно быть достаточно большим (сопоставимым с единицей),

$$\langle \phi^2 \rangle \gtrsim 1, \quad (17)$$

т. е. пучок как целое должен иметь случайную фазу. Второе условие означает, что связанная с флуктуациями добавка к эффективной кривизне (16) должна стать сравнимой с остальными членами в выражении (13),

$$\tilde{K}_y^2 - K_y^2 \gtrsim K_y^2, \frac{1}{a_y^4}, \frac{1}{a_0^4}, \frac{1}{a_y^2 a_0^2 \operatorname{th} \tilde{\alpha}}.$$

Пренебрегая  $K_y \rightarrow 0$  и считая  $a_y \approx |a_0|$  для пучков, близких к оптимальному, можно переписать неравенство как

$$1 + \langle \phi^2 \rangle \gtrsim \frac{\lambda_y^2}{4L_{\nabla}^2} \frac{1 + \operatorname{th} |\tilde{\alpha}|}{\operatorname{th} \tilde{\alpha}} \sin \alpha \approx \approx \frac{\lambda_y^2}{4\pi L_{\nabla}^2} (1 + \pi |\alpha|). \quad (18)$$

С увеличением параметра «двумерности»  $\alpha$  влияние флуктуаций на пучки с оптимальной шириной ослабляется.

Комбинируя соотношения (8), (17) и (18), можно указать длину трассы излучения, на которой малоугловое рассеяние приведет к заметной модификации коэффициента трансформации:

$$l_{tr} > \frac{4}{k_0^2 \lambda_{fl} (\delta n / n_{cr})^2} \left( 1 + \frac{\lambda_{fl}^2}{4\pi L_{\nabla}^2} (1 + \pi |\alpha|) \right). \quad (19)$$

