

# СУЩЕСТВУЮТ ЛИ «ДВУМЕРНЫЕ» И «ОДНОМЕРНЫЕ» МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ?

В. В. Скобелев\*

Московский политехнический университет  
105066, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 декабря 2017 г.

Квазиклассический метод Томаса–Ферми применен к «двумерным» и «одномерным» многоэлектронным атомам. Показано, что в рамках метода такие атомы существовать не могут по причине невозможности выполнения физических граничных условий, аналогичных «трехмерному» варианту теории, в котором они выполняются. Указано на возможность экспериментальной проверки результатов с предполагаемым наличием в рамках метода значения атомного номера  $Z_{1,2max}$  ( $\sim 10^2?$ ) такого, что при  $Z > Z_{1,2max}$  соответствующие «низкоразмерные» многоэлектронные атомы в действительности реализоваться не могут, в отличие от одно- или двухэлектронных, а также, например, в отличие от экспериментально установленного существования бозе-конденсата из «низкоразмерных» атомов с  $Z \sim 10$  (Na).

DOI: 10.7868/S0044451018050097

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В наших работах [1, 2] было показано, что статус пространственно-«двумерных» или «одномерных» водородоподобных атомов в смысле наличия обычных их характеристик (вероятности излучения, релятивистских поправок к энергии и т. п.) вполне аналогичен случаю «трехмерных» атомов. Это же относится и к двухэлектронным атомам [3, 4] с вычислением их энергии  $E < 0$  в основном и возбужденном состояниях и энергии ионизации  $E_i > 0$ .

Ссылки на другую литературу, имеющую отношение к вопросу, можно найти в этих же работах [1–4].

В наших расчетах использовалось одно из двух следующих решений.

1. Нормированное решение «двумерного» уравнения Шредингера [5–7] для электрона в поле ядра ( $Ze$ ) (см. также [8]) в «плоских» координатах с потенциалом кулоновского типа  $(Ze)/r$ , имеющее, например, в полярных координатах при выражении через вырожденную гипергеометрическую функцию  $F$  вид

$$\Psi_S \equiv \Psi_{N|m} = R_{N|m}(r)\Phi_m(\varphi),$$

$$R_{N|m}(r) = \frac{1}{rZ} R_{N|m}(\rho), \quad \rho = \frac{r}{r_Z}, \quad (1)$$

$$R_{N|m}(\rho) = C_{N|m} \frac{(2\lambda\rho)^{|m|}}{(2|m|)!} \times$$

$$\times e^{-\lambda\rho} F(-N + |m|, 2|m| + 1; 2\lambda\rho), \quad (1a)$$

$$r_Z = \frac{\hbar^2}{m_e(Ze^2)}, \quad \lambda = \frac{1}{N + 1/2},$$

$$C_{N|m} = \sqrt{2\lambda^3 \frac{(N + |m|)!}{(N - |m|)!}}, \quad (1b)$$

$$N \geq |m| = 0, 1, \dots,$$

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad (1c)$$

со значением энергии

$$E_N = -\frac{(Ze^2)^2 \lambda^2}{2\hbar^2} m_e. \quad (1d)$$

2. Соответствующее решение «одномерного» уравнения Шредингера [9] (см. также [10]):

$$\Psi_n^{(P)} = K_n \begin{cases} \chi_n, & z > 0, \\ P\chi_n, & z < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\chi_n = e^{-|x|/2n} \frac{|x|}{n} F\left(1 - n, 2; \frac{|x|}{n}\right), \quad (2a)$$

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{2nz_Z}},$$

\* E-mail: v.skobelev@inbox.ru

$$x = \frac{2z}{z_Z}, \quad z_Z = \frac{\hbar^2}{m_e(Ze^2)} (\equiv r_Z), \quad (2b)$$

причем энергия, как и в «трехмерном» варианте, равна

$$E_n = -\frac{(Ze^2)^2 m_e}{2\hbar^2 n^2} \quad (2c)$$

( $n = 1, 2, \dots$ ;  $P = \pm 1$  — четность состояния).

Таким образом, с «теоретической» точки зрения «двумерные» или «одномерные» одно- и двухэлектронные атомы могут существовать.

С другой стороны, такие атомы с  $Z \sim 10$  в фазе бозе-конденсата не так давно получены экспериментально [11] (это атомы Na).

В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности существования многоэлектронных ( $Z \sim 10^2$ ) «двумерных» или «одномерных» атомов. Соответствующая «теоретическая» база для обычных «трехмерных» атомов была сформулирована еще в начале прошлого века — это метод Томаса–Ферми [12, 13].

В данной работе «трехмерный» метод Томаса–Ферми модифицируется для расчета электростатического поля и электронной структуры «двумерного» многоэлектронного атома (разд. 2, 3), а также и «одномерного» (разд. 4) с минимально необходимой, ввиду очевидной важности проблемы, детализацией. В целом придерживаясь схемы изложения материала в обычном «трехмерном» варианте теории, принятом в книге [10], мы несколько видоизменяем ее применительно к рассматриваемым в работе «двумерному» и «одномерному» вариантам, причем из соображений простоты и наглядности используем обычную, а не атомную систему единиц, в отличие от [10].

В доступной нам литературе мы не обнаружили работ по рассматриваемому вопросу.

## 2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТОМАСА–ФЕРМИ В «ДВУМЕРНОМ» ПРОСТРАНСТВЕ

Следуя книге [10] с минимально необходимой модификацией ее материала на случай «двумерной» электронной структуры, исходим из следующих выводов.

1. Полная энергия  $E$  электрона в результирующем электростатическом поле атома, характеризуемом потенциалом  $\varphi$ ,

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - e\varphi. \quad (3)$$

2. «Поверхностная концентрация» электронов  $\sigma$  в выражении через максимальный импульс электрона  $p_0$  (аналог импульса Ферми) на расстоянии  $r$  от ядра ( $\sigma \equiv \sigma(r)$ )

$$\sigma = \frac{p_0^2}{2\pi\hbar^2}. \quad (4)$$

Это выражение следует из аналогичного «трехмерному» соотношения

$$2 \frac{\pi p^2}{(2\pi\hbar)^2} dS = \sigma dS$$

(коэффициент 2, как и в [10], соответствует двум возможным значениям проекции спина, а  $\pi p^2$  — «объем» «двумерного»  $p$ -пространства, ограниченного значением модуля импульса  $p$ , т. е. «площадь круга» «радиуса»  $p$ ).

3. Максимальное значение полной энергии в данной точке пространства

$$E_0 \equiv -e\varphi_0 = \frac{p_0^2}{2m_e} - e\varphi, \quad (5)$$

причем  $\varphi_0 = \text{const} > 0$  [10].

При этом получаем для поверхностной концентрации

$$\sigma = \frac{m_e e}{\hbar^2 \pi} (\varphi - \varphi_0). \quad (6)$$

Далее используем обычное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi en \quad (7)$$

с оператором Лапласа  $\Delta$ , имеющим в цилиндрических координатах вид

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

— радиальная часть оператора  $\Delta$ , в том числе и «на плоскости», в полярных координатах.

При этом «угловую часть»  $(1/r^2)\partial^2/\partial\tilde{\varphi}^2$  оператора можно опустить, так как в рамках метода электронное распределение, как и в «трехмерном» случае [10], следует считать изотропным (в данном случае на плоскости) и не зависящим от цилиндрического (полярного) угла  $\tilde{\varphi}$ . Оператор  $\partial^2/\partial z^2$  также можно опустить в силу «двумерного» характера приближения с подавлением размеров атома вдоль оси  $z$ .

Далее объемную концентрацию  $n$  очевидным образом выражаем через введенную поверхностную:

$$n \approx \frac{\sigma}{d}, \tag{8}$$

где знак приближенного равенства отражает то обстоятельство, что понятие «толщины»  $d$  «плоского» многоэлектронного атома не является точно определенным из-за ее неизбежной «квантовой размазки».

Вводя для удобства обозначения

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \equiv Zr_Z, \quad \tilde{d} = \frac{d}{4r_0}, \tag{9}$$

где  $\tilde{d}$  — «безразмерная толщина»,  $r_0$  — обычный борковский радиус, получаем основное «двумерное» уравнение Томаса – Ферми в виде

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \approx \frac{1}{r_0^2 \tilde{d}} (\varphi - \varphi_0). \tag{10}$$

Здесь знак « $\approx$ » связан с отмеченным выше приближенным характером равенства (8), являющегося справедливым, вообще говоря, с точностью до численного коэффициента порядка единицы, что для наших целей, как будет видно, не имеет значения.

При стандартном переопределении функции  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$  (полярный угол с таким же «нашим» обозначением  $\tilde{\varphi}$  далее в тексте не фигурирует, и это не может привести к недоразумениям)

$$\varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{r}} \tag{11}$$

уравнение (10) принимает вид

$$\tilde{\varphi}'' + \frac{1}{4r^2} \tilde{\varphi} \approx \frac{1}{r_0^2 \tilde{d}} (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0) \tag{12}$$

«с отсутствием» первой производной.

Стоит отметить, что такое же преобразование используется и для радиального уравнения Шредингера в полярных координатах (в этом случае  $R = \tilde{R}/\sqrt{r}$ ):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{m^2}{r^2} R \right] - \frac{(Ze^2)}{r} R = ER. \tag{13}$$

Как показано в работах [5–7], с учетом соответствующего преобразования  $R = \tilde{R}/r$  «трехмерного» радиального уравнения Шредингера и известного вида его решения [10], это в итоге и приводит к представлению (1a) радиальной части волновой функции (1) и значению энергии (1d).

Заметим в этой связи, что в «трехмерном» варианте метода Томаса – Ферми [10] и в сферических

координатах используется преобразование  $\varphi = \tilde{\varphi}/r$ , при котором выражение

$$\Delta_r \varphi \equiv \varphi'' + \frac{2}{r} \varphi'$$

с радиальной частью  $\Delta_r$  оператора Лапласа в сферических координатах принимает еще более простой, чем левая часть уравнения (12), вид  $\tilde{\varphi}''/r$ . А «трехмерное» уравнение Томаса – Ферми

$$\frac{1}{r} \tilde{\varphi}'' = \left( \frac{\tilde{\varphi}}{r} \right)^{3/2}$$

при переходе к безразмерной функции  $\chi(x)$  и переменной  $x$  также приобретает достаточно простой вид (70.7) из [10], который допускает выполнение физических граничных условий (см. также разд. 5). Как будет видно ниже, в «трехмерном» или «одномерном» вариантах ситуация другая.

### 3. БЕЗРАЗМЕРНОЕ «ДВУМЕРНОЕ» УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕЙТРАЛЬНОГО АТОМА

Далее ограничимся случаем нейтрального атома, когда  $\varphi_0 = 0$  [10], причем в уравнениях, являющихся следствием (10) или (12), пишем знак простого равенства «=», поскольку писать знак « $\approx$ » в дифференциальных уравнениях не принято:

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' = \frac{1}{r_0^2 \tilde{d}} \varphi, \tag{14a}$$

$$\tilde{\varphi}'' + \frac{1}{4r^2} \tilde{\varphi} = \frac{1}{r_0^2 \tilde{d}} \tilde{\varphi}. \tag{14b}$$

Как и в [10], перейдем к безразмерной функции  $\chi(x)$  и переменной  $x$ , связанными с  $\varphi(r)$ ,  $\tilde{\varphi}(r)$ ,  $r$  соотношениями

$$\varphi = \frac{(Ze)}{r_0 \sqrt{\tilde{d}}} \frac{\chi}{x}, \tag{15a}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{(Ze)}{\sqrt{r_0 \sqrt{\tilde{d}}}} \frac{\chi}{\sqrt{x}}, \tag{15b}$$

$$r = x r_0 \sqrt{\tilde{d}}, \quad x = \frac{r}{r_0 \sqrt{\tilde{d}}}. \tag{15c}$$

Если функции  $\varphi$ ,  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяют уравнениям (14a), (14b), то функция  $\chi$ , как можно убедиться, должна удовлетворять уравнению

$$\chi'' - \frac{1}{x} \chi' = \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \chi, \tag{16}$$

а при граничном условии

$$\chi(0) = 1, \tag{16a}$$

аналогичном «трехмерному» варианту теории [10], легко видеть, что  $\varphi|_{r \rightarrow 0} \rightarrow Ze/r$ , как и должно быть [10].

