

## ПОРОГИ ПРОТЕКАНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В БИНАРНЫХ КОМПОЗИТАХ

*Б. Я. Балагуров\**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2017 г.

Рассмотрены фазовые переходы типа металл–диэлектрик и металл–«сверхпроводник», связанные с порогами протекания в двухкомпонентных композитах. Поведение эффективной проводимости  $\sigma_e$  в окрестности обоих порогов описано в рамках гипотезы подобия. Для случайно-неоднородных систем установлено однозначное соответствие между выражениями для  $\sigma_e$  в обеих критических областях.

DOI: 10.7868/S004445101803015X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель, используемая в теории протекания [1–3], представляет собой неупорядоченную бинарную («черно-белую») структуру. С изменением концентрации (доли занимаемого объема)  $p$  первой («белой») компоненты в соответствующей трехмерной модели происходят следующие метаморфозы [1–3]. При  $0 \leq p < p_{c1}$ , где  $p_{c1}$  — первая критическая концентрация, отсутствует протекание по первой компоненте и имеет место по второй. Напротив, при  $p_{c2} < p \leq 1$  (где  $p_{c2}$  — вторая критическая концентрация) есть протекание только по первой компоненте. А при промежуточных концентрациях ( $p_{c1} \leq p \leq p_{c2}$ ) сосуществуют протекания по обоим компонентам. Критические концентрации  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$  называют также порогами протекания. Отметим, что в двумерном случае наличие протекания по белой компоненте исключает возможность протекания по черной и наоборот, так что здесь критическая концентрация одна.

Результаты математического раздела теории протекания приобретают реальное наполнение в физической модели композита, в которой первой и второй компонентам приписываются проводимости соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В этой модели существование порогов протекания проявляется в форме фазовых переходов, которые могут иметь место в эффективной проводимости  $\sigma_e$  при  $p = p_{c1}$  и  $p = p_{c2}$ . Так, если вторая компонента имеет нулевую проводимость, то в такой системе при  $p = p_{c1}$

происходит фазовый переход металл–диэлектрик: величина  $\sigma_e \neq 0$  при  $p > p_{c1}$  и  $\sigma_e = 0$  при  $p < p_{c1}$ . Если же вторая компонента является идеальным проводником, то при  $p = p_{c2}$  происходит фазовый переход металл–«сверхпроводник» (металл–идеальный проводник):  $\sigma_e$  конечна при  $p > p_{c2}$  и  $\sigma_e = \infty$  при  $p < p_{c2}$ . Аномалии в поведении величины  $\sigma_e$  в окрестности точек  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$  сохраняются и в системах с конечными, но резко различающимися, проводимостями компонент.

В настоящей работе оба фазовых перехода рассмотрены с единых позиций. Поведение эффективной проводимости  $\sigma_e$  в окрестности порогов  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$  описано в духе гипотезы подобия [1–3]. В обоих случаях введены критические индексы и установлены соотношения между ними. Для безразмерной эффективной проводимости  $f = \sigma_e/\sigma_1$  в каждой критической области найдены разложения, справедливые в рамках гипотезы подобия.

Критические индексы и другие характеристики обоих фазовых переходов, вообще говоря, не связаны друг с другом. Пороги  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$ , зависящие от конкретной структуры (геометрии) модели, также являются независимыми величинами. Однако для случайно-неоднородных систем, не меняющих макроскопических свойств при одновременной замене  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$  и  $p \rightarrow 1 - p$ , имеем  $p_{c2} = 1 - p_{c1}$ . В этом случае существует связь между значениями эффективной проводимости в окрестностях точек фазовых переходов обоих типов. Вследствие этого в два раза уменьшается, например, число независимых критических индексов.

\* E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

**2. ПЕРЕХОД МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК**

Далее рассматривается модель изотропного бинарного композита, состоящего из матрицы проводимости  $\sigma_1$  (первая компонента с долей занимаемого объема  $p$ ) и включений проводимости  $\sigma_2$  (вторая компонента с объемной концентрацией  $c = 1 - p$ ). Эффективную проводимость  $\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)$  такой системы запишем в виде

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (1)$$

Функция  $f(p, h)$  — безразмерная эффективная проводимость — играет важную роль во всей теории электрофизических свойств бинарных композитов (см., например, [4]). Поэтому всестороннее изучение величины  $f(p, h)$  представляет существенный интерес для теории композитов.