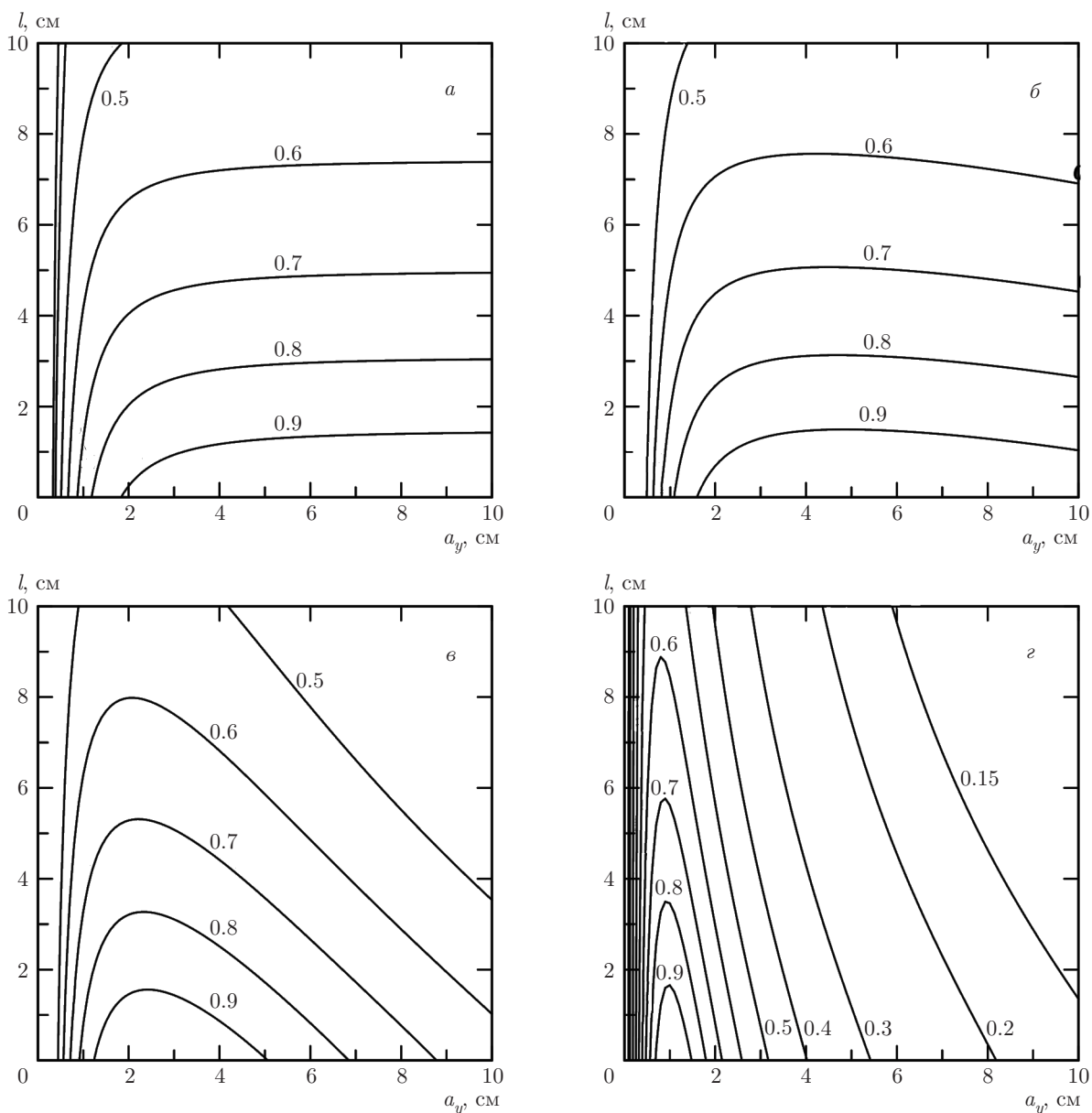
В качестве примера на рис. 3 приведена зависимость коэффициента трансформации  $T$  от ширины вводимого гауссового пучка без фазовой модуляции  $a_y$  и длины пройденной до области трансформации трассы  $l_{tr}$  для четырех значений «параметра двумерности»  $\alpha$ . Параметры модели выбраны так, чтобы примерно отвечать экспериментам по нагреву излучением с частотой порядка 100 ГГц в токамаке средних размеров с магнитным полем порядка 5 Тл [18, 19]. Корреляционная длина флуктуаций составляет несколько ионных гирорадиусов, уровень флуктуаций соответствует уровню МГД-возмущений на периферии плазмы [20]. Из рисунков видно, что, несмотря на то что по мере распространения пучка влияние флуктуаций заметно уменьшает эффективность трансформации, эффекты двумерной неоднородности остаются важными. Более того, выраженная «двумерность» области линейного взаимодействия приводит к тому, что для пучков с размером, близким к оптимальному, трансформация остается достаточно эффективной даже при больших длинах трасс распространения ( $T \approx 50\%$  при  $l_{tr} = 10$  см).

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели влияние случайной модуляции фазы, наведенной флуктуациями плотности на трассе распространения пучка, на эффективность трансформации в двумерной геометрии. При этом средний коэффициент трансформации удалось выразить через свертку от детерминированных функций, характеризующих геометрию области рассеяния, регулярную часть формы пучка и корреляционную функцию распределения случайной фазы. Для модельной корреляционной функции получено выражение коэффициента трансформации через дисперсию и длину корреляции распределения случайной фазы в пучке. При этом показано, что двумерный характер трансформации должен учитываться.

Как было отмечено в работах [13–15], сходный с флуктуациями вклад в коэффициент трансформации может вносить кривизна магнитных силовых линий и магнитных поверхностей. Их влияние также может быть оценено через параметр  $K_y$ , входящий в рассчитанный нами коэффициент трансформации (13):

$$K_y \sim \pi / (RL_{\nabla}), \quad (20)$$



**Рис. 3.** Усредненный по реализациям поля коэффициент трансформации  $T(a_y, l_{tr})$  в зависимости от начальной ширины гауссового пучка  $a_y$  и пройденной длины до области трансформации  $l_{tr}$  для четырех значений угла  $\alpha$ :  $\alpha = 0$  (одномерный случай) (а), 0.01 (б), 0.04 (в), 0.25 (г). В начальный момент ( $l_{tr} = 0$ ) пучок вводится без фазовой модуляции, падающее поле задано распределением (12) с  $K_y = 0$ . Остальные параметры модели выбраны следующими:  $k_0 = 24 \text{ см}^{-1}$ ,  $\delta n/n_{cr} = 3\%$ ,  $\lambda_{fl} = 1.5 \text{ см}$ ,  $L_{\nabla} = 0.5 \text{ см}$

