

ОПТИЧЕСКИЕ ТОМОГРАММЫ ГАУССОВЫХ СОСТОЯНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ДОБАВЛЕННЫМИ ФОТОНАМИ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Сян-Го Мен^{a*}, Цзи-Со Ван^{a,b}, Бао-Лун Лян^a, Чунань-Хунь Ду^c

^a School of Physical Science and Information Engineering, Liaocheng University
252059, Liaocheng, China

^b Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Communication
Science and Technology, Liaocheng University
252059, Liaocheng, China

^c Shandong Provincial Key Laboratory of Laser Polarization and
Information Technology, College of Physics and Engineering, Qufu Normal University
273165, Qufu, China

Поступила в редакцию 25 октября 2017 г.

(Перевод с английского)

OPTICAL TOMOGRAMS OF MULTIPLE-PHOTON-ADDED GAUSSIAN STATES VIA THE INTERMEDIATE STATE REPRESENTATION THEORY

Xiang-Guo Meng, Ji-Suo Wang, Bao-Long Liang, Chuan-Xun Du

Оптическая томограмма квантового состояния может служить альтернативой его матрицы плотности, поскольку содержит всю информацию об этом состоянии. Для вычисления характерных томограмм когерентных состояний с несколькими добавленными фотонами, тепловых состояний и смещенных тепловых состояний в данной работе используется явное выражение для промежуточного состояния $|q, f, g\rangle$ (т.е. собственный вектор оператора координаты и импульса $fQ + gP$) и преобразование Радона между оператором Вигнера $\Delta(p, q)$ и оператором плотности чистого состояния $|q, f, g\rangle\langle q, f, g|$. Аналитические томограммы этих состояний фактически являются представлениями в виде конечных сумм, связанными с полиномами Эрмита одной переменной. Кроме того, численные расчеты показывают, что при увеличении числа добавленных фотонов для этих трех состояний могут возникать томографические распределения с несколькими максимумами, причем в измеримых томограммах когерентных и смещенных состояний имеются особенности с периодом π , а в томограммах тепловых состояний они отсутствуют.

DOI: 10.1134/S0044451018090018

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптическая томография представляет большой интерес с точки зрения реализации свойств стандартной положительной функции распределения вероятности, описывающей квантовые состояния в

квантовой статистике и квантовой оптике. Она также позволяет получать статистические распределения по числу фотонов и реконструировать функции Вигнера фотонных состояний. Томографическое представление данного одномодового фотонного состояния $|\phi\rangle$ задается в виде следующего произведения:

$$M(q, f, g) = |\langle \phi | q, f, g \rangle|^2, \quad (1)$$

или дробного преобразования Фурье его волновой функции $\phi(y)$, впервые введенного в работе [1],

* E-mail: mengxianguo1978@sina.com

$$M(q, f, g) = \frac{1}{2\pi |g|} \left| \int dy \phi(y) \times \exp\left(\frac{if}{2g}y^2 - \frac{iqy}{g}\right) \right|^2, \quad (2)$$

где $|q, f, g\rangle$ обозначает собственный вектор эрмитового оператора $fQ + gP$ с соответствующим собственным значением q и двумя действительными параметрами f и g ; Q и P являются соответственно операторами координаты и импульса. Уравнения (1) и (2) действительно эквивалентны. Пусть $\langle y | q, f, g \rangle = W$, тогда имеем

$$\langle y | fQ + gP | q, f, g \rangle = \left(fy - ig \frac{\partial}{\partial y} \right) W = qW, \quad (3)$$

что можно также переписать в виде уравнения

$$-i \frac{\partial}{\partial y} W = \frac{q - fy}{g} W, \quad (4)$$

решение которого имеет вид

$$W = \exp\left(\frac{iqy}{g} - \frac{if}{2g}y^2\right). \quad (5)$$

Далее, подставляя (5) в (1) и используя соотношение полноты координатных собственных состояний

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy |y\rangle \langle y| = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} M(q, f, g) &= |\langle \phi | q, f, g \rangle|^2 = \\ &= \left| \langle \phi | \int_{-\infty}^{\infty} dy |y\rangle \langle y | q, f, g \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \phi(y) \langle y | q, f, g \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \phi(y) \exp\left(\frac{if}{2g}y^2 - \frac{iqy}{g}\right) \right|^2. \quad (6) \end{aligned}$$

После введения в выражение (6) нормировочного множителя $1/(2\pi |g|)$ доказательство эквивалентности уравнений (1) и (2) завершено.

Экспериментальное использование метода оптической томографии позволяет брать двумерные срезы трехмерного объекта и, таким образом, дает возможность неинвазивного исследования его внутренней структуры. В последнее время было проведено

несколько типичных экспериментов по гомодинному детектированию для исследования томографических вероятностных представлений одномодовых фотонных состояний и измерения точности оптических томограмм [2–6]. В работе [3] подчеркнута, что в фазовом пространстве квантовой статистики распределение вероятности для повернутой квадратурной фазы

$$X(\theta) = Q \cos \theta + P \sin \theta$$

при заданном в качестве параметра угле θ можно выразить через функции Вигнера. Также верно и обратное утверждение, называемое соотношением Фогеля – Рискена, т. е. можно получить распределение Вигнера путем томографической инверсии набора измеренных распределений вероятности $w(x, \theta)$ квадратурной амплитуды. При помощи гомодинного детектирования одномодового фотонного состояния $|\phi\rangle$ можно экспериментально измерить оптическую томограмму

$$M(x, \theta) = |\langle \phi | x, \theta \rangle|^2,$$

где $|x, \theta\rangle$ — собственный вектор оператора $X(\theta)$ с собственным значением x . В работе [4] было отмечено, что если известно распределение $w(x, \theta)$, то распределение Вигнера и матрицу плотности можно получить при помощи обратного преобразования Радона. Таким образом, томографический подход к квантовой теории предлагает описание с точки зрения оптических томографических вероятностей.