Как известно [1–3], в системе с диэлектрическими ( $\sigma_2 = 0$ ) включениями при критической концентрации (пороге протекания)  $p_{c1}$  происходит фазовый переход металл–диэлектрик:  $\sigma_e \neq 0$  при  $p > p_{c1}$  и  $\sigma_e = 0$  при  $p \leq p_{c1}$  или

$$p > p_{c1} : \quad f(p, 0) \neq 0, \quad (2)$$

$$p \leq p_{c1} : \quad f(p, 0) = 0. \quad (3)$$

Для системы с резко различающимися проводимостями компонент ( $\sigma_2 \ll \sigma_1$ ) функция  $f(p, h)$  в пределе  $h \rightarrow 0$  будет иметь следующие разложения:

$$p > p_{c1} : \quad f(p, h) = f_d(p) + h f'_d(p) + \frac{1}{2} h^2 f''_d(p) + \dots, \quad (4)$$

где

$$f_d(p) = f(p, 0), \quad f'_d(p) = \left[ \frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0}, \dots \quad (5)$$

и

$$p < p_{c1} : \quad f(p, h) = h f_s(p) + \frac{1}{2} h^2 f'_s(p) + \dots \quad (6)$$

Здесь

$$f_s(p) = \left[ \frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0}, \quad (7)$$

$$f'_s(p) = \left[ \frac{\partial^2 f(p, h)}{\partial h^2} \right]_{h=0}, \dots$$

В окрестности точки фазового перехода (вблизи порога протекания  $p_{c1}$ ) эффективная проводимость  $\sigma_e$  описывается в рамках гипотезы подобия

[1–3]. Представим соображения, приводящие к соответствующим результатам. При  $h \ll 1$  и  $p > p_{c1}$  включения второй компоненты вне области размазки (см. ниже) можно считать диэлектрическими. Предполагается, что в этом случае величина  $\sigma_e$  убывает при  $p \rightarrow p_{c1}$  по степенному закону,

$$p > p_{c1} : \quad \sigma_e(p; \sigma_1, 0) \sim \sigma_1 (p - p_{c1})^{t_1}, \quad (8)$$

где  $t_1$  — критический индекс. В (8) опущен численный множитель порядка единицы.

Ниже точки перехода (при  $p < p_{c1}$ ) и также вне области размазки первую (высокопроводящую) компоненту можно считать идеально проводящей. При приближении к порогу протекания  $p_{c1}$  эффективная проводимость такой системы будет возрастать следующим образом:

$$p < p_{c1} : \quad \sigma_e(p; \infty, \sigma_2) \sim \frac{\sigma_2}{(p_{c1} - p)^{q_1}}, \quad (9)$$

где  $q_1$  — второй критический индекс.

В самой точке фазового перехода существенны конечные проводимости обеих компонент, так что

$$p = p_{c1} : \quad \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sim \sigma_1 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{s_1}. \quad (10)$$

Здесь  $s_1$  — третий критический индекс эффективной проводимости.

Выражения (8) и (10) должны «сшиваться» (сравниваться по порядку величины) при некотором  $p = p_{c1} + \Delta_1$ . Из этого условия находим величину

$$\Delta_1 \sim \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{s_1/t_1} = h^{s_1/t_1} \ll 1, \quad (11)$$

дающую оценку размера так называемой области размазки [1–3]. Из «сшивки» выражений (9) и (10) в симметричной точке  $p = p_{c1} - \Delta_1$  получаем равенство

$$q_1 = t_1 \frac{1 - s_1}{s_1}. \quad (12)$$

Соотношение между критическими индексами (12) является одним из основных результатов гипотезы подобия [2, 3].