где  $R$  — радиус кривизны магнитной поверхности. При этом было показано, что такая кривизна является наиболее важным эффектом, связанным с регулярной неоднородностью. Таким образом, если мы сравним эффективную фазовую модуляцию (16), наводимую флуктуациями, с эффективной фазовой модуляцией (20), связанной с кривизной магнитной поверхности, и учтем условие (17), то получим модифицированный критерий для длины транс-

сы распространения, на которой флуктуации становятся доминирующим эффектом:

$$l_{tr} > \frac{4}{k_0^2 \lambda_{fl} (\delta n/n_{cr})^2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{\lambda_{fl}^2 a_y^2}{R^2 L_{\nabla}^2} \right).$$

При выполнении этого условия рассмотренные в работе эффекты становятся более важными, чем эффекты кривизны. Интересно отметить, что если второе слагаемое в скобках больше единицы, то



существует диапазон длин трасс, на которых фаза пучка в целом уже случайная,  $\langle \phi^2 \rangle > 1$ , однако флуктуации все еще не привели к сильным искажениям формы фазового фронта.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН № 13П «Конденсированное вещество и плазма при высоких плотностях энергии», проект «Исследование возможностей микроволнового СВЧ-нагрева и диагностики плотной плазмы в перспективных альтернативных системах управляемого термоядерного синтеза с магнитным удержанием».

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Preinhaelter and V. Kopecký, *J. Plasma Phys.* **10**, 1 (1973).
2. H. P. Laqua, V. Erckmann, H. J. Hartfuß, and H. Laqua, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3467 (1997).
3. H. P. Laqua, *Plasma Phys. Control. Fusion* **49**, R1 (2007).
4. A. G. Shalashov and E. D. Gospodchikov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **56**, 125011 (2014).
5. Е. Д. Господчиков, Т. А. Хусаинов, А. Г. Шалашов, *Физика плазмы* **42**, 695 (2016).
6. А. Ю. Попов, *Plasma Phys. Control. Fusion* **57**, 025010 (2015).
7. E. V. Sysoeva, E. Z. Gusakov, and S. Neuraux, *Plasma Phys. Control. Fusion* **55**, 115001 (2013).
8. H. Weitzner, *Phys. Plasmas* **11**, 866 (2004).
9. E. D. Gospodchikov, A. G. Shalashov, and E. V. Suvorov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 869 (2006).
10. А. Ю. Попов, А. Д. Пилия, *Физика плазмы* **33**, 128 (2007).
11. А. Ю. Попов, *Plasma Phys. Control. Fusion* **49**, 1599 (2007).
12. A. G. Shalashov and E. D. Gospodchikov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **52**, 115001 (2010).
13. E. D. Gospodchikov, Т. А. Хусаинов, and А. Г. Шалашов, *Plasma Phys. Control. Fusion* **54**, 045009 (2012).
14. Т. А. Хусаинов, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов, *Физика плазмы* **38**, 99 (2012).
15. Т. А. Хусаинов, А. Г. Шалашов, Е. Д. Господчиков, <https://www.researchgate.net/publication/321966325>, DOI:10.13140/RG.2.2.16649.95844.
16. E. V. Sysoeva et al., *Nucl. Fusion* **55**, 033016 (2015).
17. E. Z. Gusakov et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **44**, 1565 (2002).
18. V. Shevchenko, G. Cunningham, and A. Gurchenko, *Fusion Sci. Technol.* **52**, 202 (2007).
19. A. Bruschi, R. Bozzi, S. Cirant et al., *Fusion Eng. Des.* **53**, 431 (2001).
20. E. Z. Gusakov, A. D. Gurchenko, A. B. Altukhov et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, A371 (2006).