Однако, ввиду упомянутых выше аспектов, традиционный метод (1) не выглядит достаточно эффективным для получения оптических томограмм фотонных состояний сложного вида, поскольку явное выражение для состояния $|q, f, g\rangle$ не известно, а дробное преобразование Фурье волновой функции $\phi(y)$ является слишком громоздким и даже не может быть выписано до конца [2]. Поэтому для точного вывода аналитических выражений в конечных суммах для оптических томограмм гауссовых состояний с несколькими добавленными фотонами в данной работе использовано явное выражение для промежуточного состояния $|q, f, g\rangle$ [7] и показано, что оптическая томограмма любого одномодового квантового состояния $|\phi\rangle$ является просто квадратом модуля волновой функции $|\phi\rangle$ в представлении $\langle q, f, g |$, т. е. $|\langle q, f, g | \phi \rangle|^2$. Ввиду этого, с помощью расширенной теории интегрирования некоммутативных операторов [8] и нескольких формул для полиномов Эрмита одной и двух переменных будет осуществлен непосредственный и быстрый вывод аналитических выражений для оптических то-

мограмм когерентных, тепловых и смещенных тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами с последующим численным исследованием их измеримых томограмм.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОСТОЯНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАММЫ

В данном разделе кратко описано промежуточное представление для оптических томограмм одно-модовых квантовых состояний [7]. Хорошо известно, что одномодовый оператор Вигнера $\Delta(p, q)$ в координатном представлении определяется следующим образом [9, 10]:

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} e^{i p \mu} \left| q + \frac{\mu}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{\mu}{2} \right|, \quad (7)$$

где

$$|q\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q a^\dagger - \frac{1}{2} a^{\dagger 2}\right) |0\rangle$$

— собственное состояние оператора координаты Q с собственным значением q [11, 12], μ — действительный параметр. Подставляя в выражение (7) координатное собственное состояние $|q\rangle$ и нормально упорядоченное разложение вакуумного проекционного оператора $|0\rangle\langle 0| = : e^{-a^\dagger a} :$ [13–17], где символ $:$ обозначает нормальное упорядочение (т. е. все операторы рождения a^\dagger стоят слева от операторов уничтожения a и операторы рождения и уничтожения коммутативны внутри символа $:$), и затем осуществляя интегрирование оператора (7) при помощи теории интегрирования некоммутирующих операторов, получаем следующее нормально упорядоченное выражение для $\Delta(p, q)$:

$$\Delta(p, q) = \frac{1}{\pi} : e^{-(q-Q)^2 - (p-P)^2} : , \quad (8)$$

где p — собственное значение оператора импульса P . Из выражения (8) можно легко получить преобразование Радона для оператора Вигнера $\Delta(p, q)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' \delta(q - f q' - g p') \Delta(p', q') = [\pi (f^2 + g^2)]^{-1/2} : \exp\left\{-\frac{1}{f^2 + g^2} [q - (fQ + gP)]^2\right\} : . \quad (9)$$

Далее, используя тождество $|0\rangle\langle 0| = : e^{-a^\dagger a} :$ для разложения правой части уравнения (9), можно переписать его в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' \delta(q - f q' - g p') \Delta(p', q') = |q, f, g\rangle \langle q, f, g|, \quad (10)$$

где состояние $|q, f, g\rangle$, зависящее от параметров f и g , имеет вид [7]

$$|q, f, g\rangle = c \exp(c_1 a^\dagger - c_2 a^{\dagger 2}) |0\rangle, \quad (11)$$

причем

$$c = [\pi (f^2 + g^2)]^{-1/4} \exp(-q^2/2(f^2 + g^2)), \quad (12)$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}q}{f - ig}, \quad c_2 = \frac{f + ig}{2(f - ig)}.$$

Замечая, что операторы координаты и импульса равны соответственно $Q = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ и $P = (a - a^\dagger)/(i\sqrt{2})$, а их коммутатор равен $[Q, P] = i$ ($\hbar = 1$), можно доказать, что состояние $|q, f, g\rangle$ является просто собственным вектором полинома Эрмита $fQ + gP$ с собственным значением q , т. е.

$$(fQ + gP) |q, f, g\rangle = q |q, f, g\rangle, \quad (13)$$

и что набор $|q, f, g\rangle$ образует полное квантовомеханическое представление, поскольку выполняется соотношение полноты

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q, f, g\rangle \langle q, f, g| = 1. \quad (14)$$

В частности, когда $(f, g) = (1, 0)$ (или $(f, g) = (0, 1)$), состояние $|q, f, g\rangle$ становится собственным состоянием оператора Q (или P). По этой причине $|q, f, g\rangle$ можно назвать промежуточным координатно-импульсным состоянием. Из уравнения (10) ясно, что преобразование Радона для оператора Вигнера $\Delta(p, q)$ является просто оператором плотности чистого состояния $|q, f, g\rangle \langle q, f, g|$. В этом смысле, введение промежуточного состояния $|q, f, g\rangle$ полезно, поскольку в этом представлении для данного одномодового квантового состояния $|\phi\rangle$ можно установить следующее соотношение между его функцией Вигнера $W(p', q')$ и квадратом модуля волновой функции $|\phi\rangle$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' \delta(q - f q' - g p') W(p', q') = |\langle q, f, g | \phi \rangle|^2. \quad (15)$$

Оно означает, что преобразование Радона для функции Вигнера $W(p', q')$ является оптической томограммой матрицы плотности чистого состояния $|\phi\rangle\langle\phi|$, т.е. квадратом модуля волновой функции $|\phi\rangle$ в представлении $\langle q, f, g | (|\langle q, f, g | \phi\rangle|^2)$. Это прямой и простой подход к получению оптических томограмм для однофотонных квантовых состояний. Таким образом, вычислив скалярное произведение $\langle q, f, g | \phi\rangle$, можно получить оптическую томограмму состояния $|\phi\rangle$ и затем провести прямое измерение полной информации о нем.