Приведенные соображения позволяют получить следующие разложения для функции

$$f(p, h) = f(p_{c1} + \tau_1, h), \quad \tau_1 = p - p_{c1}, \quad (13)$$

в критической области  $h = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$  и  $|\tau_1| \ll 1$ :

$$\tau_1 > 0, \quad \Delta_1 \ll \tau_1 \ll 1 : \quad f = \tau_1^{t_1} \left\{ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} \frac{h}{\tau_1^{t_1/s_1}} + \dots \right\}, \quad (14)$$

$$|\tau_1| \ll \Delta_1 : f = h^{s_1} \left\{ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \frac{\tau_1}{h^{s_1/t_1}} + \dots \right\}, \quad (15)$$

$$\tau_1 < 0, \quad \Delta_1 \ll |\tau_1| \ll 1 :$$

$$f = \frac{h}{(-\tau_1)^{q_1}} \left\{ B_1^{(1)} + B_2^{(1)} \frac{h}{(-\tau_1)^{t_1/s_1}} + \dots \right\}. \quad (16)$$

Здесь величина  $\Delta_1$  дается выражением (11); критические индексы  $t_1, s_1, q_1$  положительны и связаны соотношением (12). Возможность представления функции  $f(p, h)$  в виде разложений (14)–(16) является одним из предположений гипотезы подобия.

В выражениях (14)–(16)  $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \dots, a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots$  — численные коэффициенты порядка единицы. При этом  $A_0^{(1)} > 0, a_0^{(1)} > 0, B_1^{(1)} > 0$  в силу положительности функции  $f(p, h)$ . Так как эффективная электропроводность композита возрастает с увеличением проводимости второй компоненты, то

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} > 0. \quad (17)$$

Поэтому из (14) с учетом (17) находим, что и  $A_1^{(1)} > 0$ . Согласно [4] из условия положительности парциальных моментов напряженности электрического поля второго порядка следует как неравенство (17), так и неравенство

$$f(p, h) - h \frac{\partial f(p, h)}{\partial h} > 0. \quad (18)$$

Из формулы (16) находим

$$\begin{aligned} \tau_1 < 0, \quad \Delta_1 \ll |\tau_1| \ll 1 : f - h \frac{\partial f}{\partial h} &= \\ &= \frac{h}{(-\tau_1)^{q_1}} \left\{ -B_2^{(1)} \frac{h}{(-\tau_1)^{t_1/s_1}} + \dots \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

откуда следует, что  $B_2^{(1)} < 0$ . Это неравенство отвечает тому факту, что при  $p < p_{c1}$  учет конечности проводимости первой компоненты уменьшает эффективную электропроводность системы.

Подстановка в (18) выражения (15) дает

$$\begin{aligned} |\tau_1| \ll \Delta_1 : f - h \frac{\partial f}{\partial h} &= \\ &= (1 - s_1) a_0^{(1)} h^{s_1} + \dots > 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что  $s_1 < 1$ , так что

$$0 < s_1 < 1. \quad (21)$$

Увеличение доли высокопроводящей первой компоненты приводит к возрастанию величины  $\sigma_e$ , поэтому коэффициент  $a_1^{(1)} > 0$ . Отметим, что, как следует из (14)–(16), производная  $\partial f / \partial h$  вблизи точки  $p = p_{c1}$  имеет острый пик, см. [4].

### 3. ПЕРЕХОД МЕТАЛЛ–«СВЕРХПРОВОДНИК»

В композите с идеально проводящими включениями второй компоненты ( $\sigma_2 = \infty$ ) при критической концентрации  $p_{c2}$  происходит фазовый переход металл–«сверхпроводник» (металл–идеальный проводник). Действительно, при  $p > p_{c2}$  вторая компонента состоит из разрозненных, не связанных друг с другом островков. Поэтому протекание по ней отсутствует и композит находится в металлической фазе с конечной эффективной проводимостью  $\sigma_e$ . При  $p < p_{c2}$  включения второй компоненты образуют так называемый бесконечный кластер [1–3], по которому происходит протекание. В этом случае композит находится в «сверхпроводящей» фазе с  $\sigma_e = \infty$ . Следовательно, для безразмерной эффективной проводимости имеем

$$p > p_{c2} : f(p, \infty) \neq \infty, \quad (22)$$

$$p < p_{c2} : f(p, \infty) = \infty. \quad (23)$$

Если  $\sigma_2$  велико, но конечно ( $\sigma_2 \gg \sigma_1$ ), то вместо (22), (23) в пределе  $h \rightarrow \infty$  будем иметь следующие разложения:

$$p > p_{c2} : f(p, h) = f(p, \infty) + \frac{1}{h} F(p) + \dots, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} p < p_{c2} : f(p, h) = h L(p) + M(p) + \\ + \frac{1}{h} N(p) + \dots \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь  $F(p), L(p), M(p), N(p), \dots$  — некоторые функции концентрации  $p$ .

