ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 3, стр. 498–503

ПОРОГИ ПРОТЕКАНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В БИНАРНЫХ КОМПОЗИТАХ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 октября 2017 г.

Рассмотрены фазовые переходы типа металл–диэлектрик и металл–«сверхпроводник», связанные с порогами протекания в двухкомпонентных композитах. Поведение эффективной проводимости σ_e в окрестности обоих порогов описано в рамках гипотезы подобия. Для случайно-неоднородных систем установлено однозначное соответствие между выражениями для σ_e в обеих критических областях.

DOI: 10.7868/S004445101803015X

1. ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель, используемая в теории протекания [1–3], представляет собой неупорядоченную бинарную («черно-белую») структуру. С изменением концентрации (доли занимаемого объема) p первой («белой») компоненты в соответствующей трехмерной модели происходят следующие метаморфозы [1–3]. При $0 \leqslant p < p_{c1}$, где p_{c1} — первая критическая концентрация, отсутствует протекание по первой компоненте и имеет место по второй. Напротив, при $p_{c2} < p \leqslant 1$ (где p_{c2} — вторая критическая концентрация) есть протекание только по первой компоненте. А при промежуточных концентрациях ($p_{c1} \leqslant p \leqslant p_{c2}$) сосуществуют протекания по обеим компонентам. Критические концентрации p_{c1} и p_{c2} называют также порогами протекания. Отметим, что в двумерном случае наличие протекания по белой компоненте исключает возможность протекания по черной и наоборот, так что здесь критическая концентрация одна.

Результаты математического раздела теории протекания приобретают реальное наполнение в физической модели композита, в которой первой и второй компонентам приписываются проводимости соответственно σ_1 и σ_2. В этой модели существование порогов протекания проявляется в форме фазовых переходов, которые могут иметь место в эффективной проводимости σ_e при $p = p_{c1}$ и $p = p_{c2}$. Так, если вторая компонента имеет нулевую проводимость, то в такой системе при $p = p_{c1}$ происходит фазовый переход металл–диэлектрик: величина $\sigma_e \neq 0$ при $p > p_{c1}$ и $\sigma_e = 0$ при $p < p_{c1}$. Если же вторая компонента является идеальным проводником, то при $p = p_{c2}$ происходит фазовый переход металл–«сверхпроводник» (металл–идеальный проводник): σ_e конечна при $p > p_{c2}$ и $\sigma_e = \infty$ при $p < p_{c2}$. Аномалии в поведении величины σ_e в окрестности точек p_{c1} и p_{c2} сохраняются и в системах с конечными, но резко различающимися, проводимостями компонент.

В настоящей работе оба фазовых перехода рассмотрены с единых позиций. Поведение эффективной проводимости σ_e в окрестности порогов p_{c1} и p_{c2} описано в духе гипотезы подобия [1–3]. В обоих случаях введены критические индексы и установлены соотношения между ними. Для безразмерной эффективной проводимости $f = \sigma_e/\sigma_1$ в каждой критической области найдены разложения, справедливые в рамках гипотезы подобия.

Критические индексы и другие характеристики обоих фазовых переходов, вообще говоря, не связаны друг с другом. Пороги p_{c1} и p_{c2}, зависящие от конкретной структуры (геометрии) модели, также являются независимыми величинами. Однако для случайно-неоднородных систем, не меняющих макроскопических свойств при одновременной замене $\sigma_1 \leftrightarrows \sigma_2$ и $p \to 1 - p$, имеем $p_{c2} = 1 - p_{c1}$. В этом случае существует связь между значениями эффективной проводимости в окрестностях точек фазовых переходов обоих типов. Вследствие этого в два раза уменьшается, например, число независимых критических индексов.

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

2. ПЕРЕХОД МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК

Далее рассматривается модель изотропного бинарного композита, состоящего из матрицы проводимости σ_1 (первая компонента с долей занимаемого объема p) и включений проводимости σ_2 (вторая компонента с объемной концентрацией $c = 1 - p$). Эффективную проводимость $\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)$ такой системы запишем в виде

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \, f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{1}$$

Функция $f(p, h)$ — безразмерная эффективная проводимость — играет важную роль во всей теории электрофизических свойств бинарных композитов (см., например, [4]). Поэтому всестороннее изучение величины $f(p, h)$ представляет существенный интерес для теории композитов.