3. ОПТИЧЕСКИЕ ТОМОГРАММЫ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ДОБАВЛЕННЫМИ ФОТОНАМИ

Когерентные состояния $|\alpha\rangle$, определяемые как собственные состояния оператора уничтожения гармонического осциллятора a , являются аналогом классических полей излучения. Однако эти состояния неожиданно оказываются неклассическими при их возбуждении одним квантом излучения. Недавно были экспериментально приготовлены когерентные состояния с одним добавленным фотоном, а также исследованы томографически реконструированные функции Вигнера таких состояний [18,19]. Нормированное когерентное состояние с несколькими добавленными фотонами вводится путем многократного (целое число раз m) действия оператора рождения фотона a^\dagger на когерентное состояние следующим образом [20]:

$$|\alpha, m\rangle = Da^{\dagger m} |\alpha\rangle, \tag{16}$$

где $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние, $D = [m!L_m(-|\alpha|^2)]^{-1/2}$ — нормировочный множитель, $L_m(\cdot)$ — полином Лагерра порядка m . Необходимо отметить, что такие состояния имеют свойства, промежуточные между свойствами состояний Фока и когерентных состояний, поскольку они сводятся к состояниям Фока при $\alpha = 0$ и к когерентным состояниям при $m = 0$. Далее, последовательно используя соотношение полноты когерентного состояния и следующую формулу для интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2z}{\pi} z^n \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + hz^{*2}) = \\ = -\frac{1}{\zeta^{(2n+1)}} \exp\left(\frac{h\xi^2}{\zeta^2} - \zeta\xi\eta\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2\xi h - \zeta\eta)^{n-2k} (h\zeta)^k, \end{aligned} \tag{17}$$

а также производящую функцию для полинома Эрмита [21]:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \tag{18}$$

окончательно получаем оптическую томограмму для состояния $|\alpha, m\rangle$ в виде

$$M(q, f, g) = \mathcal{T}(q, f, g) M_{|\alpha\rangle}(q, f, g), \tag{19}$$

где $M_{|\alpha\rangle}(q, f, g)$ — оптическая томограмма когерентного состояния $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} M_{|\alpha\rangle}(q, f, g) = \\ = c^2 \exp\left[2 \operatorname{Re}(c_1\alpha^* - c_2\alpha^{*2}) - |\alpha|^2\right], \end{aligned} \tag{20}$$

а $\mathcal{T}(q, f, g)$ — множитель, возникающий при операции добавления нескольких фотонов, т.е.

$$\mathcal{T}(q, f, g) = D^2 |c_2|^m \left| H_m\left(\frac{c_1 - 2c_2\alpha^*}{2\sqrt{-c_2}}\right) \right|^2. \tag{21}$$

Отсюда ясно видно, что явные выражения для оптических томограмм когерентных состояний с несколькими добавленными фотонами пропорциональны квадрату модуля полиномов Эрмита одной переменной $H_m(\cdot)$. Этот результат согласуется со стационарным случаем (19) из работы [2], когда $\Omega(t)$ и ε являются, соответственно, начальными значениями $\Omega(t) = 1$ и $\varepsilon(0) = 1$ в выражении (19). В этом случае, когда $\alpha = 0$, $M(q, f, g)$ сводится к оптической томограмме для состояния Фока, т.е.

$$M_{\alpha=0}(q, f, g) = \frac{c^2 |c_2|^m}{m!} \left| H_m\left(\frac{c_1}{2\sqrt{-c_2}}\right) \right|^2. \tag{22}$$

Подстановка $f = \cos\theta$ и $g = \sin\theta$ в выражение (19) позволяет получить измеримую томограмму $M(q, \theta) = \mathcal{T}(q, \theta) M_{|\alpha\rangle}(q, \theta)$, где

$$\begin{aligned} M_{|\alpha\rangle}(q, \theta) = \pi^{-1/2} \times \\ \times \exp\left[\operatorname{Re}\left(2\sqrt{2}qe^{i\theta}\alpha^* - e^{2i\theta}\alpha^{*2}\right) - |\alpha|^2 - q^2\right] \end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(q, \theta) = \frac{1}{m!2^m L_m(-|\alpha|^2)} \times \\ \times \left| H_m\left(\frac{i\sqrt{2}q - ie^{i\theta}\alpha^*}{\sqrt{2}}\right) \right|^2, \end{aligned} \tag{24}$$

которую можно исследовать при помощи метода го-модинного детектирования фотонных состояний.