В критической области (в окрестности порога  $p_{c2}$ ) эффективная проводимость  $\sigma_e$  обсуждаемой системы также может быть описана в духе гипотезы подобия. При  $p > p_{c2}$  вне области размазки включения второй компоненты можно считать идеально проводящими. Предполагаем, что в этом случае в пределе  $p \rightarrow p_{c2}$  эффективная проводимость будет возрастать по закону

$$p > p_{c2} : \sigma_e(p; \sigma_1, \infty) \sim \frac{\sigma_1}{(p - p_{c2})^{q_2}} \quad (26)$$

с критическим индексом  $q_2$ .

С другой стороны, при  $p < p_{c2}$  и также вне области размазки первую компоненту можно считать диэлектрической. В такой ситуации эффективная проводимость  $\sigma_e$  при  $p \rightarrow p_{c2}$  будет убывать следующим образом:

$$p < p_{c2} : \sigma_e(p; 0, \sigma_2) \sim \sigma_2 (p_{c2} - p)^{t_2}, \quad (27)$$

где  $t_2$  — еще один критический индекс.

В самой точке фазового перехода, где существенна конечность проводимости обеих компонент, будем иметь

$$p = p_{c2} : \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sim \sigma_1 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{s_2}. \quad (28)$$

Здесь  $s_2$  — третий критический индекс эффективной проводимости для рассматриваемого фазового перехода.

Выражения (28) и (26) должны «сшиваться» в точке  $p = p_{c2} + \Delta_2$ . Из этого условия находим величину

$$\Delta_2 \sim \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{s_2/q_2} = \frac{1}{h^{s_2/q_2}} \ll 1, \quad (29)$$

$\Delta_2$  — размер соответствующей области размазки. Наконец, из «сшивки» выражений (27) и (28) в точке  $p = p_{c2} - \Delta_2$  следует соотношение

$$q_2 = t_2 \frac{s_2}{1 - s_2}, \quad (30)$$

уменьшающее число новых независимых индексов до двух.

Таким образом, для функции

$$f(p, h) = f(p_{c2} + \tau_2, h), \quad \tau_2 = p - p_{c2}, \quad (31)$$

в критической области  $|\tau_2| \ll 1$  и  $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$  будем иметь следующие разложения:

$$\tau_2 > 0, \quad \Delta_2 \ll \tau_2 \ll 1 : f = \frac{1}{\tau_2^{q_2}} \times \left\{ B_1^{(2)} + B_2^{(2)} \frac{1}{h \tau_2^{q_2/s_2}} + \dots \right\}, \quad (32)$$

$$|\tau_2| \ll \Delta_2 : f = h^{s_2} \left\{ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \tau_2 h^{s_2/q_2} + \dots \right\}, \quad (33)$$

$$\tau_2 < 0, \quad \Delta_2 \ll |\tau_2| \ll 1 : f = h (-\tau_2)^{t_2} \times \left\{ A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \frac{1}{h (-\tau_2)^{q_2/s_2}} + \dots \right\}. \quad (34)$$

Здесь  $\Delta_2$  дается выражением (29); критические индексы  $t_2, s_2, q_2$  положительны и связаны соотношением (30).

В выражениях (32)–(34) численные коэффициенты также имеют порядок единицы. Из (32) и условия (17) следует, что  $B_2^{(2)} < 0$ . Действительно, учет конечной проводимости второй (высокопроводящей) компоненты приводит к уменьшению величины  $\sigma_e$  и функции  $f(p, h)$ . Подстановка (33) и (34) в

неравенство (18) дает соответственно  $s_2 < 1$  (так что  $0 < s_2 < 1$ ) и  $A_1^{(2)} > 0$ . Увеличение доли низкопроводящей (первой) компоненты уменьшает электропроводность композита, поэтому коэффициент  $a_1^{(2)} < 0$ .

