ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 3, стр. 375–387

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗДЕЛЕННЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С РЕЗОНАНСНЫМИ АТОМАМИ

А. М. Башаров[*]

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Кафедра математики и математических методов физики,
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 21 ноября 2017 г.

Рассмотрена марковская модель спонтанного излучения атома, локализованного в области пространства с одним широкополосным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов в условиях связи этого электромагнитного поля с широкополосным полем соседнего пространства. Получены оператор эволюции системы и кинетическое уравнение для атома. Показано, что константа связи полей влияет на скорость спонтанного излучения атома, но не проявляется в сдвиге атомной частоты. Аналитическое выражение для константы радиационного распада атома в определенном смысле оказалось аналогичным формуле для константы распада однократно возбужденного локализованного ансамбля одинаковых атомов в условиях проявления эффекта стабилизации его возбужденного состояния штарковским взаимодействием с вакуумным широкополосным электромагнитным полем. Модель сформулирована на основе квантовых стохастических дифференциальных уравнений невинеровского типа и обобщенной алгебры дифференциалов Ито квантовых случайных процессов.

DOI: 10.7868/S0044451018030033

1. ВВЕДЕНИЕ

К типичным задачам квантовой оптики и теории открытых квантовых систем относятся задачи взаимодействия электромагнитного поля с квантовыми частицами и их динамики как во времени, так и в пространстве. При этом, как правило, имеет место взаимодействие объектов разной природы. Квантовые частицы как элементы открытой системы представляют собой объекты с небольшим числом степеней свободы. Окружение открытой системы характеризуется большим, в пределе бесконечно большим, числом степеней свободы и поэтому часто играет роль термостата. В качестве открытой квантовой системы часто выступают одиночные атомы, молекулы и их кластеры (квантовые точки и другие наночастицы — диэлектрические, полупроводниковые, металлические, из топологического изолятора и т. п.), одномодовые резонаторы, а также различные их комбинации — атомы в резонаторе, связанные резонаторы, «спазеры» и т. п. Атомы и молекулы могут выступать также и в качестве окружения открытой системы. Но в квантовой оптике, как правило, особое внимание уделяется «естественному» окружению в виде вакуумного электромагнитного поля, тепловых фононов, а также широкополосным полям, созданным различными источниками.

Для изучения динамики открытых квантовых систем разработано немало методов, целью которых является получение либо кинетического уравнения, либо уравнений для корреляционных функций. Примерами могут служить методы Цванцига [1, 2], цепочек Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона [3–5], диаграммная техника Константинова – Переля – Келдыша для функций Грина [6–9]. В ряде случаев непосредственно решается уравнение Шредингера для волновой функции [8, 10–12], используется метод анзаца Бете [13]. Относительно новым методом является ренормгрупповой подход к кинетическим уравнениям на основе преобразова-

[*] E-mail: basharov@gmail.com

ния непрерывного («бесконечнократного») произведения матриц эволюции [14–17].

Эффективными приближениями в теории открытых систем служат марковское приближение и алгебраическая теория возмущений.

Алгебраическая теория возмущений [18, 19] позволяет выводить эффективные гамильтонианы задачи. Использование теории возмущений позволяет говорить об открытых квантовых системах, которые можно считать самостоятельными объектами в силу малости константы, характеризующей ее связь с окружением (порядка отношения энергии взаимодействия к характерной энергии открытой системы). Отличие алгебраической теории возмущений от обычной теории состоит в возможности рассматривать резонансные процессы (в результате того, что низшие порядки алгебраической теории возмущений представляют собой результат суммирования бесконечных рядов обычной теории возмущений).

Если уравнение Шредингера с эффективным (или исходным) гамильтонианом попытаться записать в марковском приближении в случае взаимодействия с широкополосными полями, то такое уравнение становится уравнением типа Ланжевена, и его математический статус требует дополнительного определения. Математически корректным уравнение Шредингера становится в случае его интерпретации как стохастического дифференциального уравнения (СДУ) [20–22]. СДУ представляют собой не только корректную форму уравнений квантовой динамики объемлющего объекта «открытая система + широкополосное окружение» в марковском приближении, но и эффективным аппаратом решения задачи.

Если не пользоваться аппаратом СДУ в задачах, в которых классические или квантовые дельта-коррелированные шумовые источники взаимодействуют с открытыми системами, то для описания процессов обычно используется непрямой подход на основе кинетического уравнения для распределений исходных величин (уравнения типа Фоккера – Планка – Колмогорова – Чемпена). Однако такие уравнения также нуждаются в обосновании, в том числе и перечисленными выше методами, но в случае использования СДУ такое обоснование получается особенно простым.

Теория открытых систем на основе квантовых СДУ позволяет рассматривать вопросы динамики таких систем в аналитическом виде. До сих пор основными моделями открытых систем на основе квантовых СДУ были модели на основе СДУ винеровского типа [20–22], математическим основанием которых служила алгебра Гардинера – Коллет [23] для дифференциалов квантовых случайных процессов. В результате легко получаются кинетические уравнения в форме Линдблада, которые описывают самые разнообразные процессы, включая одновременное воздействие на открытые системы электромагнитных полей, описываемых как классическим, так и квантовым образом. Основным ограничением здесь является невозможность описания процессов второго порядка по взаимодействию с широкополосным полем, интерференционных процессов при воздействии на открытые системы двух широкополосных полей, представляющих собой различные шумовые источники, взаимодействия широкополосных полей на границах.

В работах автора [24–28] для описания взаимодействия с квантовыми частицами широкополосного квантованного вакуумного поля с нулевой плотностью числа фотонов выведены квантовые СДУ, условно названные квантовыми СДУ невинеровского типа. Их математическим обоснованием служит алгебра Хадсона и Партасарати [29] для дифференциалов квантовых случайных процессов, которая позволила в аналитическое описание процессов квантовой кинетики открытых систем включить процессы второго порядка по взаимодействию с широкополосным полем — так называемые процессы штарковского взаимодействия широкополосного поля с открытыми системами. Эти процессы носят нерезонансный характер и поэтому проявляются в самых разнообразных ситуациях. В случае локализованных атомных ансамблей такое развитие теории открытых систем на основе квантовых СДУ невинеровского типа позволило обосновать необходимость учета малых (по сравнению с резонансными слагаемыми) штарковских процессов в квантованных широкополосных полях с нулевой плотностью фотонов, которыми традиционно пренебрегалось [30]. Однако и в данном подходе до сих пор не рассматривалось взаимодействие двух широкополосных полей с точностью до второго порядка по взаимодействию включительно. То есть не рассматривались процессы взаимодействия таких полей между собой в случае близости их центральных частот и участия полей в штарковском взаимодействии с частицей.

Использование невинеровских квантовых СДУ позволило предсказать и аналитически описать эффекты подавления коллективной релаксации многоатомного ансамбля [24–28], востребованные в квантовой информатике, где весьма неприятным процессом, приводящим к декогеренции атомных кубитов, в ряде случаев является коллективное сверхизлучение Дике [31]. Основным процессом, подавляющим сверхизлучение Дике и определяющим эффекты стабилизации возбужденных состояний по отношению к коллективным процессам распада, явилось здесь штарковское взаимодействие квантовых частиц с широкополосным вакуумным электромагнитным полем. Эффект стабилизации состоит в том, что при определенном общем числе атомов ансамбля одинаковых частиц константы, определяющие скорости переходов между уровнями симметричных (по перестановке атомов) состояний атомного ансамбля, обращались в нуль. При этом зависимость констант от числа атомов носит осциллирующий характер [24]. Подобные результаты, выведенные в рамках перечисленных выше альтернативных подходов к теории открытых систем, автору не известны. В работах по коллективному излучению сферически-симметричного ансамбля одинаковых атомов [32, 33] численным расчетом продемонстрированы специфические случаи, в которых можно говорить о частичном подавлении излучения с ростом числа атомов в ансамбле. Результаты эксперимента [34] можно также интерпретировать в пользу проявления эффекта подавления релаксации. Однако результаты, получающиеся в теории на основе невинеровских СДУ, жестко ограничены приближением локализованного атомного ансамбля и всей открытой квантовой системы. При этом квантованное вакуумное электромагнитное поле как бы также локализовано в некоторой области пространства — его пространственные координаты не учитываются, — и возникает представление о локализованном в указанном смысле вакуумном широкополосном электромагнитном поле. Представляется актуальным построение на основе невинеровских СДУ моделей динамики как пространственно-распределенных квантовых открытых систем, так и связанных между собой широкополосных локализованных полей.

Представление о локализованных полях типично для микрорезонаторов, где основными моделями служат модели Джейнса–Каммингса [35] и Тависа–Каммингса [36]. Электромагнитные поля микрорезонаторов представляются несколькими модами, так что до сих пор не рассматривалось локализованное в микрорезонаторе дельта-коррелированное электромагнитное поле в условиях его взаимодействия с квантовыми частицами в рамках марковского приближения и с учетом процессов штарковского взаимодействия (исключение — работа [37]). Для микрорезонаторов естественным является представление о связанных микрорезонаторах и взаимосвязи полей, находящихся по разные стороны общего зеркала микрорезонаторов. Такие представления вне рамок СДУ также использовались ранее в моделях пространственного переноса квантованного излучения (см., например, работу [38] и приведенные там ссылки). Известны модели связи моды резонатора и широкополосного поля вне резонатора, однако нет теории на основе СДУ, которая бы описывала связь на зеркале широкополосных полей.

В настоящей статье сформулирована модель динамики двух пространственно-разделенных широкополосных электромагнитных полей, взаимодействующих с квантовыми частицами. Модель выведена из эффективного оператора взаимодействия электромагнитных полей с квантовыми частицами (атомом, ансамблем атомов), находящимися внутри одного и того же пространства. Основными математическими «инструментами» рассмотрения таких взаимодействий являются алгебраическая теория возмущений и техника СДУ.

В качестве первого шага построения теории пространственно-распределенных открытых квантовых систем на основе СДУ необходимо в терминах квантовых случайных процессов описать взаимодействие широкополосных полей с нулевой плотностью фотонов. В статье предлагается теория на основе квантовых СДУ невинеровского типа для описания взаимодействия двух широкополосных вакуумных квантованных полей с резонансными частицами в условиях взаимодействия таких полей между собой на границе раздела пространств их существования. Это необходимо для последующего распространения теории открытых квантовых систем на случай пространственно-распределенных открытых квантовых систем с учетом штарковских взаимодействий. В качестве простого приложения представленной теории получено кинетическое уравнение для квантовых частиц и показано, что интерференция альтернатив, отвечающих процессам «перехода» виртуальных фотонов из одного пространства в другое и обратно из-за их связи, в случае двух пространств описывается аналогично процессам штарковского взаимодействия локализованной открытой системы со «своим» вакуумным электромагнитным полем. Для получения такого естественного результата понадобилось построение как новых квантовых случайных процессов, так и новой общей алгебры для дифференциалов квантовых случайных процессов, взаимодействующих друг с другом.

В разд. 2 сформулирована модель взаимодействия широкополосного электромагнитного поля с локализованными резонансными объектами, охватывающая как «точечный» ансамбль резонансных атомов (обобщение модели Дике), так и одиночный резонансный атом в локализованном окружении из некоторого числа нерезонансных частиц, учитывающая процессы штарковского взаимодействия. В разделе 3 представлена модель взаимодействия между собой квантовых случайных процессов для описания связи широкополосных электромагнитных полей, локализованных в различных областях пространства. Далее, в разд. 4 представлено решение для простейшей модели из одного резонансного атома и двух пространственно-разделенных связанных электромагнитных полей. В Заключении приводятся соображения о месте и дальнейшем развитии предложенной теории.

2. МОДЕЛЬ ТОЧЕЧНОГО АНСАМБЛЯ В ЛОКАЛЬНОМ ШИРОКОПОЛОСНОМ ПОЛЕ

Самая простая и естественная модель открытой системы — модель спонтанного излучения возбужденного атома — описывается гамильтонианом стандартного вида, состоящим из гамильтониана изолированного атома H_a (квантовой частицы), гамильтониана свободного электромагнитного поля H_f и оператора взаимодействия между ними V:

$$H = H_a + H_f + V. \tag{1}$$

Обычно в качестве гамильтониана H_a берется гамильтониан двухуровневого атома $H_a = \hbar\omega_0 R_3/2$, а в качестве гамильтониана свободного электромагнитного поля H_f — выражение, представляющее собой поле в виде суммы квантовых осцилляторов $H_f = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}$ с операторами рождения $b_{\mathbf{k}}^\dagger$, уничтожения $b_{\mathbf{k}}$ и коммутационными соотношениями $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Здесь $\mathbf{k}$ — волновой вектор фотона, $\omega_{\mathbf{k}}$ — его частота, а состоянием поляризации фотона обычно пренебрегают. Частота атомного перехода ω_0 определяется энергиями E_1 и E_2 резонансных уровней $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$, $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$,

$$R_3 = \frac{1}{2}\left(|E_2\rangle\langle E_2| - |E_1\rangle\langle E_1|\right).$$

Наконец, в качестве оператора взаимодействия V обычно берется оператор вида

$$V = R_- \sum_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger + R_+ \sum_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}},$$

представляющий собой первый порядок алгебраической теории возмущений [18, 19], стартующей с исходного гамильтониана в электродипольном приближении и учитывающей все квантовые уровни атома. Здесь операторы $R_- = |E_1\rangle\langle E_2|$ и $R_+ = |E_2\rangle\langle E_1| = R_-^\dagger$ совместно с R_3 подчиняются коммутационным соотношениям алгебры su(2): $[R_3, R_\pm] = \pm R_\pm$, $[R_+, R_-] = 2R_3$. Параметры $\Gamma_{\mathbf{k}}$ называют параметрами связи. В обычном случае трехмерного пространства $\Gamma_{\mathbf{k}} = (2\pi\hbar kc/\ell^3)^{1/2}$, $\omega_{\mathbf{k}} = kc$ (ℓ — размер области квантования, c — скорость света).