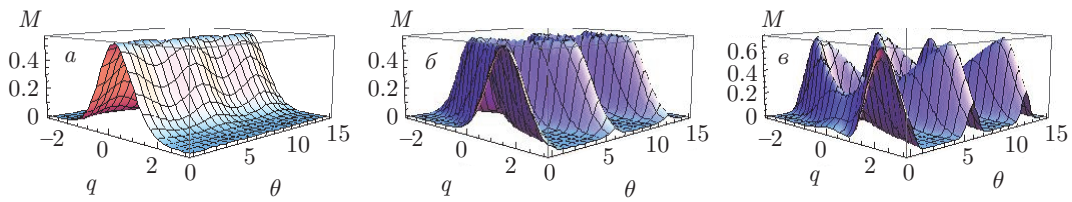


Рис. 1. Измеримые томографические распределения когерентных состояний с несколькими добавленными фотонами при $m = 0, \alpha = 0.1$ (а); $m = 0, \alpha = 1$ (б); $m = 1, \alpha = 1$ (в)

Здесь необходимо подчеркнуть, что к настоящему времени выполнено множество теоретических работ, посвященных исследованию гауссовых состояний с несколькими добавленными фотонами, полученных путем неоднократного действия операции добавления фотона, например, на когерентные, тепловые и сжатые состояния, а также изучению наблюдаемых неклассических явлений, таких как сжимающие свойства, субпуассоновские статистические распределения, квантовое запутывание и т. д. [22–25]. Однако, насколько нам известно, опубликованные экспериментальные работы были направлены исключительно на добавление одного фотона к когерентному или тепловому полю [18, 19, 26, 27]. Поэтому в настоящей работе на основе численного моделирования измеримые томограммы $M(q, \theta)$ обсуждаются только для случая числа добавленных фотонов $m = 1$, а также измеримые томограммы $M'(q, \theta)$ для тепловых состояний и $M''(q, \theta)$ для смещенных тепловых состояний.

На рис. 1 построены измеримые томограммы $M(q, \theta)$ когерентных состояний с несколькими добавленными фотонами в зависимости от (q, θ) для указанных значений параметров m и α . На рис. 1 видно, что аналогично Q -функции в фазовом пространстве томограммы $M(q, \theta)$ всегда остаются действительными и положительными, причем демонстрируют периодичность с периодом π по координате q . Кроме того, при малых m и α существует одиночный выраженный основной пик (см. рис. 1а). Однако при увеличении m (или α) этот пик расщепляется на два одинаковых пика, причем их интенсивность постепенно возрастает (см. рис. 1б).

4. ОПТИЧЕСКИЕ ТОМОГРАММЫ ТЕПЛОВЫХ СОСТОЯНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ДОБАВЛЕННЫМИ ФОТОНАМИ

В квантовой теории тепловое состояние, образуемое путем статистического смешивания когерент-

ных состояний, является наиболее классическим смешанным состоянием света. Оператор плотности одномодового теплового поля задается в виде $\rho(\lambda) = (1 - e^{-\lambda})e^{\lambda a^\dagger a}$, где $\lambda = -\hbar\omega/k_B T$, параметры ω, k_B и T обозначают соответственно частоту, постоянную Больцмана и температуру, отвечающую тепловому полю, \hbar — постоянная Планка. Таким образом, нормированное тепловое состояние имеет вид

$$\rho_m(\lambda) = N a^{\dagger m} e^{\lambda a^\dagger a} a^m, \tag{25}$$

где $N = m!(\bar{n} + 1)^m$ — нормировочный коэффициент, а $\bar{n} = \text{Tr}(\rho a^\dagger a) = (e^{-\lambda} - 1)^{-1}$ обозначает среднее число фотонов в одномодовом тепловом поле. Теперь для получения оптической томограммы состояния $\rho_m(\lambda)$ получим его антинормально упорядоченное произведение (в котором, в отличие от нормально упорядоченного, все операторы рождения a^\dagger стоят справа от операторов уничтожения a , что обозначается символом $:\cdot:$). Учитывая, что разложение для нормально упорядоченной функции $e^{\lambda a^\dagger a}$ имеет вид [28]

$$e^{\lambda a^\dagger a} = : \exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a] : , \tag{26}$$

естественным образом получаем следующее нормально упорядоченное выражение для $a^{\dagger m} e^{\lambda a^\dagger a} a^m$:

$$a^{\dagger m} e^{\lambda a^\dagger a} a^m = : a^{\dagger m} \exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a] a^m : . \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в формулу для обратного порядка [29] и используя интеграл

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(h|z|^2 + sz + \eta z^*) = \exp\left(-\frac{s\eta}{h}\right) \times \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!s^{m-l}\eta^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!(-h)^{m+n-l+1}} \tag{28}$$

и определение полиномов Лагерра $L_m(x)$, получаем выражение

$$a^{\dagger m} e^{\lambda a^\dagger a} a^m = (-1)^m m! e^{-(m+1)\lambda} : e^{(1-e^{-\lambda})a^\dagger a} \times L_m(e^{-\lambda} a^\dagger a) : , \tag{29}$$

которое представляет собой антинормально упорядоченное произведение ненормированных тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами и является новым операторным тождеством.

Учитывая, что антинормально упорядоченное P -представление оператора $\dot{:}f(a, a^\dagger)\dot{:}$ непосредственно выражается в представлении когерентных состояний $|\alpha\rangle$ в виде [30, 31]

$$\dot{:}f(a, a^\dagger)\dot{:} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} f(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (30)$$

можно выписать оптические томограммы тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами:

$$\begin{aligned} M'(q, f, g) &= \text{Tr}(|q, f, g\rangle \langle q, f, g| \rho_m(\lambda)) = \\ &= N(-1)^m m! e^{-(m+1)\lambda} \langle q, f, g | \dot{:}e^{(1-e^{-\lambda})a^\dagger a} \times \\ &\times L_m(e^{-\lambda} a^\dagger a) \dot{:} | q, f, g\rangle = N(-1)^m m! e^{-(m+1)\lambda} \times \\ &\times \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{(1-e^{-\lambda})|\alpha|^2} L_m(e^{-\lambda} |\alpha|^2) M_{|\alpha\rangle}(q, f, g). \end{aligned} \quad (31)$$