Преыдущее рассмотрение относилось к композитам произвольной структуры — как неупорядоченным, так и регулярным. При этом различные характеристики обоих фазовых переходов в общем случае не связаны явным образом друг с другом, хотя выражения (14)–(16) и (32)–(34) при заданной структуре композита являются разложениями одной и той же функции  $f(p, h)$ . Существует, однако, специфический класс моделей, для которых между свойствами функции  $f(p, h)$  в окрестностях порогов  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$  имеется однозначное соответствие. К подобным неупорядоченным системам относятся модели с так называемой случайно-неоднородной структурой, которые рассматриваются в следующем разделе.

#### 4. СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

К случайно-неоднородным системам относится, в частности, модель сплошной среды, представляющая собой тщательно перемешанную смесь белой и черной компонент (например, вода и масло). В качестве другого примера может служить решеточная модель, используемая при компьютерных исследованиях свойств композитов в задаче связей. При изучении электропроводности в такой решетке для каждой пары соседних узлов случайным образом выбирается связь либо проводимости  $\sigma_1$  (с вероятностью  $p$ ), либо  $\sigma_2$  (с вероятностью  $1 - p$ ). Подобные бинарные системы обладают определенной симметрией: перемена местами белой и черной компонент с одновременной заменой концентраций ( $p \rightarrow 1 - p$ ) не меняет их макроскопические характеристики.

Для модели проводящего композита неизменность ее макроскопических свойств при двойной замене  $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$  и  $p \rightarrow 1 - p$  означает, в частности, что

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1 - p; \sigma_2, \sigma_1). \quad (35)$$

Для безразмерной эффективной проводимости отсюда следует соотношение

$$f(p, h) = h f(1 - p, 1/h). \quad (36)$$

Другим следствием упомянутой выше симметрии является равенство

$$p_{c2} = 1 - p_{c1}, \quad (37)$$

связывающее пороги протекания случайно-неоднородных систем.

Соотношение (36) позволяет выразить функции  $F(p)$ ,  $L(p)$ ,  $M(p)$ ,  $N(p), \dots$ , входящие в разложения (24)–(26), через  $f_d(1-p)$ ,  $f'_d(1-p)$ ,  $f''_d(1-p)$ ,  $f_s(1-p)$ ,  $f'_s(1-p), \dots$ , введенные в (4)–(7). В результате разложения (24), (25) принимают вид

$$p > p_{c2} : f = f_s(1-p) + \frac{1}{2h} f'_s(1-p) + \dots, \quad (38)$$

$$p < p_{c2} : f = h f_d(1-p) + f'_d(1-p) + \frac{1}{2h} f''_d(1-p) + \dots \quad (39)$$

С помощью соотношения (36) устанавливается также однозначная связь между разложениями функции  $f(p, h)$  в критических областях обоих фазовых переходов. Положив в (36)  $p = p_{c2} + \tau_2$  (где  $\tau_2 = p - p_{c2}$ ), с учетом (39) получим равенство

$$f(p_{c2} + \tau_2, h) = h f(p_{c1} - \tau_2, 1/h). \quad (40)$$

Подстановка в правую часть соотношения (40) выражений (14)–(16) (с заменами  $\tau_1 \rightarrow -\tau_2$  и  $h \rightarrow 1/h$ ) дает для функции  $f(p, h)$  следующие разложения в критической области  $|\tau_2| \ll 1$  и  $h \gg 1$ :

$$\tau_2 > 0, \quad \Delta_2 \ll \tau_2 \ll 1 : f = \frac{1}{\tau_2^{q_1}} \times \left\{ B_1^{(1)} + B_2^{(1)} \frac{1}{h \tau_2^{t_1/s_1}} + \dots \right\}, \quad (41)$$

$$|\tau_2| \ll \Delta_2 : f = h^{1-s_1} \times \left\{ a_0^{(1)} - a_1^{(1)} \tau_2 h^{s_1/t_1} + \dots \right\}, \quad (42)$$

$$\tau_2 < 0, \quad \Delta_2 \ll |\tau_2| \ll 1 : f = h(-\tau_2)^{t_1} \times \left\{ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} \frac{1}{h(-\tau_2)^{t_1/s_1}} + \dots \right\}. \quad (43)$$

Сравнение (41)–(43) с разложениями (32)–(34) приводит к следующим соотношениям между критическими индексами:

$$t_2 = t_1, \quad s_2 = 1 - s_1, \quad q_2 = q_1, \quad (44)$$

и численными коэффициентами:

$$A_0^{(2)} = A_0^{(1)}, \quad A_1^{(2)} = A_1^{(1)}, \dots, \quad (45)$$

$$B_1^{(2)} = B_1^{(1)}, \quad B_2^{(2)} = B_2^{(1)}, \dots, \quad (46)$$

$$a_0^{(2)} = a_0^{(1)}, \quad a_1^{(2)} = -a_1^{(1)}, \dots \quad (47)$$

Последнее равенство в (47) согласуется со сделанными ранее выводами о том, что  $a_1^{(1)} > 0$  и  $a_1^{(2)} < 0$ .

Пороги протекания не являются универсальными характеристиками и зависят от конкретной геометрии соответствующей модели бинарного композита. Согласно [3] для так называемой континуальной случайно-неоднородной системы  $p_{c1} \approx 0.17$ , так что  $p_{c2} \approx 0.83$ . Для простой кубической решетки в задаче связей  $p_{c1} \approx 0.249$  [5] и, соответственно,  $p_{c2} \approx 0.751$ . Выполнение соотношения (37) для некоторой модели свидетельствует о том, что ее структура, возможно, близка к случайно-неоднородной.

При компьютерных исследованиях порогов протекания [6–8] обычно рассматривается модель, состоящая из изотропной матрицы и системы одинаковых включений, случайным образом распределенных (по Пуассону) в пространстве и хаотически ориентированных. При этом вычисляется, как правило, критическая концентрация, при которой возникает протекание по включениям, т.е. только порог  $p_{c2}$ . Так, в работе [6] найден порог  $p_{c2}$  для модели с включениями кубической формы.

Обе критические концентрации исследовались в работах [7] (порог  $p_{c2}$ ) и [8] (порог  $p_{c1}$ ) для модели с включениями в виде эллипсоидов вращения — сплюснутых сфероидов с полуосями  $a_x = a_y = R > a_z$ . В этом случае величина порогов зависит от отношения полуосей сфероида  $\gamma = R/a_z$ :  $p_{c1} = p_{c1}(\gamma)$ ,  $p_{c2} = p_{c2}(\gamma)$ . Для сферических ( $\gamma = 1$ ) включений имеем  $p_{c1}(1) \approx 0.030$ ,  $p_{c2}(1) \approx 0.715$ , так что  $p_{c1} + p_{c2} < 1$ . В то же время для включений в виде бесконечно тонких круговых дисков ( $\gamma = \infty$ ) оба порога равны единице и их сумма  $> 1$ . Поэтому при некотором промежуточном значении параметра  $\gamma = \gamma_0$  сумма значений  $p_{c1}(\gamma_0)$  и  $p_{c2}(\gamma_0)$  равна единице. Величина  $\gamma_0 \lesssim 8$ , так как для ближайшего к  $\gamma_0$  значения параметра  $\gamma = 8$  имеем  $p_{c1}(8) \approx 0.167$  [8] и  $p_{c2}(8) \approx 0.874$  [7], а их сумма ( $\approx 1.041$ ) немного превосходит единицу. Вопрос о том, насколько структура такой модели (с  $\gamma = \gamma_0$ ) близка к случайно-неоднородной, представляет определенный интерес и требует дальнейшего изучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975) [B. I. Shklovskii and A. L. Efros, Sov. Phys. Usp. **18**, 845 (1975)].
2. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).

3. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*. Наука, Москва (1979), гл. 5.
4. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS-Ленанд, Москва (2015).
5. C. D. Lorenz and R. M. Ziff, Phys. Rev. E **57**, 230 (1998).
6. D. R. Baker, G. Paul, S. Sreenivasan, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **66**, 046136 (2002).
7. E. J. Garboczi, K. A. Snyder, J. F. Douglas, and M. F. Thorpe, Phys. Rev. E **52**, 819 (1995).
8. Y. B. Yi and K. Esmail, J. Appl. Phys. **111**, 124903 (2012).