В работе [39] Вейскопф и Вигнер на основе квантовомеханической теории возмущений вычислили спектральную ширину линии спонтанно излучающего атома. Было понято (см. исторический обзор в книге [21]), что особенностью квантованного электромагнитного поля здесь является его широкополосность и подобие шуму, учет которого превращает динамические уравнения Шредингера и/или Гейзенберга в уравнения Ланжевена. С математической точки зрения уравнения Ланжевена являются неопределенными, так что в ряде случаев подход на основе теории дифференциальных уравнений приводит к некорректным результатам. Долгое время (начиная с 1950-х гг.) строгая теория уравнений Ланжевена существовала только для классических уравнений в виде так называемых СДУ в формах Ито и/или Стратоновича, так что вне рамок СДУ актуальной была разработка теории кинетических уравнений. В области квантовой оптики это выполнено в работах [40–42].

Дике [31] рассмотрел случай коллективного излучения N_a одинаковых атомов и предсказал явление сверхизлучения на основе анализа многочастичного гамильтониана, вероятностей перехода между коллективными энергетическими уровнями и элементарной теории возмущений (но без применения алгебраической теории возмущений и использования стохастических и кинетических уравнений). Важно, что в модели Дике элементарная теория возмущений основывалась на использованном Дике гамильтониане, который представлял собой лишь первый порядок применения алгебраической теории возмущений к общему гамильтониану. Это обычное резонансное приближение в ансамбле двухуровневых атомов. При этом реально пренебрегалось всеми поляризационными особенностями и эффективно рассматривался локализованный случай — пространственной конфигурацией атомов пренебрегалось, так что реально атомы располагались в области, размеры которой много меньше длины волны резонансного излучения. Представленная выше модель и есть модель Дике, если вместо одного атома рассматривать ансамбли одинаковых неподвижных атомов, помещенных, грубо говоря, в одну точку, т. е. в область с характерными размерами, много меньшими длины волны.

Модель Дике естественно обобщается следующим образом. Прежде всего, рассматривается взаимодействие между ансамблем одинаковых квантовых частиц и электромагнитным полем вплоть до второго порядка алгебраической теории возмущений [24]. Второй порядок алгебраической теории возмущений учитывает и лэмбовский сдвиг, и штарковское взаимодействие атома с квантованным электромагнитным полем. В отличие от обычной теории возмущений, второй порядок алгебраической теории возмущений равносилен суммированию некоторого бесконечного ряда обычной теории возмущений. Далее можно заменить суммирование по волновым векторам фотонов интегрированием, после чего выполнить усреднение исходных операторов рождения и уничтожения по различным ориентациям волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{n}\nu\omega_0/c$ фотона [24]:

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \left(\frac{\ell\omega_0}{2\pi c}\right)^3 \int_0^\infty 4\pi\nu^2 d\nu \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi}, \quad \int d\Omega_{\mathbf{n}} \equiv \int d\Omega_{\mathbf{k}}.$$

После перехода к безразмерным переменным обобщенная указанным выше образом модель Дике описывается уравнением Шредингера в представлении взаимодействия для оператора эволюции $U(\tau)$ системы «атом + электромагнитное поле»

$$\frac{d}{d\tau}U(\tau) = -i\left(H^{Tr}(\tau) + H^{St}(\tau) + V^{Dip-Dip}\right)U(\tau), \quad U(0) = I, \tag{2}$$

с эффективным гамильтонианом

$$\begin{aligned} H^{Tr}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\nu\, b_\nu^\dagger e^{i(\nu-1)\tau}\chi(\nu)R_- + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\nu\, b_\nu e^{i(\nu-1)\tau}\chi(\nu)R_+, \\ H^{St}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\nu\, b_\nu^\dagger e^{i(\nu-1)\tau} \times \\ &\times \int_0^\infty d\nu'\, b_{\nu'} e^{-i(\nu'-1)\tau} \times \\ &\times \left\{\eta_+(\nu,\nu')\frac{N_a}{2} + \eta_-(\nu,\nu')R_3\right\}, \\ V^{Dip-Dip} &= -\frac{\kappa}{2}(R_-R_+ + R_+R_- - N_a), \end{aligned} \tag{3}$$

$$b_\nu = \mu\frac{\sqrt{\ell^3}}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^{3/2}\nu\int\frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi}\, b_{\mathbf{n}\nu\omega_0/c},$$

$$[b_\nu, b_{\nu'}^\dagger] = \delta(\nu-\nu').$$

Здесь введены безразмерные время $\tau = \omega_0 t$ и параметры взаимодействия $\chi(\nu)$, $\eta_\pm(\nu,\nu')$, формулы для которых приведены в работе [24]. Эти формулы не так важны здесь, поскольку без учета штарковского взаимодействия, описываемого оператором $H^{St}(\tau)$, и диполь-дипольного взаимодействия, описываемого оператором $V^{Dip-Dip}$, уравнения (2) и (3) часто приводятся без подробного обоснования в качестве исходных уравнений различных моделей резонансного взаимодействия (см., например, [21, 23]). Укажем также, что операторы R_+, R_- и R_3 по-прежнему подчиняются коммутационным соотношениям алгебры su(2), но связаны с атомными операторами при помощи соотношений

$$R_3 = \frac{1}{2}\sum_i\left(|E_2\rangle^{(i)}\langle E_2|^{(i)} - |E_1\rangle^{(i)}\langle E_1|^{(i)}\right),$$

$$R_- = \sum_i |E_1\rangle^{(i)}\langle E_2|^{(i)}, \quad R_+ = \sum_i |E_2\rangle^{(i)}\langle E_1|^{(i)},$$

где индекс i отмечает одинаковые атомы ансамбля.

Случай взаимодействия локализованного атомного ансамбля с однонаправленным широкополосным полем также охватывается моделью (2), (3). При этом нижний предел интегрирования в выражениях для $H^{Tr}(\tau)$ и $H^{St}(\tau)$ заменяется на $-\infty$ [28]. Именно такая замена характерна для формулировки локализованной модели в терминах СДУ [21, 23].

По поводу модели (2), (3) необходимо подчеркнуть следующее. Эта модель естественно получается в рамках стандартного квантования электромагнитного поля при выборе в картине Шредингера в исходном гамильтониане оператора электродипольного взаимодействия в виде (здесь величины размерные!)

$$V = -\int\sum_{i=1}^N \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathbf{d}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — оператор напряженности электрического поля, $\mathbf{d}_i$ — оператор дипольного момента атома, находящегося в точке $\mathbf{r}_i$. Отдельно учитывать оператор диполь-дипольного взаимодействия атомов не требуется, поскольку он получается во втором порядке алгебраической теории возмущений [24, 43, 44]. В случае локализованного атомного ансамбля и в пренебрежении поляризационными эффектами оператор диполь-дипольного взаимодействия имеет вид $V^{Dip-Dip}$, выписанный в формулах (3) [24–26]. Поскольку слагаемое $H^{St}(\tau)$ получено во втором порядке теории возмущений, всегда справедливо соотношение $\chi(\nu) \gg \eta_{\pm}(\nu,\nu')$. Тем не менее, учет штарковского взаимодействия, которым обычно (см., например, [21, 30, 40–42]) пренебрегают при выводе кинетических уравнений и которое, как следствие, не учитывают при описании оптических явлений, в ряде рассмотренных ниже случаев является принципиальным, так как обусловливает различные эффекты стабилизации возбужденных состояний [24–28].

Будем называть модель (2), (3) моделью точечного (атомного) ансамбля в локальном (вакуумном) поле. Она охватывает как стандартные и широко известные частные случаи взаимодействий квантовой системы и электромагнитного поля, так и модели взаимодействия полей. Известные случаи взаимодействия широкополосного поля с выделенной фотонной модой описываются в марковском приближении винеровскими СДУ (см. [21] и литературу в [27, 37]). В случае взаимодействия широкополосных полей модель точечного ансамбля в локальном поле предполагает использование сравнительно нового математического аппарата — невинеровских квантовых СДУ [20, 24–27].

3. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПОЛЕЙ

Взаимодействия полей между собой возникают всегда, если рассматривать процессы резонансного воздействия двух и более полей на квантовые частицы с точностью до второго порядка алгебраической теории возмущений [27]. Во втором порядке алгебраической теории возмущений появляются «интерференционные» слагаемые. Они подробно перечислены в работе [27] для разных комбинаций классического поля, локализованной квантованной моды и квантованного широкополосного поля. Основными процессами, описываемыми вторым порядком алгебраической теории возмущений, являются процессы штарковского взаимодействия полей с атомами [18, 19]. В случае, когда в задаче уже выделены некоторые частоты, например, есть частота резонансной моды микрорезонатора или есть частота резонансного перехода квантовой частицы, с которой взаимодействуют рассматриваемые электромагнитные поля, эффективные операторы взаимодействия полей $H^{Int}(\tau)$ приобретают достаточно общий, стандартный и понятный вид [27].

В классическом электромагнитном поле (с напряженностью электрического поля $E^{Cl} = \mathcal{E}(\tau)e^{-i\nu_{cl}\tau} + \text{c.c.}$, несущей частотой ν_{cl} и медленно меняющейся амплитудой $\mathcal{E}(\tau)$, где все величины — безразмерные) оператор штарковского взаимодействия для атомного ансамбля имеет простой вид [18, 19]:

$$H^{St-Cl}(\tau) = |\mathcal{E}(\tau)|^2 \sum_{i,k} \Pi_k(\nu_{cl}) |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}.$$

Здесь $\Pi_k(\nu_{cl})$ — безразмерный параметр штарковского взаимодействия.

Для квантованных полей шумовых источников в условиях пренебрежения поляризацией и для простой модовой структуры оператор штарковского взаимодействия H^{St} для атомного ансамбля, локализованного в области размерами, много меньшими характерной длины волны, можно получить из классического случая путем замены

$$\mathcal{E} \to \int d\nu'_n \Gamma(\nu'_n) b_{\nu'_n} e^{-i\nu'_n \tau},$$

$$\mathcal{E}^* \to \int d\nu'_n \Gamma(\nu'_n) b^{\dagger}_{\nu'_n} e^{i\nu'_n \tau},$$

$$\Pi_k(\nu_{cl}) \to \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\nu_n) + \Pi_k(\nu'_n)\right),$$

так что при удалении индекса n у частей ν_n и ν'_n получаем формулу (3).

Если квантованных широкополосных полей несколько — два и более, — то оператор штарковского взаимодействия атомов ансамбля получается аналогичной заменой, в которой одному полю отвечает индекс n, другому — индекс m, при этом центральные частоты полей совпадают с частотами резонансного перехода. Если рассматривается многофотонный атомный переход, то центральные частоты полей различны, но связаны друг с другом.

В результате описанной процедуры, обоснованной в работе [27], получаются операторы штарковского взаимодействия полей с атомами, которые интерпретируются как операторы взаимодействия между полями. При этом типичные примеры операторов взаимодействия полей могут быть интерпретированы на языке уничтожения фотона одного поля и рождения фотона другого поля. Также полученные операторы (возможно, в частном случае) совпадают с операторами связи полей на зеркалах или иных границах, разделяющих различные области пространства, и могут быть интерпретированы как операторы переноса электромагнитного поля из одной области пространства в другую. Рисунок 1 иллюстрирует указанную интерпретацию.

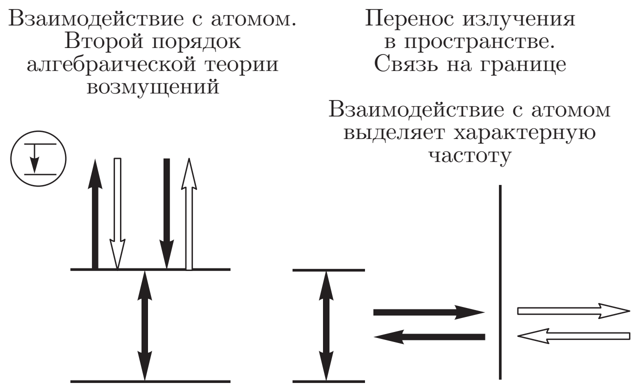

Рис. 1. Аналогия между процессами взаимодействия полей с атомом во втором порядке алгебраической теории возмущений и процессом переноса излучения через границу раздела различных областей пространства

Однако могут возникать математические проблемы при использовании получаемых операторов в марковском приближении. До сих пор эти проблемы были решены только для случаев, когда одно из взаимодействующих полей было одномодовым или когда широкополосные поля были одинаковыми, будучи генерируемыми одним и тем же источником. Решение проблемы было найдено при помощи определения квантовых случайных процессов и формулировки уравнения Шредингера для оператора эволюции как СДУ. Основой таких решений послужили алгебры Гардинера и Коллет [23] и Хадсона и Партасарати [29] для дифференциалов Ито квантовых случайных процессов.

В случае двух различных широкополосных полей основной математической проблемой формулировки СДУ служит отсутствие на сегодняшний день конструкций соответствующих случайных процессов и алгебры, которая бы описывала дифференциальные соотношения. Некоторые идеи построения таких случайных процессов как обобщения квантовых случайных процессов с обобщенной алгеброй типа Хадсона – Партасарати были высказаны в работе автора [28].