Это означает, что оптические томограммы тепловых и когерентных состояний связаны друг с другом интегрированием по α . Таким образом, зная томограммы $M_{|\alpha\rangle}(q, f, g)$ для когерентных состояний (20), можно получить оптические томограммы тепловых состояний путем интегрирования правой части выражения (31). С помощью выражения для интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + h z^{*2}) &= \\ = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fh}} \exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 h + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fh}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

условия сходимости которого имеют вид

$$\text{Re}(\zeta \pm f \pm h) < 0, \quad \text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fh}{\zeta \pm f \pm h}\right) < 0,$$

и производящей функции для полиномов Эрмита одной переменной

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt - t^2} \right|_{t=0}, \quad (33)$$

а также рекуррентной формулы для $H_n(x)$

$$\frac{d^l}{dx^l} H_n(x) = \frac{2^l n!}{(n-l)!} H_{n-l}(x) \quad (34)$$

можно вычислить оптические томограммы тепловых состояний в явном виде:

$$\begin{aligned} M'(q, f, g) &= c^2 N \times \\ &\times \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{m+n} (m!)^2 e^{-(m+n+l+1)\lambda}}{l!(m-n)![(n-l)!]^2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{e^{-2\lambda} - 4|c_2|^2}\right)^{n+1/2} |c_2|^{n-l} \times \\ &\times \left| H_{n-l} \left(\frac{c_1 e^{-\lambda} - 2c_1^* c_2}{2\sqrt{c_2(e^{-2\lambda} - 4|c_2|^2)}} \right) \right|^2 \times \\ &\times \exp\left(\frac{e^{-\lambda} |c_1|^2 - c_1^{*2} c_2 - c_1^2 c_2^*}{e^{-2\lambda} - 4|c_2|^2}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда видно, что $M'(q, f, g)$ можно рассматривать как суперпозицию квадратов модулей полиномов Эрмита порядка $(n-l)$. Сравнение выражений (19) и (35) показывает, что томограммы тепловых состояний имеют более сложный вид по сравнению с томограммами когерентных состояний. Этот результат легко объясним, поскольку тепловые состояния получаются статистическим смешиванием когерентных состояний. В частности, в случае без добавления фотонов ($m=0$) выражение (35) становится томограммой теплового состояния, т. е.

$$\begin{aligned} M'_{m=0}(q, f, g) &= \frac{c^2 e^{-\lambda}}{\sqrt{e^{-2\lambda} - 4|c_2|^2}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{e^{-\lambda} |c_1|^2 - c_1^{*2} c_2 - c_1^2 c_2^*}{e^{-2\lambda} - 4|c_2|^2}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

При $\lambda \rightarrow -\infty$ выражение для $M'(q, f, g)$ совпадает с выражением (22). Справедливость этого результата подтверждается тем, что тепловые состояния сводятся к состояниям Фока для случая $\lambda \rightarrow -\infty$. Аналогично, подстановка $f = \cos\theta$ и $g = \sin\theta$ в выражение (35) приводит к получению томограммы $M'(q, \theta)$, измеряемой при помощи метода гомодинарного детектирования фотонных состояний, явное выражение для которой получается путем следующих подстановок в выражение (35): $c \rightarrow \pi^{-1/4} e^{-q^2/2}$, $c_1 \rightarrow \sqrt{2} q e^{i\theta}$ и $c_2 \rightarrow e^{2i\theta}/2$. Таким образом, в отличие от представления бесконечных сумм (26) или дифференциальной формы (29) из работы [2], формулы (35) и для $M'(q, \theta)$ представляют собой аналитические выражения для оптических томограмм тепловых состояний, которые являются представлениями m -мерных сумм.

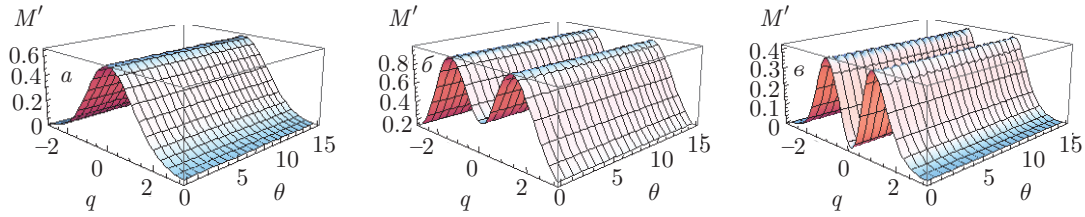


Рис. 2. Измеримые томографические распределения тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами при $m = 0, \lambda = -1$ (а); $m = 1, \lambda = -1$ (б); $m = 1, \lambda = -10$ (в)

Теперь численно изучим измеримые томограммы тепловых состояний $M'(q, \theta)$ при некоторых разумных значениях параметров m и λ (см. рис. 2). Очевидно, что, как и на томограмме $M(q, \theta)$, увеличение m приводит к расщеплению одиночного основного пика. Однако получившаяся раздвоенная структура оказывается проще, чем у томограммы $M(q, \theta)$. В отличие от имеющих периодичность π распределений $M(q, \theta)$, томографические распределения $M'(q, \theta)$ не могут проявлять какие-либо свойства периодичности, что легко объяснимо, поскольку томограмма $M'(q, \theta)$ никак не связана с угловым параметром θ вследствие статистического смешивания когерентных состояний. Кроме того, интенсивность двойного пика заметно уменьшается, а расстояние между максимумами продолжает увеличиваться с ростом $|\lambda|$. В пределе $T \rightarrow 0$ томографическое распределение $M'(q, \theta)$ полностью совпадает с $M(q, \theta)$, поскольку тепловое состояние превращается в когерентное.

5. ТОМОГРАММЫ СМЕЩЕННЫХ СОСТОЯНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ДОБАВЛЕННЫМИ ФОТОНАМИ

Смещенное тепловое состояние определяется как чистое когерентное состояние $|\alpha\rangle$ с наложенным на амплитуду α гауссовским шумом

$$\mathbb{P}(V, d; \alpha) = \frac{2}{\pi(V-1)} e^{-2|\alpha-d|^2/(V-1)},$$

которое можно описать в интегральном виде [32–34] как

$$\rho(V, d) = \int d^2\alpha \mathbb{P}(V, d; \alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (37)$$

где V — дисперсия теплового шума, зависимость которой от температуры теплового поля T определяется выражением $e^{\hbar\omega/T} = (V+1)/(V-1)$, а d — смещение теплового поля в фазовом пространстве. В качестве важного приложения суперпозиции тепловых состояний используются для осуществления

переноса неклассичности [32]. Используя операторное тождество $|0\rangle \langle 0| = e^{-a^\dagger a}$ и формулу [28]

$$\int \frac{d^2z}{\pi} \exp(-h|z|^2 + sz + tz^*) = \frac{1}{h} \exp\left(\frac{st}{h}\right) \quad (38)$$

для интегрирования выражения (37), находим

$$\rho(V, d) = \frac{2}{V+1} : \exp\left[-\frac{2}{V+1}(|d|^2 - da^\dagger - d^*a + a^\dagger a)\right] : . \quad (39)$$

На самом деле, такое состояние представляет собой промежуточное гауссово состояние между смешанным тепловым и чистым когерентным состояниями, поскольку $\rho(V, 0)$ является тепловым полем с шумом V , а $\rho(V \rightarrow 1, d)$ — чистым когерентным состоянием $|d\rangle$ с амплитудой d . С другой стороны, $V \rightarrow 1$ соответствует $T \rightarrow 0$, откуда следует, что $\rho(V, d)$ можно использовать для перехода от чистых когерентных состояний к высокотемпературным тепловым смешанным состояниям.

В данном разделе вычисляются оптические томограммы смещенных тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами, для чего используется их антинормально упорядоченное произведение, получаемое действием оператора добавления m фотонов на смещенное тепловое состояние $\rho(V, d)$ [32–34]. Нормально упорядоченное произведение в нормальном порядке для смещенного теплового состояния записывается при помощи формулы (39) в виде

$$\rho_m(V, d) = : a^{\dagger m} \rho(V, d) a^m : . \quad (40)$$

Очевидно, что смещенное тепловое состояние является более общим в том смысле, что когерентные и тепловые состояния можно рассматривать как смещенные с шумом $V = 1$ и смещением теплового поля $d = 0$ соответственно.

На основе формулы (11) томограмма $M''(q, f, g)$ выражается в виде

$$M''(q, f, g) = c^2 \langle 0 | e^{c_1^* a - c_2^* a^2} \times \rho_m(V, d) e^{c_1 a^\dagger - c_2 a^{\dagger 2}} | 0 \rangle, \quad (41)$$

означающем, что вывод $M''(q, f, g)$ можно упростить за счет антинормального упорядочения операторов в произведении $\rho_m(V, d)$. Подставляя (40) в интеграл для вычисления антинормально упорядоченного произведения [25] и используя затем выражение (28), а также скалярное произведение

$$\langle -\beta | \beta \rangle = e^{-2|\beta|^2}$$

и формулу для производящей функции [35]

$$H_{m,n}(x, y) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^l m! n!}{l!(m-l)!(n-l)!} x^{m-l} y^{n-l}, \quad (42)$$

получаем

$$\rho_m(V, d) = \frac{2(V+1)^m}{(V-1)^{m+1}} \exp\left(-\frac{2}{V-1} |d|^2\right) : \exp\left(\frac{2(da^\dagger + d^* a - a^\dagger a)}{V-1}\right) H_{m,m}(O, O^\dagger) :, \quad (43)$$

где

$$O = \sqrt{\frac{V+1}{V-1}} \left(\frac{2d}{V+1} - a\right),$$

а $H_{m,m}(\cdot, \cdot)$ обозначает полином Эрмита двух переменных. Затем, учитывая в уравнении (41) соотношение полноты для когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и операторное тождество (43), получаем

$$M''(q, f, g) = \frac{2(V+1)^m c^2}{(V-1)^{m+1}} \exp\left(-\frac{2}{V-1} |d|^2\right) \times \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp\left(-\frac{V+1}{V-1} |\alpha|^2 + \left(\frac{2d^*}{V-1} + c_1^*\right) \alpha + \left(\frac{2d}{V-1} + c_1\right) \alpha^* - c_2^* \alpha^2 - c_2 \alpha^{*2}\right) \times H_{m,m}(O, O^*), \quad (44)$$

где

$$O = \sqrt{\frac{V+1}{V-1}} \left(\frac{2d}{V+1} - \alpha\right).$$

Далее при помощи дифференциального разложения полинома Эрмита $H_{m,n}(x, y)$ [35], т. е.

$$H_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m \partial t^n} \exp(-st + xs + yt) |_{s=t=0}, \quad (45)$$

и интеграла (32), аналогично выводу формулы (35), окончательно получаем выражение для оптической томограммы $M''(q, f, g)$:

$$M''(q, f, g) = c^2 \sum_{l=0}^m \frac{2^{2l+1} (m!)^2 (V+1)^{2m-l}}{l! [(m-l)!]^2 (V-1)^{2m-l+1}} \times \left| \frac{c_2}{c_5} \right|^{m+l/2} \left| H_{m-l} \left(\frac{c_6}{2} \sqrt{\frac{c_5(V-1)}{c_2(V+1)}} \right) \right|^2 \times \exp \left[\frac{4(V+1) - 2c_5(V-1)^2}{c_5(V-1)^3} |d|^2 + \frac{(V+1) |c_1|^2 - 4(c_1^* c_2 d^* + c_1 c_2^* d)}{c_5(V-1)} + \frac{2(V+1)(c_1 d^* + c_1^* d) - 4(c_2 d^{*2} + c_2^* d^2)}{c_5(V-1)^2} - \frac{c_1^2 c_2^* + c_1^{*2} c_2}{c_5} \right], \quad (46)$$

где

$$c_5 = \left(\frac{V+1}{V-1}\right)^2 - 4|c_2|^2, \quad c_6 = \frac{[2c_5(V-1)^2 - 2(V+1)^2]d}{c_5(V-1)^2 \sqrt{V^2-1}} + \frac{4(V+1)c_2 d^* - (V+1)^2 c_1 + 2(V^2-1)c_1^* c_2}{c_5(V-1) \sqrt{V^2-1}}. \quad (47)$$

Очевидно, что выражение (46) для томограммы $M''(q, f, g)$ является действительным положительным определением вследствие существования $|H_{m-l}(\cdot)|^2$. В частности, когда $m = 0$, $M''(q, f, g)$ сводится к томограмме для состояния $\rho(V, d)$, т. е.

$$M''_{m \rightarrow 0}(q, f, g) = \frac{2c^2}{(V-1)\sqrt{c_5}} \times \exp\left(\frac{4(V+1) - 2c_5(V-1)^2}{c_5(V-1)^3} |d|^2 - \frac{c_1^2 c_2^* + c_1^{*2} c_2}{c_5}\right) \times \exp\left(\frac{2(V+1)(c_1 d^* + c_1^* d) - 4(c_2 d^{*2} + c_2^* d^2)}{c_5(V-1)^2} + \frac{(V+1) |c_1|^2 - 4(c_1^* c_2 d^* + c_1 c_2^* d)}{c_5(V-1)}\right). \quad (48)$$

В случае $d = 0$ томограмма $M''(q, f, g)$ переходит в томограмму теплового состояния $M''_{d=0}(q, f, g)$, описываемую в виде оператора плотности

$$\frac{2}{V+1} a^{\dagger m} \exp\left(a^\dagger a \ln \frac{V-1}{V+1}\right) a^m,$$

в то время как для $V = 1$, $M''_{V=1}(q, f, g)$ сводится к томограмме когерентного состояния $a^{\dagger m} |d\rangle$. Кроме того, при $f = \cos \theta$ и $g = \sin \theta$ имеем

$$c_5 = 4V/(V-1)^2$$

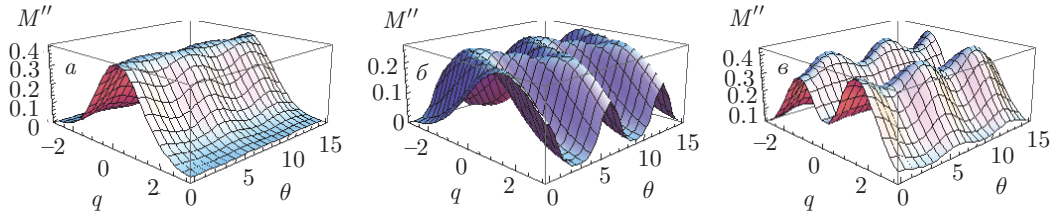


Рис. 3. Измеримые томографические распределения для смещенных тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами при $m = 0, V = 2, d = 1$ (а); $m = 0, V = 5, d = 1$ (б); $m = 1, V = 2, d = 0.1$ (в)

и

$$c_6 = \frac{\sqrt{V^2 - 1}}{2V(V+1)} \left[e^{i\theta}(V+1) \left(e^{i\theta}d^* - \sqrt{2}q \right) - (V-1)d \right].$$

Таким образом, томограмма $M''(q, f, g)$ выражается в виде $M''(q, \theta)$, что представляет собой измеримую томограмму смещенного состояния.

На рис. 3 представлены томографические распределения $M''(q, \theta)$ смещенных тепловых состояний с несколькими добавленными фотонами в зависимости от (q, θ) . Видно, что томограмма $M''(q, \theta)$ при любых значениях параметров V и d обладает той же периодичностью, что и томограмма $M(q, \theta)$. Сравнение рис. 1в и 2в с рис. 3в ясно показывает, что томограмма $M''(q, \theta)$ демонстрирует те же свойства, что и томограммы $M(q, \theta)$ и $M'(q, \theta)$ при $m = 1$, еще раз подтверждая, что смещенное тепловое состояние в действительности является промежуточным между когерентным и тепловым состояниями. Именно благодаря этой особенности увеличение числа добавленных фотонов m не может существенно повлиять на интенсивность двойного пика томограммы $M''(q, \theta)$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе получено явное выражение для представления промежуточного состояния $|q, f, g\rangle$ и найдено, что преобразование Радона для оператора Вигнера $\Delta(p, q)$ является просто оператором плотности чистого состояния $|q, f, g\rangle \langle q, f, g|$. Таким образом, оптическая томограмма для любого одно-модового квантового состояния $|\phi\rangle$ выражается в виде квадрата модуля волновой функции в представлении $\langle q, f, g|$. С помощью томографического формализма непосредственно получены аналитические оптические томограммы для различных гауссовых состояний с несколькими добавленными фотонами, включая когерентные, тепловые и смещенные тепловые состояния. Также численно исследованы

их измеримые томографические распределения. Результаты для всех трех состояний показывают, что увеличение числа добавленных фотонов приводит к возникновению томографических распределений с многими пиками, причем когерентные и смещенные тепловые состояния могут проявлять периодичность с периодом π , в то время как для тепловых состояний это не так.

Очевидно, что в работе представлены только стационарные оптические томограммы для нескольких гауссовых состояний с добавленными фотонами. Однако в основных динамических процессах система неизбежно испытывает влияние шума. Для решения этой задачи имеется эффективный метод тепловых запутанных состояний [36], суть которого можно кратко пояснить следующим образом. Заметим, что в силу

$$[a - b^\dagger, a^\dagger - b] = 0$$

существуют общие собственные векторы, т.е. тепловые запутанные состояния $|\chi\rangle = D(\chi)|I\rangle$ с оператором смещения $D(\chi)$ и $|I\rangle = \exp(a^\dagger b^\dagger)|00\rangle$, тогда оператор уничтожения b соответствует фиктивной моде, сопутствующей физической моде a . Когда физические операторы a, a^\dagger и $a^\dagger a$ действуют на $|I\rangle$, между фиктивной и физической модами существуют соответствующие операторные соотношения: $a \Leftrightarrow b^\dagger, a^\dagger \Leftrightarrow b$ и $a^\dagger a \Leftrightarrow b^\dagger b$. При помощи этих соотношений можно преобразовать основное уравнение для зависящего от времени оператора плотности ρ_t в уравнение эволюции вектора состояния $|\rho_t\rangle = \rho_t|I\rangle$. Таким образом, его решение можно представить в виде $\rho_t = \sum_n M_n \rho_0 M_n^\dagger$, где M_n — унитарный оператор эволюции (оператор Крауса), который описывает временную эволюцию исходного оператора плотности ρ_0 под воздействием шума. Подставляя ρ_t в уравнение (15) и вычисляя произведение $\langle q, f, g|\rho_t|q, f, g\rangle$, окончательно получаем томограмму временной эволюции ρ_0 . Более подробное описание этой работы можно найти в обзорной статье [36]. Временная эволюция измеримых томо-

грамм этих трех состояний под воздействием шумов различного вида требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 11347026) и Фонда естественных наук Провинции Шаньдун (гранты №№ ZR2016AM03, ZR2017MA011).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. I. Man'ko and R. V. Mendes, *Phys. Lett. A* **263**, 53 (1999).
2. Ya. A. Korennoy and V. I. Man'ko, *Phys. Rev. A* **83**, 053817 (2011).
3. K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev. A* **40**, 2847 (1989).
4. D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993).
5. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 299 (2009).
6. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Phys. Lett. A* **213**, 1 (1996).
7. H. Y. Fan and H. L. Cheng, *Chin. Phys. Lett.* **18**, 850 (2001).
8. H. Y. Fan, H. L. Lu, and Y. Fan, *Ann. Phys.* **321**, 480 (2006).
9. E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
10. M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
11. X. G. Meng, J. S. Wang, H. Y. Fan, and C. W. Xia, *Chin. Phys. B* **25**, 040302 (2016).
12. X. G. Meng, J. S. Wang, and H. C. Gao, *Int. J. Theor. Phys.* **55**, 3630 (2016).
13. H. Y. Fan and H. R. Zaidi, *Phys. Lett. A* **124**, 303 (1987).
14. J. S. Wang, H. Y. Fan, and X. G. Meng, *Chin. Phys. B* **21**, 064204 (2012).
15. J. S. Wang, X. G. Meng, B. L. Liang, and K. Z. Yan, *J. Mod. Opt.* **63**, 2367 (2016).
16. J. S. Wang, X. G. Meng, and B. L. Liang, *Chin. Phys. B* **19**, 014207 (2010).
17. T. Mansour and M. Schork, *Russ. J. Math. Phys.* **15**, 77 (2008).
18. A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, *Science* **306**, 660 (2004).
19. A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, *Phys. Rev. A* **72**, 023820 (2005).
20. G. S. Agarwal and K. Tara, *Phys. Rev. A* **43**, 492 (1991).
21. R. Dere and Y. Simsek, *Russ. J. Math. Phys.* **22**, 1 (2015).
22. A. Biswas and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **75**, 032104 (2007).
23. B. Mojaveri and A. Dehghani, *Eur. Phys. J. D* **68**, 315 (2014).
24. T. Kiesel, W. Vogel, M. Bellini, and A. Zavatta, *Phys. Rev. A* **83**, 032116 (2011).
25. X. G. Meng, Z. Wang, H. Y. Fan, and J. S. Wang, *J. Opt. Soc. Amer. B* **29**, 3141 (2012).
26. A. Zavatta, V. Parigi, and M. Bellini, *Phys. Rev. A* **75**, 052106 (2007).
27. M. Barbieri, N. Spagnolo, M. G. Genoni et al., *Phys. Rev. A* **82**, 063833 (2010).
28. H. Y. Fan, *Ann. Phys.* **320**, 480 (2006).
29. C. L. Metha, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 752 (1967).
30. R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
31. A. Wünsche, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1**, R11 (1999).
32. H. Jeong and T. C. Ralph, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 100401 (2006).
33. H. Jeong and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **76**, 042103 (2007).
34. H. Jeong, M. Paternostro, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 060403 (2009).
35. X. G. Meng, Z. Wang, H. Y. Fan, J. S. Wang, and Z. S. