

КОНДЕНСАЦИЯ ЭКСИТОНОВ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ С БЕСПОРЯДКОМ

М. М. Глазов, Р. А. Сурис*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 14 февраля 2018 г.

Теоретически изучена конденсация Бозе–Эйнштейна экситонов в двумерных системах с учетом как случайного потенциала, связанного с несовершенствами структуры, так и конечного времени жизни экситонов. Показано, что наличие беспорядка делает конденсацию возможной. Конечное время жизни экситонов приводит к ограничению на термализацию экситонов в неупорядоченной системе и к дополнительному ограничению на критическую температуру перехода. Анализируются эффекты межчастичного взаимодействия и флуктуаций накачки. Рассчитан коррелятор фаз и проанализировано разрушение конденсата за счет эффектов взаимодействия и флуктуаций. Изучено распространение возмущений в конденсате.

DOI: 10.7868/S0044451018060159

1. ВВЕДЕНИЕ

Коллективные эффекты в экситонных системах привлекают в последние годы повышенный интерес. Несмотря на то что возможность бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в объемных полупроводниках стала обсуждаться более полувека назад [1–7], именно на двумерных системах, включая структуры с одиночными и двойными квантовыми ямами [8–13], а также квантовыми микрорезонаторами [14–16], были получены убедительные свидетельства формирования коллективного состояния этих квазичастиц. Тем не менее, несмотря на значительный прогресс, достигнутый в экспериментальных и теоретических исследованиях коллективных и когерентных эффектов в экситонных системах, открытыми остаются фундаментальные вопросы о том, насколько вообще понятие конденсата Бозе–Эйнштейна применимо к экспериментально изучаемым структурам. В частности, как хорошо известно [17, 18], конденсация в идеальных двумерных системах невозможна, однако ожидается сверхтекучесть экситонов [19, 20]. Наличие флуктуаций потенциала, вызванных несовершенствами структуры, с одной стороны, приводит к появлению локализованных состояний, где спектр экситонов становится

дискретным и конденсация — формально возможной [21], а с другой стороны, за счет локализации может подавляться сверхтекучесть. Такая постановка задачи обсуждалась в литературе для двумерных [22, 23] и одномерных [24, 25] систем, однако этот анализ не учитывает второй ключевой особенности реальных систем — наличия конечного времени жизни экситонов и, соответственно, оптической или электрической накачки. Данная работа нацелена на восполнение этого пробела.

Мы рассмотрим термодинамические свойства и корреляционную функцию фазы конденсата такой неупорядоченной системы с учетом конечного времени жизни экситонов. В заключение продемонстрируем, как происходит перенос малого возмущения концентрации частиц на фоне конденсата при конечном времени их жизни. При бесконечном значении времени жизни, как известно, малое возмущение распространяется со скоростью конденсатного звука.

2. МОДЕЛЬ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

Мы рассматриваем двумерные экситоны при наличии случайного потенциала. Конкретными реализациями такой системы могут служить структуры с одиночными или двойными квантовыми ямами, подобные исследованным в работах [8–10, 13],

* E-mail: glazov@coherent.ioffe.ru

где беспорядок может быть обусловлен, например, монослойными флуктуациями ширины ямы. Области, где яма шире, эффективно локализуют экситон [26, 27]. Такие области локализации являются потенциальными ямами для латерального движения экситонов. Аналогичная ситуация может быть реализована и в других двумерных или квазидвумерных экситонных системах, например, при наличии отталкивающих примесей, за счет хаотического распределения которых в плоскости структуры могут формироваться потенциальные ямы.

В двумерной неупорядоченной системе все одночастичные состояния локализованы [28]. Здесь и далее будет рассматриваться ситуация, когда энергетический спектр локализованных состояний ограничен снизу. Граница спектра естественным образом возникает в модели ям, поскольку, например, исходная ширина квантовой ямы не может быть сколь угодно большой, а флуктуации интерфейсов приводят лишь к сужению ямы и эффективному увеличению энергии экситона. При наличии отталкивающих примесей нижняя граница спектра соответствует покоящемуся экситону в чистой системе. Далее для простоты будем отсчитывать энергию от границы спектра $E = 0$. Вблизи края спектра плотность состояний экситонов можно представить в виде [29, 30]

$$\mathcal{D}(E) = \begin{cases} \frac{N_p E_\nu}{E^2} \exp\left(-\frac{E_\nu}{E}\right), & E > 0, \\ 0, & E < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь E_ν — характерная ширина полосы локализованных состояний, N_p — концентрация ям. Плотность состояний нормирована соотношением

$$\int_0^\infty \mathcal{D}(E) dE = N_p, \quad (2)$$

которое соответствует учету лишь одного локализованного состояния на потенциальную яму. Экспоненциальный множитель $\exp(-E_\nu/E) = \exp(-\pi R^2 N_p)$ в выражении для плотности состояний описывает вероятность найти яму радиуса R с энергией локализации экситона соответственно $E = (mR^2)^{-1}$, где m — масса движения экситона как целого (здесь и далее постоянная Планка $\hbar = 1$, множитель порядка единицы, зависящий от геометрии ямы, опускаем). В модели ям $E_\nu = \pi N_p/m$, а предэкспоненциальный множитель в выражении (1) легко получить, воспользовавшись соотношением $R dR = -(2mE^2)^{-1} dE$.

Отметим, что показатель экспоненты $(-E_\nu/E)$ вблизи флуктуационного края спектра практически не чувствителен к типу беспорядка и может быть получен из весьма общих соображений [29, 30], в то время как вид предэкспоненциального множителя может зависеть от конкретной модели примесей. Используемый нами предэкспоненциальный множитель естественным образом возникает в модели потенциальных ям и удобен для аналитического интегрирования. Подчеркнем, что соотношение (1) для плотности состояний справедливо лишь для не слишком больших энергий; при $E \gg E_\nu$, когда экспонента становится порядка единицы, плотность состояний перестает зависеть от энергии экситона, однако такие энергии не существенны для обсуждения конденсации экситонов.

Из выражения (1) следует, что в неупорядоченной системе плотность состояний вблизи границы спектра $E \rightarrow 0$ плавно обращается в нуль. Действительно, наличие состояния при $E \rightarrow 0$ требовало бы существования ямы бесконечно большого радиуса R ; вероятность найти такую яму исчезающе мала. В этом состоит ключевое отличие неупорядоченной двумерной системы от идеальной, где плотность состояний на границе спектра испытывает скачок. Это, как показано ниже, приводит к качественным изменениям в коллективном поведении экситонов по сравнению с идеальным «чистым» случаем, а именно, к возможности бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в неупорядоченной двумерной системе.

3. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ЭКСИТОНОВ

Проанализируем возможность конденсации экситонов в рамках термодинамического подхода, считая их время жизни столь большим, что частицы описываются равновесной функцией распределения

$$f(E; T, \mu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{T}\right) - 1}. \quad (3)$$

Здесь T — температура, выраженная в энергетических единицах, $\mu \leq 0$ — химический потенциал экситонов. Эффекты, связанные с конечным временем жизни экситонов, обсуждаются в следующем разд. 4. И в этом, и в следующем разделах мы пренебрегаем взаимодействием между частицами. Его роль, весьма существенную, мы проанализируем чуть позже в разд. 5.

Поскольку $\mathcal{D}(E) \rightarrow 0$ при $E \rightarrow 0$, в системе ожидается бозе-эйнштейновская конденсация экситонов. Физически это связано с тем, что энергетический спектр экситонов при малых энергиях эффективно оказывается дискретным — экситоны локализуются в соответствующих ямах. Такая ситуация аналогична конденсации атомов или экситонов в ловушках [21,31]. Связь критической температуры T_c и критической концентрации N_c экситонов получается из условия $\mu = 0$:

$$N_c = \int_0^\infty f(E; T_c, 0) \mathcal{D}(E) dE = \int_0^\infty \frac{N_p e^{-x} dx}{\exp(E_\nu/xT_c) - 1}. \quad (4)$$

Второе равенство в формуле (4) получено с использованием явного вида плотности состояний (1), безразмерная переменная интегрирования $x = E_\nu/E$. Подчеркнем, что второе равенство в формуле (4) и последующий анализ справедливы лишь при достаточно большой концентрации ям, низких температурах и малой плотности экситонов, когда актуальные энергии $E \ll E_\nu$ и можно пользоваться асимптотическим выражением (1) для плотности состояний. В противном случае модель беспорядка, связанная с наличием лишь одного уровня в каждой яме, не применима.

В пределе низких температур $T_c/E_\nu \ll 1$ и малых концентраций экситонов $N_c/N_p \ll 1$ в знаменателе выражения (4) можно опустить единицу по сравнению с экспонентой:

$$\frac{N_c}{N_p} = K_1 \left(\frac{2}{\sqrt{t}} \right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{(T_c/E_\nu)^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{\sqrt{T_c/E_\nu}} \right), \quad (5)$$

где $K_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Уравнение (5) можно решить с логарифмической точностью итерациями. В нулевом приближении критическая температура конденсации может быть представлена в виде

$$T_c \approx \frac{4E_\nu}{\ln^2 \left(\sqrt{\pi} \frac{N_p}{N_c} \right)}. \quad (6)$$

Следующая итерация дает поправку в аргументе логарифма:

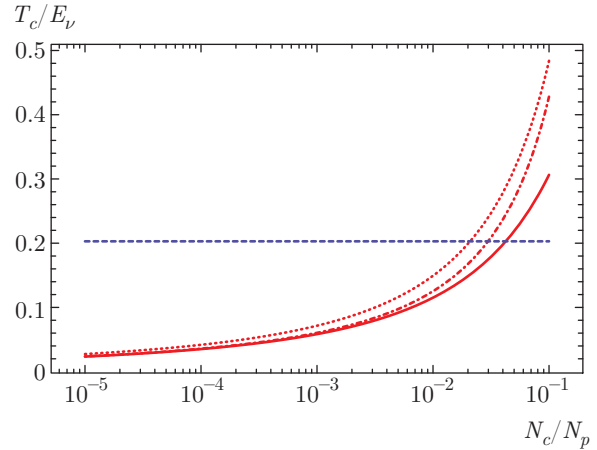


Рис. 1. Критическая температура бозе-конденсации экситонов в зависимости от плотности. Сплошная кривая — точный расчет по формуле (4), пунктир — асимптотическое выражение (6), штрихпунктир — формула (7). Штриховая горизонтальная линия показывает температуру T_k (15) при $\varkappa^{-2}N_p = 0.3$, $w_0\tau_0 = 10^7$

$$T_c \approx \frac{4E_\nu}{\ln^2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\sqrt{\pi} \frac{N_p}{N_c} \right) \frac{N_p}{N_c} \right)}. \quad (7)$$

Логарифмический множитель в выражениях (6), (7) считается большим, так что $T_c \ll E_\nu$, при этом критическая температура логарифмически зависит от концентрации экситонов. Это связано с экспоненциально малой плотностью состояний при $E \rightarrow 0$. Отметим, что T_c в соотношении (6) значительно выше, чем температура вырождения идеального двумерного бозе-газа в отсутствие беспорядка, $T_d \sim \sim N_c/m$, при которой длина волны де Бройля становится сопоставимой с расстоянием между экситонами. В этом несложно убедиться в модели ям, где $E_\nu = N_p/m$ и

$$\frac{T_c}{T_d} \sim \frac{N_p}{N_c} \frac{1}{\ln^2 \left(\sqrt{\pi} \frac{N_p}{N_c} \right)} \gg 1, \quad (8)$$

при условии, что $N_c \ll N_p$. Такое неожиданное на первый взгляд соотношение между температурой вырождения и температурой конденсации является следствием неупорядоченности экситонов. При $T \sim T_c$ среднее расстояние между заполненными ямами велико и перекрытие де-бройлевских волн экситонов не существенно, однако внутри данной ямы основное состояние занимает макроскопически большое число экситонов. На рис. 1 показаны зависимость критической температуры, найденная из

точного расчета по формуле (4), логарифмическая асимптотика (6) и уточненная асимптотика (7).