Из асимптотической формы уравнения (16) при  $x \rightarrow \infty$ :  $\chi'' = \chi$ , легко получить также, что существует асимптотика  $\chi|_{x \rightarrow \infty} \sim e^{-x}$  с граничным условием для  $\chi$ , являющимся обязательным [10]:

$$\chi(\infty) = 0, \quad (16b)$$

это соответствует исчезновению поля нейтрального атома на бесконечности (иначе говоря,  $r\varphi(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , т.е. при  $r \rightarrow \infty$  функция  $\varphi(r)$  должна стремиться к нулю «быстрее», чем  $1/r$ ). Другую, экспоненциально возрастающую асимптотику  $\chi|_{x \rightarrow \infty} \sim e^x$ , являющуюся нефизической, очевидно, в любом случае не следует учитывать.

При таком выборе функции  $\chi$  граничные условия (16a), (16b) совпадают с «трехмерными» [10]. Уравнение же для аналогичной функции  $\chi$ , зависящей от безразмерной переменной  $x$ , в соответствии с замечанием в конце разд. 2, в «трехмерном» варианте имеет значительно более простой, чем (16), вид:  $x^{1/2}\chi'' = \chi^{3/2}$  [10].

Заметим, что в «двумерном» варианте безразмерная переменная  $x$  не зависит от  $Z$ , в отличие от «трехмерного» [10] или «одномерного» (см. ниже (22b)) варианта, что является следствием линейности по  $\varphi$  «двумерного» уравнения Томаса–Ферми (14a), в противоположность двум последним случаям (формула (70.4) из [10] и, ниже, формула (19) данной работы).

В рассматриваемом «двумерном» случае в принципе возможен и другой выбор безразмерной функции, не используемый, впрочем, нами в дальнейшем:

$$\Theta(x) = \frac{\chi(x)}{x} \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\Theta|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{x}, \quad x\Theta|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (17a)$$

При этом, согласно (15a),

$$\varphi = \frac{(Ze)}{r_0 \sqrt{d}} \Theta(x) \quad (17b)$$

с «более компактным» по сравнению с (16) дифференциальным уравнением для  $\Theta(x)$  (см. также (14a)):

$$\Theta'' + \frac{1}{x} \Theta' = \Theta, \quad (17c)$$

что является, по-видимому, единственным преимуществом такого выбора.

#### 4. ОСНОВНОЕ И «БЕЗРАЗМЕРНОЕ» УРАВНЕНИЕ ТОМАСА–ФЕРМИ В «ОДНОМЕРНОМ» ПРОСТРАНСТВЕ

Схема рассуждений для «одномерного» атома достаточно аналогична схеме для «двумерного» со следующими отличиями.

Именно, вместо (6) вводится в рассмотрение линейная концентрация  $\tau$  на расстоянии  $z (> 0)$  от ядра:

$$\tau = \frac{2}{\pi \hbar} \sqrt{2m_e e(\varphi - \varphi_0)}, \quad (18)$$

причем в соотношении

$$2 \frac{2p dz}{2\pi \hbar} = \tau dz$$

коэффициент 2 отвечает теперь двум значениям четности  $P = \pm 1$ , а не проекции спина (см. также формулу (2)) — ориентация спина в эффективно-«одномерном» пространстве фиксирована [2], а перевернуть спина невозможно «по определению». В последнем выражении  $2p$  — объем «одномерного»  $p$ -пространства.

Уравнение же типа (14a) для «одномерного» потенциала, получаемое из уравнения Пуассона  $d^2\varphi/dz^2 = 4\pi en$  аналогичной (8) заменой  $n \approx \tau/S_{eff}$ , как можно убедиться, в данном случае приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\sqrt{m_e}}{\hbar \tilde{S}} \frac{1}{z_0^2} e\sqrt{e\varphi}, \quad (19)$$

где параметр

$$z_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \equiv Zz_Z$$

аналогичен «двумерному» параметру  $r_0$  (9), а «безразмерная площадь поперечного сечения»  $\tilde{S}$  «одномерного цилиндрического атома» определена как

$$\tilde{S} = \frac{S_{eff}}{4\sqrt{2}z_0^2}. \quad (20)$$

Здесь  $S_{eff}$  — эффективная «площадь поперечного сечения» такого «вытянутого атома», которая, например, для атома (как, очевидно, и для водородоподобного атома [9, 10]), находящегося в сверхсильном магнитном поле

$$B \gg (Z\alpha)^2 B_0, \quad B_0 = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \approx 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \quad (21a)$$

равна

$$S_{eff} \approx \pi r_{eff}^2 \approx 2\pi \lambda_C^2 \frac{B_0}{B} = 2\pi S_B, \quad (21b)$$

$$S_B \equiv \lambda_C^2 \frac{B_0}{B}, \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c}.$$

(«по определению»  $r_{eff}$  фигурирует в выражении для квадрата модуля волновой функции в магнитном поле в цилиндрических координатах [14]):  $|\Psi|^2 \sim \exp\{-(r/r_{eff})^2\}$ . При этом выполнение жесткого условия (21а) в экспериментах с бозе-конденсатом [11], по-видимому, необязательно, а конкретное значение  $S_{eff}$ , как и «толщины»  $d$  атома (разд. 2), для целей данной работы также не имеет значения.

При введении безразмерной функции  $\tilde{\chi}$  и безразмерной переменной  $x$  соотношениями

$$\tilde{\chi} = Z^{-4/5} \tilde{S}^{2/5} \frac{z_0}{e} \varphi, \tag{22}$$

$$\varphi = Z^{4/5} \tilde{S}^{-2/5} \frac{e}{z_0} \tilde{\chi}, \tag{22a}$$

$$x = \frac{z}{z_0} Z^{-1/5} \tilde{S}^{-2/5} \tag{22b}$$

можно убедиться, что в этих обозначениях уравнение (19) записывается в следующей компактной форме:

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}}{dx^2} = \sqrt{\tilde{\chi}}, \tag{23}$$

с «граничным условием» в нуле

$$\tilde{\chi}|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{x}, \tag{23a}$$

необходимым, как и ранее, для выполнения физического условия  $\varphi|_{z \rightarrow 0} \rightarrow Ze/z$  [10].

Уравнение (23) элементарно интегрируется в неявном виде в квадратурах:

$$\int \frac{d\tilde{\chi}}{\sqrt{(4/3)\tilde{\chi}^{3/2} + C_1}} = \mp x + C_2, \tag{24}$$

где  $C_{1,2}$  — постоянные интегрирования. Однако анализ этого соотношения с целью определения вида функции  $\tilde{\chi}(x)$  при выполнении «граничного условия» (23а) и физической асимптотики на бесконечности  $x\tilde{\chi}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  затруднителен, и проще в этих целях ввести другую функцию  $\chi = x\tilde{\chi}$  с «более удобными» граничными условиями вида (16а), (16б) и уравнением

$$\chi'' - \frac{2}{x} \chi' = -\frac{2}{x^2} \chi + \sqrt{x} \sqrt{\chi}. \tag{25}$$

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Если переписать уравнение (16) в виде

$$x^2 \chi'' - x \chi' = (x^2 - 1) \chi, \tag{26a}$$

то можно видеть, что оно несовместимо с граничным условием (16а).

В самом деле, используя элементарную в данном случае схему доказательства «от противного», предположим, что уравнение допускает выполнение граничного условия (16а). Тогда при  $x \rightarrow 0$  оно приобретает вид

$$x^2 \chi'' - x \chi' = -1$$

с общим решением

$$\chi = \frac{1}{2} \ln x + Ax^2 + C,$$

противоречащим, однако, этому граничному условию (16а). Таким образом, утверждение доказано.

Эта же аргументация применима и к уравнению (25), записанному в аналогичной форме

$$x^2 \chi'' - 2x \chi' = -2\chi + x^{5/2} \sqrt{\chi} \tag{26b}$$

и имеющему при  $x \rightarrow 0$  вид

$$x^2 \chi'' - 2x \chi' = -2,$$

с общим решением

$$\chi = \frac{2}{3} \ln x + Ax^3 + C.$$

В «трехмерном» случае [10] подобного противоречия не возникает, поскольку соответствующее упомянутое выше безразмерное уравнение  $x^{1/2} \chi'' = \chi^{3/2}$  при  $x \rightarrow 0$  имеет решение, удовлетворяющее условию (16а):

$$\chi = \frac{4}{3} x^{3/2} + Ax + C, \quad C = 1.$$

Таким образом, возможное в принципе существование «двумерных» или «одномерных» многоэлектронных атомов не может быть объяснено в рамках метода Томаса – Ферми, а предварительное утверждение в нашей работе [3] о возможном существовании «двумерных» многоэлектронных атомов на основании наличия упомянутой выше экспоненциально убывающей на бесконечности асимптотики является, как оказалось, излишне оптимистичным. Декларированное в этой же работе [3] утверждение о невозможности существования «одномерных» многоэлектронных атомов в рамках метода Томаса – Ферми подтверждается результатом данной работы, конкретно, как и в «двумерном» случае, невозможностью выполнения граничного условия (16а); к тому же наличие убывающей на бесконечности асимптотики решения уравнения (25), в соответствии с граничным условием (16б), в отличие от (16), является сомнительным.

Заметим, что в силу приближенного квазиклассического характера этого метода данную проблему все же нельзя считать полностью закрытой, и она, видимо, нуждается в дальнейшем теоретическом исследовании.

Ситуация во многом может проясниться в эксперименте с многоэлектронными атомами типа [11], упомянутого в разд. 1.

В частности, представляет интерес экспериментальное подтверждение вытекающего из наших результатов существования максимального значения  $Z \equiv Z_{max}$  (по-видимому,  $Z_{max} \sim 10^2$ ) такого, что при  $Z > Z_{max}$  реализация «двумерных» ( $Z_{max} \equiv Z_{2max}$ ) или «одномерных» ( $Z_{max} \equiv Z_{1max}$ ) многоэлектронных атомов была бы невозможной. Это явилось бы и доказательством адекватности метода Томаса – Ферми применительно к данной проблеме. Теоретический расчет этих величин  $Z_{1,2max}$  вряд ли возможен в силу упомянутого принципиально приближенного квазиклассического характера метода Томаса – Ферми.

Заметим в заключение, что рассмотренная в работе ситуация с многоэлектронными атомами в «одномерном» и «двумерном» пространствах по сравнению с «трехмерным» аналогична отсутствию обычного для «трехмерного» пространства бозе-конденсата в этих «низкоразмерных» пространствах и его наличию в последних только при нарушении их однородности, что попутно было отмечено, например, в наших работах [3, 4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **153**, 220 (2018).
2. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **151**, 1031 (2017).
3. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **152**, 1241 (2017).
4. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **153**, 401 (2018).
5. B. Shibuya and C. E. Wujman, Amer. J. Phys. **33**, 570 (1965).
6. B. Zaslav and C. E. Zandler, Amer. J. Phys. **35**, 1118 (1967).
7. A. Cisneros and N. V. McIntosh, J. Math. Phys. **10**, 277 (1968).
8. Л. Г. Мардоян, Г. С. Погосян, А. С. Сисакян, В. М. Тер-Антонян, ТМФ **61**, 99 (1984).
9. R. London, Amer. J. Phys. **27**, 649 (1959).
10. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, *Квантовая механика, Релятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
11. A. Gorlitz et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
12. L. H. Thomas, Proc. Phil. Soc. **23**, 542 (1927).
13. E. Fermi, Rend. Accad. Naz. Lincei **6**, 602 (1927).
14. А. А. Соколов, *Введение в квантовую электродинамику*, Физматлит, Москва (1958).