Как известно [1–3], в системе с диэлектрическими ($\sigma_2 = 0$) включениями при критической концентрации (пороге протекания) p_{c1} происходит фазовый переход металл–диэлектрик: $\sigma_e \neq 0$ при $p > p_{c1}$ и $\sigma_e = 0$ при $p \leqslant p_{c1}$ или

$$p > p_{c1}: \quad f(p, 0) \neq 0, \tag{2}$$

$$p \leqslant p_{c1}: \quad f(p, 0) = 0. \tag{3}$$

Для системы с резко различающимися проводимостями компонент ($\sigma_2 \ll \sigma_1$) функция $f(p, h)$ в пределе $h \to 0$ будет иметь следующие разложения:

$$p > p_{c1}: \quad f(p, h) = f_d(p) + h \, f'_d(p) + \frac{1}{2} \, h^2 \, f''_d(p) + \ldots, \tag{4}$$

где

$$f_d(p) = f(p, 0), \quad f'_d(p) = \left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0}, \ldots \tag{5}$$

и

$$p < p_{c1}: \quad f(p, h) = h \, f_s(p) + \frac{1}{2} \, h^2 \, f'_s(p) + \ldots \tag{6}$$

Здесь

$$f_s(p) = \left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0}, \quad f'_s(p) = \left[\frac{\partial^2 f(p, h)}{\partial h^2} \right]_{h=0}, \ldots \tag{7}$$

В окрестности точки фазового перехода (вблизи порога протекания p_{c1}) эффективная проводимость σ_e описывается в рамках гипотезы подобия [1–3]. Представим соображения, приводящие к соответствующим результатам. При $h \ll 1$ и $p > p_{c1}$ включения второй компоненты вне области размазки (см. ниже) можно считать диэлектрическими. Предполагается, что в этом случае величина σ_e убывает при $p \to p_{c1}$ по степенно́му закону,

$$p > p_{c1}: \quad \sigma_e(p; \sigma_1, 0) \sim \sigma_1 \, (p - p_{c1})^{t_1}, \tag{8}$$

где t_1 — критический индекс. В (8) опущен численный множитель порядка единицы.

Ниже точки перехода (при $p < p_{c1}$) и также вне области размазки первую (высокопроводящую) компоненту можно считать идеально проводящей. При приближении к порогу протекания p_{c1} эффективная проводимость такой системы будет возрастать следующим образом:

$$p < p_{c1}: \quad \sigma_e(p; \infty, \sigma_2) \sim \frac{\sigma_2}{(p_{c1} - p)^{q_1}}, \tag{9}$$

где q_1 — второй критический индекс.

В само́й точке фазового перехода существенны конечные проводимости обеих компонент, так что

$$p = p_{c1}: \quad \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sim \sigma_1 \, \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{s_1}. \tag{10}$$

Здесь s_1 — третий критический индекс эффективной проводимости.

Выражения (8) и (10) должны «сшиваться» (сравниваться по порядку величины) при некотором $p = p_{c1} + \Delta_1$. Из этого условия находим величину

$$\Delta_1 \sim \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{s_1/t_1} = h^{s_1/t_1} \ll 1, \tag{11}$$

дающую оценку размера так называемой области размазки [1–3]. Из «сшивки» выражений (9) и (10) в симметричной точке $p = p_{c1} - \Delta_1$ получаем равенство

$$q_1 = t_1 \, \frac{1 - s_1}{s_1}. \tag{12}$$

Соотношение между критическими индексами (12) является одним из основных результатов гипотезы подобия [2, 3].

Приведенные соображения позволяют получить следующие разложения для функции

$$f(p, h) = f(p_{c1} + \tau_1, h), \quad \tau_1 = p - p_{c1}, \tag{13}$$

в критической области $h = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$ и $|\tau_1| \ll 1$:

$$\tau_1 > 0, \quad \Delta_1 \ll \tau_1 \ll 1: \quad f = \tau_1^{t_1} \, \left\{ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} \, \frac{h}{\tau_1^{t_1/s_1}} + \ldots \right\}, \tag{14}$$

$$|\tau_1| \ll \Delta_1: \quad f = h^{s_1}\left\{a_0^{(1)} + a_1^{(1)}\frac{\tau_1}{h^{s_1/t_1}} + \ldots\right\}, \quad (15)$$

$$\tau_1 < 0, \quad \Delta_1 \ll |\tau_1| \ll 1:$$
$$f = \frac{h}{(-\tau_1)^{q_1}}\left\{B_1^{(1)} + B_2^{(1)}\frac{h}{(-\tau_1)^{t_1/s_1}} + \ldots\right\}. \quad (16)$$

Здесь величина Δ_1 дается выражением (11); критические индексы t_1, s_1, q_1 положительны и связаны соотношением (12). Возможность представления функции $f(p,h)$ в виде разложений (14)–(16) является одним из предположений гипотезы подобия.

В выражениях (14)–(16) $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \ldots, a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \ldots, B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots$ — численные коэффициенты порядка единицы. При этом $A_0^{(1)} > 0$, $a_0^{(1)} > 0$, $B_1^{(1)} > 0$ в силу положительности функции $f(p,h)$. Так как эффективная электропроводность композита возрастает с увеличением проводимости второй компоненты, то

$$\frac{\partial f(p,h)}{\partial h} > 0. \quad (17)$$

Поэтому из (14) с учетом (17) находим, что и $A_1^{(1)} > 0$. Согласно [4] из условия положительности парциальных моментов напряженности электрического поля второго порядка следует как неравенство (17), так и неравенство

$$f(p,h) - h\frac{\partial f(p,h)}{\partial h} > 0. \quad (18)$$

Из формулы (16) находим

$$\tau_1 < 0, \quad \Delta_1 \ll |\tau_1| \ll 1: \quad f - h\frac{\partial f}{\partial h} = $$
$$= \frac{h}{(-\tau_1)^{q_1}}\left\{-B_2^{(1)}\frac{h}{(-\tau_1)^{t_1/s_1}} + \ldots\right\}, \quad (19)$$

откуда следует, что $B_2^{(1)} < 0$. Это неравенство отвечает тому факту, что при $p < p_{c1}$ учет конечности проводимости первой компоненты уменьшает эффективную электропроводность системы.

Подстановка в (18) выражения (15) дает

$$|\tau_1| \ll \Delta_1: \quad f - h\frac{\partial f}{\partial h} =$$
$$= (1 - s_1)a_0^{(1)}h^{s_1} + \ldots > 0. \quad (20)$$

Из этого неравенства следует, что $s_1 < 1$, так что

$$0 < s_1 < 1. \quad (21)$$

Увеличение доли высокопроводящей первой компоненты приводит к возрастанию величины σ_e, поэтому коэффициент $a_1^{(1)} > 0$. Отметим, что, как следует из (14)–(16), производная $\partial f/\partial h$ вблизи точки $p = p_{c1}$ имеет острый пик, см. [4].

3. ПЕРЕХОД МЕТАЛЛ–«СВЕРХПРОВОДНИК»

В композите с идеально проводящими включениями второй компоненты ($\sigma_2 = \infty$) при критической концентрации p_{c2} происходит фазовый переход металл–«сверхпроводник» (металл–идеальный проводник). Действительно, при $p > p_{c2}$ вторая компонента состоит из разрозненных, не связанных друг с другом островков. Поэтому протекание по ней отсутствует и композит находится в металлической фазе с конечной эффективной проводимостью σ_e. При $p < p_{c2}$ включения второй компоненты образуют так называемый бесконечный кластер [1–3], по которому происходит протекание. В этом случае композит находится в «сверхпроводящей» фазе с $\sigma_e = \infty$. Следовательно, для безразмерной эффективной проводимости имеем

$$p > p_{c2}: \quad f(p,\infty) \neq \infty, \quad (22)$$
$$p < p_{c2}: \quad f(p,\infty) = \infty. \quad (23)$$

Если σ_2 велико́, но конечно ($\sigma_2 \gg \sigma_1$), то вместо (22), (23) в пределе $h \to \infty$ будем иметь следующие разложения:

$$p > p_{c2}: \quad f(p,h) = f(p,\infty) + \frac{1}{h}F(p) + \ldots, \quad (24)$$

$$p < p_{c2}: \quad f(p,h) = h\,L(p) + M(p) +$$
$$+ \frac{1}{h}N(p) + \ldots \quad (25)$$

Здесь $F(p)$, $L(p)$, $M(p)$, $N(p), \ldots$ — некоторые функции концентрации p.

В критической области (в окрестности порога p_{c2}) эффективная проводимость σ_e обсуждаемой системы также может быть описана в духе гипотезы подобия. При $p > p_{c2}$ вне области размазки включения второй компоненты можно считать идеально проводящими. Предполагаем, что в этом случае в пределе $p \to p_{c2}$ эффективная проводимость будет возрастать по закону

$$p > p_{c2}: \quad \sigma_e(p;\sigma_1,\infty) \sim \frac{\sigma_1}{(p - p_{c2})^{q_2}} \quad (26)$$

с критическим индексом q_2.

С другой стороны, при $p < p_{c2}$ и также вне области размазки первую компоненту можно считать диэлектрической. В такой ситуации эффективная проводимость σ_e при $p \to p_{c2}$ будет убывать следующим образом:

$$p < p_{c2}: \quad \sigma_e(p;0,\sigma_2) \sim \sigma_2\,(p_{c2} - p)^{t_2}, \quad (27)$$

где t_2 — еще один критический индекс.

В само́й точке фазового перехода, где существенна конечность проводимости обеих компонент, будем иметь

$$p = p_{c2}: \quad \sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2) \sim \sigma_1 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{s_2}. \qquad (28)$$

Здесь s_2 — третий критический индекс эффективной проводимости для рассматриваемого фазового перехода.

Выражения (28) и (26) должны «сшиваться» в точке $p = p_{c2} + \Delta_2$. Из этого условия находим величину

$$\Delta_2 \sim \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{s_2/q_2} = \frac{1}{h^{s_2/q_2}} \ll 1, \qquad (29)$$

Δ_2 — размер соответствующей области размазки. Наконец, из «сшивки» выражений (27) и (28) в точке $p = p_{c2} - \Delta_2$ следует соотношение

$$q_2 = t_2 \, \frac{s_2}{1-s_2}, \qquad (30)$$

уменьшающее число новых независимых индексов до двух.

Таким образом, для функции

$$f(p,h) = f(p_{c2}+\tau_2, h), \quad \tau_2 = p - p_{c2}, \qquad (31)$$

в критической области $|\tau_2| \ll 1$ и $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$ будем иметь следующие разложения:

$$\tau_2 > 0, \quad \Delta_2 \ll \tau_2 \ll 1: \quad f = \frac{1}{\tau_2^{q_2}} \times \\ \times \left\{ B_1^{(2)} + B_2^{(2)} \, \frac{1}{h\, \tau_2^{q_2/s_2}} + \ldots \right\}, \qquad (32)$$

$$|\tau_2| \ll \Delta_2: \quad f = h^{s_2} \left\{ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \tau_2 h^{s_2/q_2} + \ldots \right\}, \qquad (33)$$

$$\tau_2 < 0, \quad \Delta_2 \ll |\tau_2| \ll 1: \quad f = h\,(-\tau_2)^{t_2} \times \\ \times \left\{ A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \, \frac{1}{h\,(-\tau_2)^{q_2/s_2}} + \ldots \right\}. \qquad (34)$$

Здесь Δ_2 дается выражением (29); критические индексы t_2, s_2, q_2 положительны и связаны соотношением (30).

В выражениях (32)–(34) численные коэффициенты также имеют порядок единицы. Из (32) и условия (17) следует, что $B_2^{(2)} < 0$. Действительно, учет конечной проводимости второй (высокопроводящей) компоненты приводит к уменьшению величины σ_e и функции $f(p,h)$. Подстановка (33) и (34) в неравенство (18) дает соответственно $s_2 < 1$ (так что $0 < s_2 < 1$) и $A_1^{(2)} > 0$. Увеличение доли низкопроводящей (первой) компоненты уменьшает электропроводность композита, поэтому коэффициент $a_1^{(2)} < 0$.

Предыдущее рассмотрение относилось к композитам произвольной структуры — как неупорядоченным, так и регулярным. При этом различные характеристики обоих фазовых переходов в общем случае не связаны явным образом друг с другом, хотя выражения (14)–(16) и (32)–(34) при заданной структуре композита являются разложениями одной и той же функции $f(p,h)$. Существует, однако, специфический класс моделей, для которых между свойствами функции $f(p,h)$ в окрестностях порогов p_{c1} и p_{c2} имеется однозначное соответствие. К подобным неупорядоченным системам относятся модели с так называемой случайно-неоднородной структурой, которые рассматриваются в следующем разделе.

4. СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

К случайно-неоднородным системам относится, в частности, модель сплошной среды, представляющая собой тщательно перемешанную смесь белой и черной компонент (например, вода и масло). В качестве другого примера может служить решеточная модель, используемая при компьютерных исследованиях свойств композитов в задаче связей. При изучении электропроводности в такой решетке для каждой пары соседних узлов случайным образом выбирается связь либо проводимости σ_1 (с вероятностью p), либо σ_2 (с вероятностью $1-p$). Подобные бинарные системы обладают определенной симметрией: перемена местами белой и черной компонент с одновременной заменой концентраций ($p \to 1-p$) не меняет их макроскопические характеристики.

Для модели проводящего композита неизменность ее макроскопических свойств при двойной замене $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$ и $p \to 1-p$ означает, в частности, что

$$\sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_e(1-p;\sigma_2,\sigma_1). \qquad (35)$$

Для безразмерной эффективной проводимости отсюда следует соотношение

$$f(p,h) = h\, f(1-p, 1/h). \qquad (36)$$

Другим следствием упомянутой выше симметрии является равенство

$$p_{c2} = 1 - p_{c1}, \qquad (37)$$

связывающее пороги протекания случайно-неоднородных систем.

Соотношение (36) позволяет выразить функции $F(p)$, $L(p)$, $M(p)$, $N(p), \ldots$, входящие в разложения (24)–(26), через $f_d(1-p)$, $f_d'(1-p)$, $f_d''(1-p)$, $f_s(1-p)$, $f_s'(1-p), \ldots$, введенные в (4)–(7). В результате разложения (24), (25) принимают вид

$$p > p_{c2}: \quad f = f_s(1-p) + \frac{1}{2\,h} f_s'(1-p) + \ldots, \tag{38}$$

$$p < p_{c2}: \quad f = h\, f_d(1-p) + f_d'(1-p) + \\ + \frac{1}{2\,h} f_d''(1-p) + \ldots \tag{39}$$

С помощью соотношения (36) устанавливается также однозначная связь между разложениями функции $f(p,h)$ в критических областях обоих фазовых переходов. Положив в (36) $p = p_{c2} + \tau_2$ (где $\tau_2 = p - p_{c2}$), с учетом (39) получим равенство

$$f(p_{c2} + \tau_2, h) = h\, f(p_{c1} - \tau_2, 1/h). \tag{40}$$

Подстановка в правую часть соотношения (40) выражений (14)–(16) (с заменами $\tau_1 \to -\,\tau_2$ и $h \to 1/h$) дает для функции $f(p,h)$ следующие разложения в критической области $|\tau_2| \ll 1$ и $h \gg 1$:

$$\tau_2 > 0, \quad \Delta_2 \ll \tau_2 \ll 1: f = \frac{1}{\tau_2^{q_1}} \times \\ \times \left\{ B_1^{(1)} + B_2^{(1)} \frac{1}{h\, \tau_2^{t_1/s_1}} + \cdots \right\}, \tag{41}$$

$$|\tau_2| \ll \Delta_2: \quad f = h^{1-s_1} \times \\ \times \left\{ a_0^{(1)} - a_1^{(1)}\, \tau_2 h^{s_1/t_1} + \ldots \right\}, \tag{42}$$

$$\tau_2 < 0, \quad \Delta_2 \ll |\tau_2| \ll 1: f = h\,(-\tau_2)^{t_1} \times \\ \times \left\{ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} \frac{1}{h(-\tau_2)^{t_1/s_1}} + \ldots \right\}. \tag{43}$$

Сравнение (41)–(43) с разложениями (32)–(34) приводит к следующим соотношениям между критическими индексами:

$$t_2 = t_1, \quad s_2 = 1 - s_1, \quad q_2 = q_1, \tag{44}$$

и численными коэффициентами:

$$A_0^{(2)} = A_0^{(1)}, \quad A_1^{(2)} = A_1^{(1)}, \ldots, \tag{45}$$

$$B_1^{(2)} = B_1^{(1)}, \quad B_2^{(2)} = B_2^{(1)}, \ldots, \tag{46}$$

$$a_0^{(2)} = a_0^{(1)}, \quad a_1^{(2)} = -\,a_1^{(1)}, \ldots \tag{47}$$

Последнее равенство в (47) согласуется со сделанными ранее выводами о том, что $a_1^{(1)} > 0$ и $a_1^{(2)} < 0$.

Пороги протекания не являются универсальными характеристиками и зависят от конкретной геометрии соответствующей модели бинарного композита. Согласно [3] для так называемой континуальной случайно-неоднородной системы $p_{c1} \approx 0.17$, так что $p_{c2} \approx 0.83$. Для простой кубической решетки в задаче связей $p_{c1} \approx 0.249$ [5] и, соответственно, $p_{c2} \approx \approx 0.751$. Выполнение соотношения (37) для некоторой модели свидетельствует о том, что ее структура, возможно, близка к случайно-неоднородной.

При компьютерных исследованиях порогов протекания [6–8] обычно рассматривается модель, состоящая из изотропной матрицы и системы одинаковых включений, случайным образом распределенных (по Пуассону) в пространстве и хаотически ориентированных. При этом вычисляется, как правило, критическая концентрация, при которой возникает протекание по включениям, т. е. только порог p_{c2}. Так, в работе [6] найден порог p_{c2} для модели с включениями кубической формы.

Обе критические концентрации исследовались в работах [7] (порог p_{c2}) и [8] (порог p_{c1}) для модели с включениями в виде эллипсоидов вращения — сплюснутых сфероидов с полуосями $a_x = a_y = = R > a_z$. В этом случае величина порогов зависит от отношения полуосей сфероида $\gamma = R/a_z$: $p_{c1} = = p_{c1}(\gamma)$, $p_{c2} = p_{c2}(\gamma)$. Для сферических ($\gamma = 1$) включений имеем $p_{c1}(1) \approx 0.030$, $p_{c2}(1) \approx 0.715$, так что $p_{c1} + p_{c2} < 1$. В то же время для включений в виде бесконечно тонких круговых дисков ($\gamma = \infty$) оба порога равны единице и их сумма > 1. Поэтому при некотором промежуточном значении параметра $\gamma = \gamma_0$ сумма значений $p_{c1}(\gamma_0)$ и $p_{c2}(\gamma_0)$ равна единице. Величина $\gamma_0 \lesssim 8$, так как для ближайшего к γ_0 значения параметра $\gamma = 8$ имеем $p_{c1}(8) \approx 0.167$ [8] и $p_{c2}(8) \approx 0.874$ [7], а их сумма (≈ 1.041) немного превосходит единицу. Вопрос о том, насколько структура такой модели (с $\gamma = \gamma_0$) близка к случайно-неоднородной, представляет определенный интерес и требует дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975) [B. I. Shklovskii and A. L. Efros, Sov. Phys. Usp. **18**, 845 (1975)].

2. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).

3. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*. Наука, Москва (1979), гл. 5.

4. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS–Ленанд, Москва (2015).

5. C. D. Lorenz and R. M. Ziff, Phys. Rev. E **57**, 230 (1998).

6. D. R. Baker, G. Paul, S. Sreenivasan, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **66**, 046136 (2002).

7. E. J. Garboczi, K. A. Snyder, J. F. Douglas, and M. F. Thorpe, Phys. Rev. E **52**, 819 (1995).

8. Y. B. Yi and K. Esmail, J. Appl. Phys. **111**, 124903 (2012).