Еще раз подчеркнем, что уравнение (4) и оценки (6), (7) относятся к ситуации термодинамического равновесия, когда мы пренебрегаем конечностью времени жизни экситона. Учет конечного времени жизни частицы накладывает ограничения на температуру конденсации, которые обсуждаются в следующем разделе.

4. РОЛЬ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ ЭКСИТОНОВ

В экспериментах по конденсации экситонов в квантовых ямах электрон-дырочные пары, как правило, возбуждаются оптически в условиях нерезонансного поглощения света. Затем экситоны релаксируют по энергии, испуская фононы. В области низких энергий, где плотность состояний (1) экспоненциально мала, функция распределения экситонов определяется конкуренцией прыжков между ямами и аннигиляции экситона, обусловленной рекомбинацией образующих его электрона и дырки. За счет конкуренции этих процессов функция распределения экситонов при малых энергиях может существенно отличаться от равновесного распределения (3).

Для анализа эффектов конечного времени жизни экситонов и процессов их энергетической релаксации введем время жизни τ_0 экситона, обусловленное процессами как излучательной, так и безызлучательной рекомбинации. Его зависимостью от энергии экситона пренебрегаем, так как область энергий, в которой распределены экситоны, достаточно узкая. Представим вероятность в единицу времени прыжка между ямами с энергиями E и E' , находящимися на расстоянии r друг от друга, в виде [32–35]

$$w(E \rightarrow E', r) = w_0 \exp(-2\kappa r) \times \begin{cases} 1, & E' \leq E, \\ \exp\left(\frac{E - E'}{T}\right), & E' > E. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь κ — обратная длина подбарьерного туннелирования между ямами, w_0 — параметр, определяемый конкретным видом волновых функций локализованных экситонов и механизмом электрон-фононного взаимодействия. Экспоненциальный множитель $\exp[(E - E')/T]$ при $E' > E$ описывает вклад прыжков вверх по энергии с поглощением фононов.

Широкий разброс параметра $w(E \rightarrow E', r)$ позволяет ввести единое время энергетической релаксации экситонов [32, 36]. Однако, благодаря такому экспоненциальному разбросу, все ямы можно разделить на две категории: те, которые экситон может покинуть за время жизни, и те, время ухода из которых больше, чем время τ_0 . Последние назовем ловушками. Вероятность того, что яма с энергией E является ловушкой, описывается выражением

$$P_{tr}(E) = \exp[-K(E)], \quad (10)$$

где показатель экспоненты

$$K = \int_{w(E \rightarrow E', r)\tau_0 > 1} dE' dr 2\pi r \mathcal{D}(E'). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) описывают вероятность того, что в окрестности данной ямы нет таких ям, куда экситон мог бы прыгнуть за время жизни. При $E \rightarrow 0$ вероятность того, что данная яма является ловушкой, стремится к единице, $P_{tr}(0) = 1$.

Поскольку уход экситонов из ловушек осуществляется только благодаря рекомбинации, а темп прихода в ловушки G можно считать не зависящим от энергии локализации, заселенность ловушек не зависит от энергии E , а функция распределения экситонов по энергиям в ловушках имеет вид

$$f_{tr}(E) = G\tau_0 P_{tr}(E). \quad (12)$$

Это распределение существенно отличается от равновесного распределения (3). Ловушки при этом оказываются никак не связанными, а фазы экситонных функций в них — произвольными.

Проанализируем случай $T = 0$, когда прыжков экситонов в состояния с большими энергиями нет. Тогда выражение (10) с учетом соотношения

$$K = \int_0^E dE' \mathcal{D}(E') \int_{r < \ln(w_0\tau_0)/(2\kappa)} 2\pi r dr$$

принимает особенно простой вид:

$$P_{tr}(E) = \exp\left[-\frac{\pi N_p}{4\kappa^2} \ln^2(w_0\tau_0) \exp\left(-\frac{E_\nu}{E}\right)\right]. \quad (13)$$

Если время жизни τ_0 экситонов достаточно велико, а прыжки достаточно эффективны, так что

$$\frac{\pi N_p}{4\kappa^2} \ln^2(w_0\tau_0) \gg 1,$$

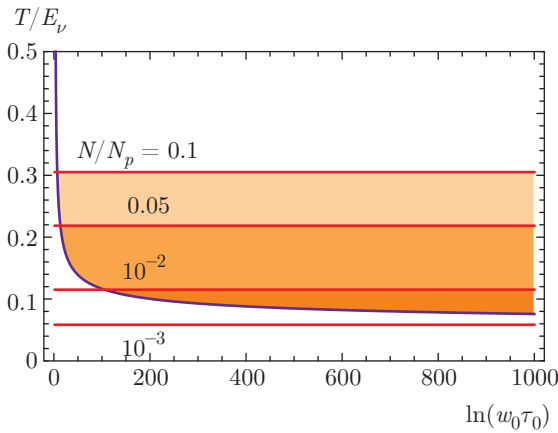


Рис. 2. Диаграмма состояний экситонов в неупорядоченной системе. Горизонтальные прямые показывают температуру конденсации при различных значениях N/N_p , рассчитанную по формуле (4); сплошная кривая — температуру T_k в (15), рассчитанную при $\chi^{-2}N_p = 0.3$; затененные области — параметры, при которых возможна конденсация при заданной плотности N : $T_k < T < T_c(N)$