До работ автора [24–28] штарковское взаимодействие с квантованным широкополосным электромагнитным полем никем не учитывалось. Однако в работе [24] показано, что в условиях марковского приближения оператор штарковского взаимодействия определяется считывающим квантовым случайным процессом

$$\begin{gathered}
\Lambda(\tau) = \int\limits_0^{\tau} d\tau' b^{\dagger}(\tau') b(\tau'), \\
b(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu\, e^{-i\nu\tau} b_{\nu}, \\
d\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau + d\tau) - \Lambda(\tau), \quad \langle d\Lambda(\tau)\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

В самом деле, так как имеется представление (3) для оператора штарковского взаимодействия $H^{St}(\tau)$, то в марковском приближении оно переходит в следующее:

$$\begin{aligned}
&H^{St}(\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{G^{St}}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} d\nu\, b_{\nu}^{\dagger} e^{i(\nu-1)\tau} \int\limits_0^{\infty} d\nu'\, b_{\nu'} e^{-i(\nu'-1)\tau} d\tau \approx \\
&\approx \frac{G^{St}}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} d\nu\, b_{\nu}^{\dagger} e^{i(\nu-1)\tau} \int\limits_0^{\infty} d\nu'\, b_{\nu'} e^{-i(\nu'-1)\tau} d\tau = \\
&= G^{St} d\Lambda(\tau).
\end{aligned} \tag{5}$$

В условиях точечного ансамбля одинаковых атомов в количестве N_a штук величина G^{St} представляет собой атомный оператор:

$$G^{St} = \left\{ \eta_+(\nu_0, \nu_0) \frac{N_a}{2} + \eta_-(\nu_0, \nu_0) R_3 \right\}.$$

Нетрудно показать, что выражение (5) для оператора штарковского взаимодействия с резонансными атомами обобщается на случай штарковского взаимодействия с нерезонансными атомами. Так, в случае одного резонансного атома в локальном окружении из $N_{non\text{-}resonant}$ атомов легко можно получить, что величина G^{St} пропорциональна единичному оператору:

$$G^{St} = \eta(\nu_0, \nu_0) N_{non\text{-}resonant}.$$

В результате из оператора (5) исчезают атомные операторы, так что, по сути, оператор (5) определяет лишь динамику широкополосных квантованных электромагнитных полей с нулевой плотностью фотонов. В этой связи необходимо отметить следующее.

Если открытая система характеризуется какими-либо фиксированными частотами (например, частоты переходов в атоме, пусть и нерезонансном), но в системе отсутствуют резонансные процессы, то в математическом описании открытой системы и ее окружения не будет операторов, которые бы нетривиально коммутировали с оператором $d\Lambda(\tau)$. Тогда вклад в кинетическое уравнение всей системы считывающий процесс вносить не будет, поскольку имеет место условие $\langle d\Lambda(\tau)\rangle = 0$.

Однако если система характеризуется каким-либо резонансным процессом, например содержит резонансный атом, то взаимодействие с ним выделяет у вакуумного поля характерную центральную частоту, и из вакуумного поля выделяется шумовой источник, динамика и взаимодействия которого влияют на всю динамику открытой системы [27].

Здесь уместно напомнить, что, в отличие от классических случайных процессов, квантовый случайный процесс изначально характеризуется тремя процессами: рождающим, уничтожающим и считывающим, дифференциалы Ито которых связаны друг с другом. Рождающий и уничтожающий квантовые процессы представляются величинами соответственно $B^\dagger(\tau)$ и $B(\tau)$, причем $B(\tau) = \int_0^\tau d\tau' b(\tau')$.

В терминах рождающего и уничтожающего квантовых случайных процессов оператор перехода $H^{Tr}(\tau)$ следует записывать совместно с дифференциалом времени, и для модели (2), (3) точечного (атомного) ансамбля в локальном (вакуумном) поле он представляется в виде следующего дифференциала Ито [24]:

$$H^{Tr}(\tau)\,d\tau = Y^\dagger dB(\tau) + Y\,dB^\dagger(\tau),$$
$$Y = \chi(\nu_0)R_-, \quad Y^\dagger = \chi(\nu_0)R_+.$$

При этом $dB(\tau)\,dB^\dagger(\tau) = d\tau$, $dB^\dagger(\tau)\,dB(\tau) = 0$.

Однако считывающий квантовый процесс $\Lambda(\tau)$ обладает другими алгебраическими свойствами (по сравнению с рождающим и уничтожающим процессами). Эти алгебраические свойства видны из алгебры для дифференциалов Ито упомянутых процессов:

$$\begin{gathered} d\Lambda(\tau)\,d\Lambda(\tau) = d\Lambda(\tau), \quad d\Lambda(\tau)\,dB^\dagger(\tau) = dB^\dagger(\tau),\\ dB(\tau)\,d\Lambda(\tau) = dB(\tau), \quad dB(\tau)\,dB^\dagger(\tau) = d\tau,\\ dB^\dagger(\tau)\,dB(\tau) = dB(\tau)\,dB(\tau) = d\Lambda(\tau)\,dB(\tau) =\\ = d\Lambda(\tau)\,d\tau = dB^\dagger(\tau)\,d\Lambda(\tau) = dB(\tau)\,dt =\\ = d\tau\,d\tau = 0,\\ \langle dB(\tau)\rangle = \langle dB^\dagger(\tau)\rangle = \langle d\Lambda(\tau)\rangle = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Впервые указанные соотношения, как и процессы $\Lambda(\tau)$, $B^\dagger(\tau)$ и $B(\tau)$, построены и математически корректно определены Хадсоном и Партасарати [29], так что алгебру (6) удобно называть алгеброй Хадсона – Партасарати. При этом введенные процессы определяют квантовые винеровский и пуассоновский процессы по формулам

$$W(\tau) = B(\tau) + B^\dagger(\tau), \quad P(\tau) = \Lambda(\tau) + i(B^\dagger(\tau) - B(\tau)).$$

Пренебрежение в задачах квантовой оптики процессами, определяемыми считывающим процессом $\Lambda(\tau)$, позволяет отдельно рассматривать алгебру для рождающего и уничтожающего процессов и учитывать отличное от нуля число фотонов широкополосного дельта-коррелированного электромагнитного поля. Такой алгеброй и является алгебра Гардинера – Коллет [23].

Важным обстоятельством является то, что параметр штарковского взаимодействия оказывается пропорциональным числу атомов (резонансных атомов в резонансном ансамбле или нерезонансных одинаковых атомов в локализованном окружении). При этом он по-прежнему намного меньше соответствующей величины, определяющей резонансное однофотонное взаимодействие. Однако из-за особенностей алгебры Хадсона – Партасарати роль считывающего процесса в таких задачах с ростом числа атомов возрастает [24–28, 37], поэтому возникают случаи, когда учет малых взаимодействий, определяемых считывающим процессом, становится необходимым. Однако при этом остается нерешенной проблема описания таких процессов при помощи СДУ в случае ненулевой плотности числа фотонов вакуумных полей.

Алгебра Хадсона – Партасарати позволяет тривиально вычислить дифференциал Ито оператора эволюции $dU(\tau) = U(\tau + d\tau) - U(\tau)$, раскладывая экспоненту в $dU(\tau)$,

$$\begin{aligned} dU(\tau) = \big\{\exp\big(-i\left(Y^\dagger dB(\tau) + Y\,dB^\dagger(\tau)\right) +\\ + G^{St} d\Lambda(\tau)\big) - 1\big\}\,U(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dU(\tau) = -iH^{Eff-S}(\tau)\,d\tau\,U(\tau) +\\ + Y^\dagger \frac{G^e_{St} + iG^{St}}{(G^{St})^2}\,YU(\tau)\,d\tau +\\ + \left(Y + \frac{G^e_{St}}{G^{St}}\,dB(\tau) + \frac{G^e_{St}}{G^{St}} Y\,dB^\dagger(\tau) + G^e_{St} d\Lambda(\tau)\right) U(\tau), \end{aligned}$$

$$G^e_{St} = e^{-iG^{St}} - 1, \quad Y = \chi_0 R_-.$$

Здесь через $H^{Eff-S}(\tau)$ обозначен эффективный гамильтониан, который может учитывать различные процессы взаимодействий, но из него исключены процессы с участием $dB(\tau)$ и $d\Lambda(\tau)$. Важно подчеркнуть, что при переходе от первого выражения ко второму для дифференциала Ито оператора эволюции учтены все слагаемые в разложении экспоненты.

Важная роль считывающего процесса в динамике открытых квантовых систем впервые установлена в работе [24] на примере сверхизлучения Дике. Несмотря на свою малость для отдельного атома, в ансамбле из одинаковых атомов возрастает роль этого малого процесса $\Lambda(\tau)$ с ростом числа атомов, и благодаря «считывающему» соотношению $d\Lambda(\tau)\,d\Lambda(\tau) = d\Lambda(\tau)$ он начинает влиять на излучательные переходы, определяемые $B(\tau)$ и $B^\dagger(\tau)$. В результате коллективное спонтанное излучение начинает зависеть от эффективного числа атомов ансамбля и становится возможным эффект полного подавления коллективного сверхизлучения [24–28]. Этот эффект легко вычисляется аналитически, однако его трудно обнаружить численными методами, поскольку он подобен обнаружению нулей осциллирующих функций типа $\sin x$, если исследовать только первые слагаемые разложения таких функций в ряд. К тому же в случае коллективного спонтанного излучения несколько первых слагаемых ряда оказываются нулевыми [24].

Чтобы теперь воспользоваться установленной выше аналогией для связи широкополосных полей, локализованных в различных областях пространства, и сформулировать модель пространственно-разделенных широкополосных электромагнитных полей с нулевой плотностью фотонов, взаимодействующих между собой и с резонансными атомами, необходимо ввести новые квантовые случайные процессы и установить алгебру для их дифференциалов Ито. Собственно после формулировки такой алгебры можно строить любые модели, отвечающие самым разнообразным физическим ситуациям. Поэтому ограничимся только построением алгебры. Идея такого построения высказана в работе [28].

Введем новые квантовые процессы, обусловленные широкополосными квантованными полями:

$$b_s(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i(\nu-\nu_0)\tau} b_{\nu,s},$$

$$B_s(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' b_s(\tau'), \quad dB_s(\tau) = B_s(\tau+d\tau) - B_s(\tau),$$

$$\Lambda_{ss'}(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' b_s^\dagger(\tau') b_{s'}(\tau'),$$

$$d\Lambda_{ss'}(\tau) = \Lambda_{ss'}(\tau+d\tau) - \Lambda_{ss'}(\tau),$$

$$\langle dB_s(\tau)\rangle = \langle d\Lambda_{ss'}(\tau)\rangle = 0.$$

Индекс s отмечает поля, относящиеся к s-му пространству. Величины $d\Lambda_{ss'}(\tau)$ с разными s описывают взаимодействие полей на границе, тогда как $\Lambda_{ss'}(\tau)$ с одинаковыми индексами является считывающим процессом. Взаимодействие полей на границе раздела пространств, например на зеркале, оказывается обычным взаимодействием ближайших соседей. Алгебру для дифференциалов Ито введенных процессов, обобщающую алгебру Хадсона–Партасарати (6), рассмотрим (для простоты) для случая двух пространств $s = 0, 1$. При этом выпишем только ненулевые элементы обобщенной алгебры дифференциалов:

$$\begin{aligned}
dB_s(\tau)\,dB^\dagger_{s'}(\tau) &= d\tau\,\delta_{ss'},\\
d\Lambda_{sj}(\tau)\,d\Lambda_{sj}(\tau) &= d\Lambda_{sj}(\tau)\delta_{sj},\\
d\Lambda_{sj}(\tau)\,d\Lambda_{js}(\tau) &= d\Lambda_{ss}(\tau),\\
dB_0(\tau)\,d\Lambda_0(\tau) &= dB_0(\tau),\\
d\Lambda_0(\tau)\,dB^\dagger_0(\tau) &= dB^\dagger_0(\tau),\\
d\Lambda_{10}(\tau)\,dB^\dagger_0(\tau) &= dB^\dagger_1(\tau),\\
dB_0(\tau)\,d\Lambda_{01}(\tau) &= dB_1(\tau),\\
d\Lambda_{01}(\tau)\,dB^\dagger_1(\tau) &= dB^\dagger_0(\nu),\\
dB_1(\tau)\,d\Lambda_{10}(\tau) &= dB_0(\tau).
\end{aligned} \tag{7}$$

Полученные соотношения позволяют рассматривать самые разнообразные задачи с участием пространственно-разделенных широкополосных электромагнитных полей с нулевой плотностью фотонов, взаимодействующих между собой и с резонансными и нерезонансными атомами. Однако в данной статье мы далее сосредоточимся на случае двух полей.

Даже в случае двух взаимодействующих широкополосных полей общий вид задачи весьма сложен, так как в выражение для дифференциала Ито оператора эволюции входит много случайных процессов:

$$\begin{aligned}
dU(\tau) = \Bigg\{ \exp\Bigg(-i\Bigg(& H^{Eff-S}(\tau)\,d\tau \; + \\
&+ \sum_j \left(Y_j^+ dB_j(\tau) + Y_j dB_j^+(\tau) + G_j^{St} d\Lambda_{jj}(\tau)\right) + \\
&+ \;\kappa\, d\Lambda_{01}(\tau) + \kappa\, d\Lambda_{10}(\tau)\Bigg)\Bigg) - 1\Bigg\} U(\tau).
\end{aligned} \tag{8}$$

Через κ обозначена константа связи полей на границе раздела.

В заключение раздела заметим, что техника СДУ отражает «вездесущность» центральной предельной теоремы, которая лежит в основе применения СДУ и в данных задачах. Наконец, необходимо отметить, что связь между полями на границе раздела подпространств можно также обосновывать, используя разложение Ванье из физики твердого тела и идеи работы [38]. Именно так раньше строились модели распространения в пространстве квантованного электромагнитного поля.

4. ВЛИЯНИЕ «СОСЕДНЕГО» ВАКУУМНОГО ПОЛЯ С НУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ НА ДИНАМИКУ РЕЗОНАНСНОГО АТОМА

Существенное упрощение задачи о взаимодействии широкополосных полей между собой и с резонансными атомами возникает в случае одного атома или ансамбля, локализованного в одном пространстве, в котором несущественно штарковское взаимодействие, и пустого (без резонансных и нерезонансных частиц) соседнего пространства. Эта ситуация, представленная на рис. 2, описывается СДУ для оператора эволюции простейшего вида:

$$dU(\tau) = \Big\{\exp\Big(-i\Big(H^{Eff-S}(\tau)\,d\tau + \Big(Y^\dagger dB_0(\tau) + Y\,dB_0^\dagger(\tau)\Big) + \kappa\,d\Lambda_{01}(\tau) + \kappa\,d\Lambda_{10}(\tau)\Big)\Big) - 1\Big\}\,U(\tau). \quad (9)$$

Раскладывая в ряд экспоненту в (8) и используя соотношения (6), нетрудно просуммировать весь ряд и получить СДУ для оператора эволюции:

$$\begin{aligned} dU(t) = -i\Bigg(&H^{Eff-S}(t)\,dt + \frac{\sin\kappa}{\kappa}\Big(Y^\dagger dB_0(t) + Y\,dB_0^\dagger(t)\Big) + \\ &+ \sin\kappa\,(d\Lambda_{01}(t) + d\Lambda_{10}(t))\Bigg)U(t) - \\ -\Bigg(&\frac{1-\cos\kappa}{\kappa^2}Y^\dagger Y\,dt + \frac{1-\cos\kappa}{\kappa}\Big(Y^\dagger dB_1(t) + Y\,dB_1^\dagger(t)\Big) + \\ &+ (1-\cos\kappa)\,(d\Lambda_0(t) + d\Lambda_1(t))\Bigg)U(t). \quad (10)\end{aligned}$$

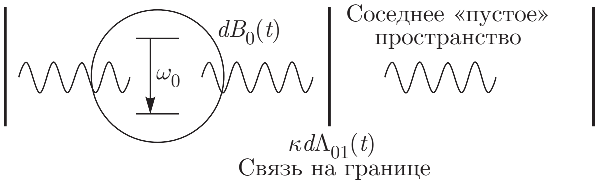

Рис. 2. Схематическое изображение взаимодействия широкополосных полей на границе раздела между подпространствами. В левом подпространстве поля участвуют также в резонансном взаимодействии с ансамблем двухуровневых атомов (или с одиночным атомом)

Уравнение для матрицы плотности всей системы, состоящей из атома и связанных вакуумных полей, получается применением стандартной процедуры [24]. Уравнение для матрицы плотности имеет вид

$$d\rho(\tau) \equiv \rho(\tau + d\tau) - \rho(\tau),$$

$$\begin{aligned}\rho(\tau + d\tau) &= |\Psi(\tau + d\tau)\rangle\langle\Psi(\tau + d\tau)| = \\ &= U(\tau + d\tau)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(\tau + d\tau),\end{aligned}$$

$$U(\tau + d\tau) = U(\tau) + dU(\tau),$$

$$\begin{aligned}d\rho(\tau) = dU(\tau)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(\tau) + U(\tau)|\Psi(0)\rangle \times \\ \times \langle\Psi(0)|dU^\dagger(\tau) + dU(\tau)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(\tau).\end{aligned}$$

После усреднения по состояниям вакуумных полей $\langle\rho(\tau)\rangle = \rho^S(\tau)$ получаем кинетическое уравнение для атомной матрицы плотности $\rho^S(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\rho^S(\tau)}{d\tau} = -iH^{Eff-S}(\tau)\rho^S(\tau) + i\rho^S(\tau)H^{Eff-S}(\tau) - \\ - \frac{1-\cos\kappa}{\kappa^2}\rho^S(\tau)Y^\dagger Y - \frac{1-\cos\kappa}{\kappa^2}Y^\dagger Y\rho^S(\tau) + \\ + 2\frac{1-\cos\kappa}{\kappa^2}Y\rho^S(\tau)Y^\dagger. \quad (11)\end{aligned}$$

Полученное уравнение имеет форму Линдблада. Любопытной является зависимость параметров уравнения Линдблада от константы связи полей κ. Как и в случае штарковского взаимодействия широкополосного поля с атомом или атомным ансамблем [24], константа связи между полями встраивается в обычный марковский параметр релаксации атома, что представляется удивительным, поскольку алгебра (7) полей, связанных друг с другом на границе раздела пространств их существования, несколько отличается от простой алгебры Хадсона–Партасарати (6). Также с ростом величины константы связи между полями уменьшается скорость релаксации, что говорит о своеобразной интерференции процесса непосредственного радиационного перехода в возбужденном атоме с излучением фотона и процесса виртуальной переброски фотонов из одного пространства в другое и обратно. Такая физическая интерпретация отвечает алгебраической природе как процесса $\Lambda_{ss'}(\tau)$, $s \neq s'$, описывающего связь широкополосных полей, так и считывающих процессов $\lambda_{ss}(\tau)$, которые возникают, начиная со второго порядка разложения экспоненты в (9). Возможно ли такое проявление в подходах, не основанных на СДУ, автору неясно, но полученная алгебра (7) позволила провести вычисления аналитически и просуммировать весь бесконечный ряд в (9).

Закономерно, что не только операторы связи полей в случае штарковского взаимодействия сходны с операторами связи полей на зеркалах или иных границах, разделяющих различные области пространства. Константа связи полей вошла в операторы Линдблада уравнения (11) так же, как параметр штарковского взаимодействия проявился в релаксационных операторах Линдблада в случае невинеровского сверхизлучения ансамбля одинаковых атомов [24].

В отличие от интерференционных эффектов в коллективной релаксации локализованного ансамбля одинаковых возбужденных атомов, в случае связанных широкополосных полей, как это следует из формулы (11), отсутствует динамический сдвиг атомной частоты, который в случае [24–28] возникал как вклад релаксационных процессов в обратимую эволюцию атомной системы. Причина данного факта автору пока не ясна. Общая теория динамики открытых систем в марковском приближении говорит о возможности такой динамики, когда релаксационные процессы сопровождаются не только однородным уширением спектральной линии атома, но и сдвигом его резонансной частоты, который является дополнительным сдвигом и отличается от лэмбовского сдвига [24]. Именно желание получить сдвиг атомной частоты вследствие релаксационной динамики послужили одним из стимулов разработки методов теории невинеровских СДУ [24–28]. Возможно, в отсутствии динамического сдвига частоты и проявляется отличие случая связанных, но пространственно-разделенных полей от случая релаксационной динамики атома в локальном широкополосном поле.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модели спонтанного излучения атома и атомных ансамблей относятся не только к фундаментальным общетеоретическим моделям квантовой оптики, но и к экспериментально проверяемым моделям. Однако результаты теории на основе невинеровских СДУ относительно одного атома пока не являются показательными с точки зрения экспериментальных исследований. Учет штарковского взаимодействия одного атома с квантованным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов характеризуется ничтожно малой поправкой — эффект штарковского взаимодействия проявляется лишь в достаточно многоатомном ансамбле (оценки см. в работе [24]), при этом необходимо, чтобы ансамбль был локализован в области пространства с размерами, много меньшими длины волны, и неоднородным уширением спектральной линии можно было бы пренебречь. Однако сам математический аппарат, использованный при расчетах, весьма знаменателен — вычисления в марковском приближении удается провести в аналитическом виде без дальнейших упрощений, просуммировав все возникающие бесконечные ряды.

Одиночный атом в окружении достаточного количества нерезонансных атомов уже демонстрирует эффект подавления релаксации штарковским взаимодействием атомов окружения, но здесь также существенным фактором является локализованность окружения — и атом и его нерезонансное окружение также должны быть локализованы в области пространства с размерами, много меньшими длины волны. Этот результат находится в «противоречии» с хорошо известным свойством диэлектрической среды, увеличивающей скорость спонтанного излучения. Однако это противоречие пока только кажущееся, так как диэлектрическая среда является протяженной средой и не удовлетворяет требованиям, необходимым для реализации условий подавления релаксации штарковским взаимодействием. Но данное обстоятельство указывает на определенную востребованность распространения теории на основе СДУ невинеровского типа на протяженные среды. Данная статья представляет собой первый шаг в этом направлении.

Вариант обобщения теории открытых систем на основе невинеровских СДУ для описания протяженных открытых систем потребовало введения представления о связанных широкополосных вакуумных полях, каждое из которых локализовано в своей области пространства. Автору не известны другие математические объекты, а также работы в области квантовых СДУ, в которых основные квантовые случайные процессы характеризовались бы дополнительным пространственным параметром. Более того, автору не известны разумные приложения техники невинеровских СДУ к квантовой динамике атомных систем в широкополосном квантованном поле с нулевым числом фотонов. В работах типа [45] рассматривались модели взаимодействия квантовой частицы с квантовым считывающим процессом без какого-либо обоснования и в условиях, когда алгебры дифференциалов Ито, типа Хадсона–Партасарати, не существует.

Автору представляется интересным проследить и, быть может, воспользоваться возможной аналогией между представленными вычислениями и вычислениями в технике ренормгруппового преобразования оператора эволюции [46]. В технике вычислений на основе обобщенной алгебры (7) дифференциал Ито оператора эволюции (8) или (9) разлагается в ряд и, благодаря считывающему свойству операторов $d\Lambda_{jj}$, этот ряд удается полностью просуммировать. В подходе [46] оператор эволюции представляется произведением операторов эволюции для малых интервалов времени и развивается техника работы с такими произведениями — непрерывными произведениями матриц. Однако авторы [46], как и [16,17], изначально не использовали алгебраическую теорию возмущений для получения эффективного гамильтониана, и слагаемые, отвечающие за штарковские взаимодействия, у них отсутствуют. Аналогии с ренормгрупповым преобразованием в задачах квантовой оптики в случае квантовых случайных процессов, включая считывающий, автору неизвестны, хотя для винеровского процесса это представляется очевидным, поскольку гауссовское распределение является неподвижной точкой ренормгруппового преобразования [47].

Что касается рассмотренной в статье модельной ситуации, то ее разработка стимулировалась результатами применения техники невинеровских СДУ к задаче о коллективном спонтанном излучении. Полученное обобщение алгебры Хадсона – Партасарати (7) необходимо для распространения модели точечного атомного ансамбля в широкополосном квантованном поле на случай учета пространственно-распределенных атомов. При этом в качестве примера типичной ситуации описан случай, в котором нет необходимости рассматривать штарковское взаимодействие широкополосных полей одного пространства с одним атомом, так как других атомов нет. Однако СДУ, описывающие такую ситуацию, являются уравнениями невинеровского типа, управляемыми обобщенной алгеброй (7). Представляет определенный интерес исследовать другие подобные модели, управляемые обобщенной алгеброй (7), в том числе и в случае большего числа связанных электромагнитных полей и их взаимодействий с локализованными атомными ансамблями. Представленная математика взаимодействия широкополосных квантованных полей позволяет надеяться на аналитическое исследование нового и широкого класса задач квантовой оптики, включая топологические задачи.

Автор выражает благодарность И. Р. Габитову за информацию и обсуждение результатов работы [34], А. И. Трубилко за обсуждение проблемы взаимодействия широкополосных полей в марковском приближении и информацию о работе [46].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00453а).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Zwanzig, J. Chem. Phys. **33**, 1338 (1960).

2. R. Zwanzig, Phys. Rev. **129**, 486 (1963).

3. Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды.* В трех томах, Наук. думка, Киев (1969–1971).

4. M. Bonitz, *Quantum Kinetic Theory*, B. G. Teubner, Stuttgart (1989).

5. Д. В. Кузнецов, Вл. К. Рерих, М. Г. Гладуш, ЖЭТФ **140**, 742 (2011).

6. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ **39**, 197 (1960).

7. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **47**, 1483 (1964).

8. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **48**, 365 (1965).

9. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).

10. B. R. Mollow, Phys. Rev. A **12**, 1919 (1975).

11. W. Konyk and J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. A **93**, 063807 (2016).

12. A. Nysteen et al., New J. Phys. **17**, 023030 (2015).

13. Z. Liao, X. Zeng, H. Nha, and M. Zubairy, Phys. Scripta **91**, 063004 (2016).

14. S. R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992).

15. U. Schollwock, Rev. Mod. Phys. **77**, 259 (2005).

16. F. Verstraete and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **104**, 190405 (2010).

17. H. Pichler and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **116**, 093601 (2016).

18. А. М. Башаров, *Фотоника. Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике*, МИФИ, Москва (1990).

19. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).

20. А. М. Башаров, в сб. *Когерентная оптика и оптическая спектроскопия*, XVII Всероссийская молодежная научная школа, под ред. М. Х. Салахова, КГУ, Казань (2013), с. 19–47.

21. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000, 2004).

22. H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford (2003).

23. C. W. Gardiner and M. J. Collet, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).

24. A. M. Basharov, Phys. Rev. A **84**, 013801 (2011).

25. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **94**, 28 (2011).

26. А. М. Башаров, ЖЭТФ **140**, 431 (2011).

27. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).

28. А. М. Башаров, Опт. и спектр. **116**, 2 (2014).

29. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **93**, 301 (1984).

30. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).

31. R. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

32. P. G. Brooke, K.-P. Marzlin, J. D. Cresser, and B. C. Sanders, Phys. Rev. A **77**, 033844 (2008).

33. J. T. Manassah, Laser Phys. **20**, 1397 (2010).

34. S. Xiao, V. P. Drachev, A. V. Kildishev, X. Ni, U. K. Chettiar, H.-K. Yuan, and V. M. Shalaev, Nature **466**, 735 (2010).

35. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).

36. M. Tavis and F. W. Cummings, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).

37. A. M. Basharov, Phys. Lett. A **376**, 1881 (2012).

38. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, J. Phys. A **33**, 3771 (2000).

39. V. Weisskopf and E. Wigner, Zs. f. Phys. **63**, 54 (1930); **65**, 18 (1930) (in Collected Works of E. P. Wigner. The Scientific Papers (1997), Vol. AIII, p. 30, 50).

40. H. Haken, Z. Phys. **181**, 96 (1964).

41. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).

42. J. P. Gordon, L. R. Walker, and W. Louisell, Phys. Rev. **130**, 806 (1963).

43. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, Wiley (2004).

44. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley (1997).

45. B. Q. Baragiola et al., Phys. Rev. A **86**, 013811 (2012).

46. K. A. Fischer et al., arXiv:1710.02875v3 [quant-ph] 17 Nov 2017.

47. G. Jona-Lasinio, Phys. Rep. **352**, 439 (2001).