то функция $P_{tr}(E)$ достаточно резко убывает при увеличении энергии экситона. При этом можно ввести характерную критическую энергию E_c , когда ловушки практически исчезают, т. е. показатель экспоненты становится равным единице:

$$K(E_c) = 1. \tag{14}$$

Эту энергию можно ассоциировать с краем «прыжковой подвижности» экситонов. Если край прыжковой подвижности экситонов попадает в тепловую область $E_c \lesssim T$, то ограничения (12) на функцию распределения экситонов, связанные с их конечным временем жизни, несущественны и можно считать, что конденсация экситонов возможна. Если температура достаточно мала, $T \ll E_c$, то функция распределения экситонов носит существенно неравновесный характер и говорить об их бозе-эйнштейновской конденсации в строгом смысле этого слова нельзя. Таким образом, конденсация экситонов возможна при температуре

$$T > T_k \equiv E_c = \frac{E_v}{\ln \left[\frac{\pi N_p}{4\chi^2} \ln^2(w_0 \tau_0) \right]}. \tag{15}$$

Анализ показывает, что учет забросов вверх по энергии приводит к появлению дополнительного логарифмического множителя в знаменателе соотношения (15), однако корректная оценка, по-видимому, требует учета еще и троек локализованных состояний (второе выше первого по энергии, а третье ниже

и первого, и второго, но дальше от первого, чем от второго, поэтому прыжок возможен за время жизни только по пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$). На качественном уровне уменьшение критической температуры с увеличением концентрации N_p ям связано с тем, что чем больше ям, тем больше вероятность выброса из ловушки, т. е. тем легче идет энергетическая релаксация экситонов. Диаграмма состояний экситонов в неупорядоченной системе в осях логарифм времени жизни — температура, рассчитанная с учетом ограничения (15), представлена на рис. 2.

5. ЭФФЕКТЫ МЕЖЭКСИТОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Приведенные выше оценки предполагают, что взаимодействие между экситонами отсутствует. Одночастичное описание можно использовать при условии, что энергетический сдвиг уровня экситона мал по сравнению с расстоянием между уровнями в яме. В яме радиуса R при плотности экситонов N сдвиг уровня за счет экситон-экситонного взаимодействия можно оценить в приближении однократного экситон-экситонного рассеяния как

$$\delta E \equiv \mathcal{E}_R - E_R = \mathcal{T}N, \quad \mathcal{T} = \frac{2\pi}{m} \frac{1}{\ln(E_0/\mathcal{E}_R)}. \tag{16}$$

Здесь $E_R = 1/mR^2$ — энергия размерного квантования в яме, \mathcal{E}_R — энергия с учетом межчастичного взаимодействия, \mathcal{T} — амплитуда экситон-экситонного рассеяния. В двумерной системе на низких энергиях величина \mathcal{T} обладает логарифмической особенностью [37]; в выражение (16) введена энергия обрезания $E_0 \sim (1/ma^2) \exp(2\pi\Gamma/m)$, где Γ — затравочная константа взаимодействия, a — радиус потенциала межэкситонного взаимодействия. Для обменного взаимодействия между экситонами величина a порядка боровского радиуса экситона, а E_0 порядка энергии связи экситона [38]. Соответственно, логарифмический множитель считается большим:

$$\ln \frac{E_0}{\mathcal{E}_R} \gg 1, \quad \frac{m}{2\pi} \ln \frac{E_0}{\mathcal{E}_R} \gg \Gamma^{-1}.$$

Отметим, что при наличии диполь-дипольного взаимодействия, например, в двухъямных структурах, экситоны могут упорядочиваться в кристаллическую решетку [39].

С логарифмической точностью решение уравнения (16) записывается в форме

$$\mathcal{E}_R = \frac{2\pi N}{m} \frac{1}{\ln(mE_0/2\pi N)}. \tag{17}$$

Требование $\mathcal{E}_R \ll E_R$ соответствует ограничению

$$NR^2 \ll \frac{1}{\ln(mE_0/2\pi N)}. \quad (18)$$

С ростом концентрации экситонов условие (18) нарушается и распределение экситонов по случайному потенциалу определяется конкуренцией флуктуаций потенциала, которые локализуют экситоны, и отталкиванием экситонов друг от друга, которое приводит к эффективному распределению экситонов по большей площади.

Таким образом, при малых концентрациях волновые функции экситонов, когда они распределены по практически независимым ямам и имеют «конденсатный» характер, скоррелированы в пределах каждой из ям. По мере увеличения концентрации экситоны заполняют ямы и за счет межэкситонного отталкивания экранируют случайный потенциал. Нечто подобное имеет место в слабонеидеальном трехмерном бозе-газе с отталкивающими примесями [7]. Там уменьшение амплитуды волновой функции конденсата, а следовательно, и концентрации частиц возле отталкивающего центра, приводит к возникновению эффективного притягивающего потенциала, экранирующего положительный потенциал примесного центра. Заметим, что именно такое экранирование приводит к тому, что в присутствии конденсата сечение рассеяния его элементарных возбуждений — фононов — носит рэлеевский характер [7] (см. также ниже). В случае экранируемых за счет экситон-экситонного отталкивания ям характерный размер эффективного потенциала для низких уровней возбуждения (критерий (18)), когда экситонные «лужи» разъединены, составляет величину порядка суммы размера ямы и характерного туннельного «хвоста» волновой функции экситона в яме.

Если же ямы заполнены и «лишние» экситоны заполняют все пространство, то картина становится близкой к такой, которая реализуется в ситуации, соответствующей системе без примесей. По существу, экситоны распределяются в пространстве с такой концентрацией $N(\mathbf{r})$, чтобы полностью экранировать случайный потенциал $V(\mathbf{r})$. А именно, их химический потенциал

$$\mu = \mathcal{T}N(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \quad (19)$$

не зависит от координаты [18, 40]. Строго говоря, выполнение равенства (19) требует выполнения дополнительного условия

$$\sqrt{\mathcal{T}Nm} \gg \frac{1}{V} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|.$$

В этом случае для определения радиуса корреляции можно воспользоваться гидродинамическим подходом, описывая взаимодействующие экситоны как идеальную жидкость [6, 18]. Соответственно, малые флуктуации концентрации частиц, δn , и скорости \mathbf{v} (в стационарной ситуации $\mathbf{v} \equiv 0$, $N \equiv N(\mathbf{r})$) удовлетворяют системе уравнений [6, 18, 41]

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{v}) + \frac{\delta n}{\tau_0} = \delta g, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \delta p = 0, \quad (20b)$$

где флуктуация давления $\delta p = \mathcal{T} \delta n$, $\delta g \equiv \delta g(\mathbf{r}, t)$ — флуктуации темпа генерации экситонов. В линеаризованном уравнении (20a) мы пренебрегли зависимостью стационарной плотности от координат. Влияние этой зависимости обсудим чуть позже.

Для анализа роли конечного времени жизни экситона в уравнении (20a) зависимостями средней концентрации частиц N от координаты и амплитуды рассеяния \mathcal{T} от энергии можно пренебречь. Тогда, переходя к фурье-компонентам по координатам и времени для флуктуации скорости $\mathbf{v} \propto \mathbf{v}_{\mathbf{k},\omega} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, получаем

$$-i\omega \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_0} \right) \mathbf{v}_{\mathbf{k},\omega} + \frac{\mathcal{T}N}{m} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k},\omega}) = -\frac{i\mathcal{T}}{m} \mathbf{k} g_{\mathbf{k},\omega}. \quad (21)$$

Здесь $g_{\mathbf{k},\omega}$ — фурье-образ флуктуаций темпа генерации δg . Уравнение (21) можно представить в несколько ином виде, поскольку для идеальной жидкости $\mathbf{v} = m^{-1} \nabla \varphi$, где φ — фаза конденсата. Соответственно, для флуктуации фазы получаем

$$-i\omega \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_0} \right) \varphi_{\mathbf{k},\omega} + \frac{\mathcal{T}N}{m} k^2 \varphi_{\mathbf{k},\omega} = -\mathcal{T} g_{\mathbf{k},\omega}. \quad (22)$$

Спектр элементарных возбуждений — фононов — в согласии с работами [42, 43] описывается соотношением

$$\omega \left(\omega + \frac{i}{\tau_0} \right) = \frac{\mathcal{T}N}{m} k^2 \quad (23)$$

и в области низких частот носит диффузионный характер:

$$\omega \approx -iDk^2, \quad (24)$$

где эффективный коэффициент диффузии $D = \mathcal{T}N\tau_0/m$. При достаточно больших k частота приобретает вещественную часть sk , где

$$s = \sqrt{\mathcal{T}N/m} \quad (25)$$

— скорость звука.

Заметим, что учет в этом подходе флуктуационного потенциала сводится лишь к замене $N \rightarrow N(\mathbf{r})$ в формуле (20а), а связь между флуктуациями давления δp и концентрации δn в (20b) остается прежней. Вместо уравнения (22) имеем

$$\omega \left(\omega + \frac{i}{\tau_0} \right) \varphi_\omega + \frac{\mu}{m} \Delta \varphi_\omega - \nabla \frac{V(\mathbf{r})}{m} \nabla \varphi_\omega = \mathcal{T} g_\omega. \quad (26)$$

В выражении (26), в отличие от (22), выполнено только фурье-преобразование по времени, а зависимость от пространственных координат сохранена. Последний член в левой части соотношения (26) описывает рассеяние фононов. Наличие рассеяния приводит к вкладам в затухание возбуждений более высокой степени по волновому вектору, чем в (24). Так, для объемного полупроводника затухание $\gamma_k \propto k^4$ (закон Рэлея) [7], в двумерной системе $\gamma_k \propto k^3$. Получим этот результат, для чего заметим, что собственно-энергетическая часть для фонона в борновском приближении принимает вид (ср. с работой [7], где рассматривался трехмерный случай)

$$\Sigma_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{1}{m^2} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2 |V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2}{\omega(\omega + i/\tau_0) - s^2 k'^2}, \quad (27)$$

а затухание фонона связано с собственно-энергетической частью как

$$\gamma_k = -\text{Im} \Sigma_{\mathbf{k}}(sk)/(2sk).$$

Здесь $V_{\mathbf{k}}$ — фурье-образ флуктуационного потенциала. Нам достаточно проанализировать $\Sigma_{\mathbf{k}}(\omega)$ на массовой поверхности при $\omega\tau_0 \gg 1$, тогда суммирование по \mathbf{k}' можно провести по полюсам, а зависимость $V_{\mathbf{k}}$ можно пренебречь для не слишком больших волновых векторов. В результате имеем

$$\gamma_k = \frac{k^3}{16m^2 s^3} N_p |V_0|^2, \quad (28)$$

где N_p — концентрация рассеивателей (ям), V_0 — фурье-образ потенциала одного рассеивателя. В любом случае при $k \rightarrow 0$ эффект от флуктуационного потенциала параметрически мал по сравнению с вкладом от конечности времени жизни, приведенным в (24), поэтому в дальнейшем флуктуациями потенциала пренебрегаем.

Введем матрицу плотности экситонов как [17, 18]

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (29)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ ($\psi^\dagger(\mathbf{r})$) — операторы уничтожения (рождения) экситонов. При наличии конденсата ее можно выразить в виде

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N \exp[-\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0)/2], \quad (30)$$

где введена корреляционная функция фаз $\Phi(\mathbf{r}, t) = \langle \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t') \varphi(\mathbf{r}', t') \rangle$ (ср. с работой [44]):

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{T}^2 g_0 \tau_0^2 \times \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}}{[\omega(\omega + i) - Dk^2][\omega(\omega - i) - Dk^2]}. \quad (31)$$

При выводе выражения (31) мы учли, что коррелятор флуктуаций скорости генерации экситонов имеет следующий вид:

$$\langle g_{\mathbf{k}, \omega} g_{\mathbf{k}', \omega'} \rangle = g_0 \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \delta(\omega + \omega'), \quad (32)$$

g_0 — темп генерации экситонов, причем стационарная концентрация экситонов $N = g_0 \tau_0$. Нас интересуют низкие частоты и большие расстояния (т.е. малые k), тогда членами, пропорциональными ω^2 , в каждом из сомножителей в знаменателе можно пренебречь и корреляционная функция фаз приобретает вид

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{T}^2 g_0 \tau_0^2}{D} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\exp(-Dk^2 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{2k^2}. \quad (33)$$

Если учесть выражение для коэффициента диффузии $D = \mathcal{T} N \tau_0 / m$ и равенство $N = g_0 \tau_0$, то коэффициент перед суммой в (33) оказывается равным просто $\mathcal{T} m$.

В трехмерном случае интегрирование в (33) можно выполнить точно:

$$\Phi^{(3D)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{T} m}{8\pi r} \text{erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}} \right). \quad (34)$$

При больших r для коррелятора фаз имеем $\Phi^{(3D)}(\mathbf{r}, t) \propto 1/r$, и матрица плотности (30) не обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, в трехмерных системах флуктуации накачки (так же, как и тепловые флуктуации) не разрушают конденсата при наличии взаимодействия и при конечном времени жизни экситонов.

Нас интересует, однако, двумерный случай. Здесь сумма по \mathbf{k} расходится на малых k . Чтобы избежать этой особенности, введем разность

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \Phi(0, t), \quad (35)$$

исключив тем самым вклад флуктуаций фазы в перенормировку плотности конденсата N [18]. Из (35) следует, что¹⁾

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{T} m}{2\pi} \int dk k \frac{\exp(-Dk^2 t) [J_0(kr) - 1]}{2k^2}, \quad (36)$$

¹⁾ Отметим, что в трехмерном случае амплитуда рассеяния имеет размерность обратной массы, умноженной на длину, в то время как в двумерном случае — просто обратной массы.

где $J_0(kr)$ — функция Бесселя. Отметим, что при $t = 0$ интеграл (36) расходится на верхнем пределе, но его следует обрезать на волновых векторах $k \sim \sim ms$, где дисперсия возбуждений уже не связана со взаимодействием в системе. С логарифмической точностью

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathcal{T}m}{8\pi} \left(4\gamma + \ln \frac{Dt}{r^2} \right), \quad (37)$$

где γ — постоянная Эйлера. В двумерной системе (37) корреляционная функция ведет себя как $\ln(Dt/r)$, поэтому матрица плотности (30) конденсата на больших расстояниях убывает по степенному закону. Подчеркнем, что показатель степени определяется лишь произведением амплитуды экситон-экситонного рассеяния и эффективной массы экситона, $\mathcal{T}m$, и не зависит от условий накачки.

Сравнение формулы (31) и соответствующих выражений в работах [18, 19, 44] показывает, что формула (31) применима и в равновесной ситуации с заменой множителя $\mathcal{T}^2 g_0 \tau_0^2$ на величину, пропорциональную $k_B T$. Таким образом, в двумерной системе флуктуации накачки, наряду с эффектами конечной температуры, разрушают дальний порядок в конденсате экситонов.

6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОНДЕНСАТЕ

Одним из проявлений бозе-конденсации экситонов и сверхтекучести конденсата должен быть их недиффузионный перенос от области возбуждения. Для того чтобы продемонстрировать, как влияет конечное время жизни экситонов на их транспорт, мы представим решение задачи о распространении малой локальной вариации концентрации экситонов, возникшей в результате малой локальной вариации возбуждения. Малость вариации концентрации по сравнению с ее стационарным значением позволяет ограничиться линеаризованными уравнениями, которые, несмотря на простоту, позволяют увидеть основные особенности процесса переноса.

Итак, мы воспользуемся уравнениями (20), из которых вытекает соотношение, связывающее фурье-компоненты вариации плотности экситонов, $\delta n_{\mathbf{k},\omega}$, с фурье-компонентами вариации генерации, $\delta g_{\mathbf{k},\omega}$

$$\left[-i\omega \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_0} \right) + s^2 k^2 \right] \delta n_{\mathbf{k},\omega} = -i\omega \delta g_{\mathbf{k},\omega}. \quad (38)$$

Таким образом,

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} \frac{-i\omega \delta g_{\mathbf{k},\omega}}{-i\omega \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_0} \right) + s^2 k^2} \times e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (39)$$

Естественно рассмотреть реакцию системы на δ -импульс по времени, когда $\delta g_{\mathbf{k},\omega}$ не зависит от частоты. Взятие интеграла по частоте ω нужно провести таким образом, чтобы не нарушалась причинность. Контур интегрирования можно выбрать так, чтобы он состоял из действительной оси частот и полуокружности стремящегося к бесконечности радиуса, лежащей в нижней полуплоскости. Видно, что оба полюса лежат в нижней полуплоскости, поэтому

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \sum_{\mathbf{k}} \delta g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times \left[\cos(\Omega_k t) - \frac{\sin(\Omega_k t)}{2\tau_0 \Omega_k} \right], \quad (40)$$

где $\Omega_k = \sqrt{s^2 k^2 - (2\tau_0)^{-2}}$. При $k > k_0$, где $k_0 = (2s\tau_0)^{-1}$, частота Ω вещественна, что соответствует волновому распространению возмущений со скоростью конденсатного звука. При $k < k_0$ вещественная часть частоты, как отмечалось в разд. 5, обращается в нуль, а мнимая часть оказывается пропорциональной Dk^2 (ср. с (24)). Вклад в выражение (40) от малых k описывает диффузионное распространение возмущений. Групповая скорость возмущения

$$\mathbf{v}_{gr,\mathbf{k}} = \frac{s^2 \mathbf{k}}{\Omega_k} \quad (41)$$

стремится к s при больших k , а при $k = k_0$ обращается в бесконечность из-за перехода к диффузионному распространению возмущений с малыми k . Подчеркнем, что дисперсия $\Omega \equiv \Omega_k$ не имеет существенных особенностей при конечных \mathbf{k} , поэтому поведение волновых пакетов в такой системе регулярно, несмотря на особенность в групповой скорости при $k = k_0$.

Вначале рассмотрим однородное возмущение вдоль оси y (оси x и y выбраны произвольно в плоскости структуры, возможную анизотропию системы не учитываем), так что

$$\delta g_{\mathbf{k},\omega} = \delta g_0 \exp(-|k_x| x_0) \delta_{k_y,0}. \quad (42)$$

Параметр x_0 в (42) определяет ширину импульса в реальном пространстве. Тогда флуктуация концентрации зависит лишь от координаты x в виде

$$\delta n(x, t) = \delta g_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \times \exp(ik_x x) \exp(-|k_x|x_0) \times \left[\cos(\Omega_k t) - \frac{\sin(\Omega_k t)}{2\tau_0\Omega_k} \right]. \quad (43)$$

При $k_x \rightarrow \infty$ первый член в квадратных скобках значительно превосходит второе слагаемое, а подынтегральное выражение осциллирует в зависимости от k_x , убывая по абсолютной величине лишь при $|k_x| \gtrsim 1/x_0$. Таким образом, область интегрирования по k_x можно разбить на две: 1) область относительно малых $|k_x| \leq k_0$, где частота Ω_k чисто мнимая, и 2) область относительно больших $|k_x| > k_0$. Здесь и далее считаем, что $k_0 x_0 \gg 1$. В реальном пространстве область интегрирования 1) дает широкий и относительно малый диффузионный фон $\delta \tilde{n}(x, t)$, который медленно расплывается и исчезает, а область 2) дает вклад

$$\delta n(x, t) = \delta g_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \times \frac{\Delta_{x_0}(x - st) + \Delta_{x_0}(x + st)}{2}. \quad (44)$$

Здесь

$$\Delta_{x_0}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x_0}{x^2 + x_0^2}$$

— функция Лоренца, описывающая начальное распределение локальной вариации плотности. Из формулы (44) следует, что импульсы возмущения распространяются практически без искажения от начала координат к $x \rightarrow \pm\infty$ со скоростью звука. Отметим, что при $x_0 \rightarrow 0$ функция Лоренца переходит в δ -функцию. Для фонового вклада при $t \gg s\tau_0^2/D \sim \tau_0$, $|x| \ll s\sqrt{\tau_0 t}$ можно получить оценку

$$\delta \tilde{n}(x, t) = \delta g \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \int_{-k_0}^{k_0} \frac{dk_x}{2\pi} \exp(ik_x x) \times [\exp(-Dk_x^2 t) - \cos(sk_x t)] \approx \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \times \left(\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \frac{\sin[k_0(x-st)]}{x-st} - \frac{\sin[k_0(x+st)]}{x+st} \right). \quad (45)$$

Отметим, что диффузионные эффекты проявляются лишь на временах $t \gg \tau_0$, когда начальное возмущение концентрации практически исчезло за счет конечного времени жизни экситонов.

Для аксиально-симметричного возмущения

$$\delta g_k = \delta g_0 \exp(-kr_0)$$

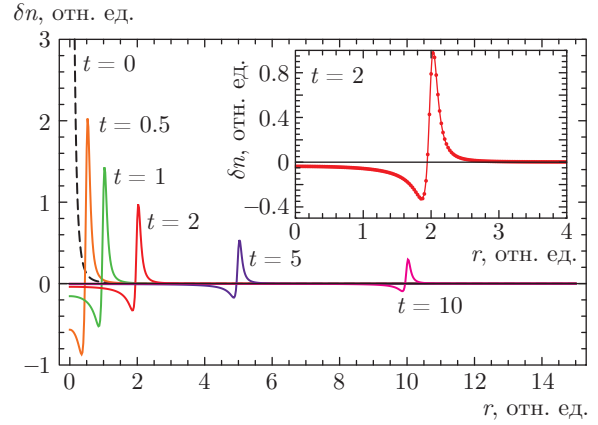


Рис. 3. Эволюция профиля возмущения концентрации экситонов при распространении в двумерной системе. В используемой системе единиц $s = 1$, $\tau_0 = 10$, $k_0 = 10$. Моменты времени, соответствующие рассчитанным по формуле (46) профилям, указаны у кривых. На вставке показаны профили при $t = 2$, рассчитанные по формуле (46) (точки) и по аналитическому выражению (47) (сплошная кривая)

с параметром r_0 , контролирующим ширину возмущений в реальном пространстве, выражение (40) принимает вид

$$\delta n(r, t) = \delta g \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \int \frac{dk}{2\pi} J_0(kr) \times \exp(-kr_0) \left[\cos(\Omega_k t) - \frac{\sin(\Omega_k t)}{2\tau_0\Omega_k} \right]. \quad (46)$$

Основной вклад в выражение (46) вносят большие $k \gg k_0$. Пренебрегая малым диффузионным фоном при интегрировании в (46), заменяем Ω_k на sk и получаем

$$\delta n(r, t) = \frac{\delta g_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{r_0 - ist}{[r^2 + (r_0 - ist)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (47)$$

На рис. 3 представлены профили возмущения концентрации в разные моменты времени при распространении в двумерной системе, рассчитанные по общему выражению (46). На вставке для сравнения приведены профили в один и тот же момент времени, рассчитанные по формуле (46) и по упрощенной аналитической формуле (47). Отметим, что профиль возмущения при распространении становится знакопеременным: при фиксированном t функция $\delta n(r, t)$ меняет знак при $r \approx st$. Такое поведение характерно для цилиндрических звуковых волн, которые всегда содержат как области сжатия, так и области разряжения [45].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим основные результаты работы. Во-первых, наличие случайного потенциала с ограниченным снизу спектром приводит к конденсации невзаимодействующих экситонов в двумерной системе в отличие от «чистой» двумерной системы. Во-вторых, конечное время жизни экситонов накладывает ограничение снизу на температуру фазового перехода из-за конкуренции процессов рекомбинации и релаксации экситонов в нижние по энергии состояния. В-третьих, в системе без взаимодействия экситоны распределены по практически независимым ямам, и их корреляции распространяются на расстояние порядка размера ямы.

Отталкивание между экситонами приводит к их выталкиванию из ям и экранированию флуктуационного потенциала. Такая ситуация подобна слабо-неидеальному бозе-газу в чистой двумерной системе. Конечное время жизни экситонов и пространственные и временные флуктуации потока накачки приводят к степенному убыванию корреляционной функции с расстоянием.

Проведенный анализ процесса распространения импульса малого возмущения плотности конденсата показывает, что импульс перемещается от места его возбуждения со скоростью конденсатного звука. При этом диффузионный процесс становится существенным только тогда, когда амплитуда импульса уже сильно подавлена за счет излучательной и безызлучательной рекомбинаций экситонов. Заметим в заключение, что представленный анализ справедлив для любых бозонов, имеющих конечное время жизни.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Москаленко, ФТТ **4**, 276 (1962).
2. J. M. Blatt, K. W. Böer, and W. Brandt, Phys. Rev. **126**, 1691 (1962).
3. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, Письма в ЖЭТФ **5**, 238 (1967).
4. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968).
5. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **53**, 544 (1967).
6. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **54**, 298 (1968).
7. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **58**, 686 (1970).
8. А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, П. А. Ни, С. В. Дубонос, И. Хвам, К. Соеренсен, Письма в ЖЭТФ **75**, 689 (2002).
9. D. Snoke, S. Denev, Y. Liu, L. Pfeiffer, and K. West, Nature **418**, 754 (2002).
10. M. Stern, V. Umansky, and I. Bar-Joseph, Science **343**, 55 (2014).
11. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **84**, 390 (2006).
12. В. Б. Тимофеев, А. В. Горбунов, Д. А. Демин, ФНТ **37**, 229 (2011).
13. L. V. Butov, ЖЭТФ **149**, 505 (2016).
14. M. Richard, J. Kasprzak, R. André, R. Romestain, Le Si Dang, G. Malpuech, and A. Kavokin, Phys. Rev. B **72**, 201301 (2005).
15. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, Nature **443**, 409 (2006).
16. V. V. Belykh, N. N. Sibeldin, V. D. Kulakovskii, M. M. Glazov, M. A. Semina, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, and A. Forchel, Phys. Rev. Lett. **110**, 137402 (2013).
17. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
18. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Физматлит, Москва (2001).
19. В. Н. Попов, ТМФ **11**, 354 (1971).
20. D. S. Fisher and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. B **37**, 4936 (1988).
21. A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge Univ. Press (1996).
22. G. Malpuech, D. D. Solnyshkov, H. Ouerdane, M. M. Glazov, and I. Shelykh, Phys. Rev. Lett. **98**, 206402 (2007).
23. G. M. Falco, T. Nattermann, and V. L. Pokrovsky, Phys. Rev. B **80**, 104515 (2009).
24. I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and G. V. Shlyapnikov, Nat. Phys. **6**, 900 (2010).
25. V. P. Michal, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and G. V. Shlyapnikov, PNAS **113**, E4455 (2016).

26. D. Gammon, E. S. Snow, B. V. Shanabrook, D. S. Katzer, and D. Park, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3005 (1996).
27. М. А. Семина, Р. А. Сергеев, Р. А. Сурис, *ФТП* **40**, 1373 (2006).
28. F. Evers and A. D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355 (2008).
29. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **53**, 743 (1967).
30. Л. А. Пастур, И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
31. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
32. D. G. Thomas, J. J. Hopfield, and W. M. Augustyniak, *Phys. Rev.* **140**, A202 (1965).
33. L. E. Golub, E. L. Ivchenko, and A. A. Kiselev, *J. Opt. Soc. Amer. B* **13**, 1199 (1996).
34. А. А. Киселев, *ФТП* **32**, 564 (1998).
35. S. A. Tarasenko, A. A. Kiselev, E. L. Ivchenko, A. Dinger, M. Baldauf, C. Klingshirn, H. Kalt, S. D. Baranovskii, R. Eichmann, and P. Thomas, *Semicond. Sci. Technol.* **16**, 486 (2001).
36. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979).
37. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
38. C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, and P. Schwendimann, *Phys. Rev. B* **58**, 7926 (1998).
39. Р. А. Сурис, *ЖЭТФ* **149**, 695 (2016).
40. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, *Письма в ЖЭТФ* **92**, 208 (2010).
41. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
42. M. Wouters and I. Carusotto, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 140402 (2007).
43. I. Carusotto and C. Ciuti, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 299 (2013).
44. G. Roumpos, M. Lohse, W. H. Nitsche, J. Keeling, M. H. Szymanska, P. B. Littlewood, A. Löffler, S. Höfling, L. Worschech, A. Forchel, and Y. Yamamoto, *PNAS* **109**, 6467 (2012).
45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).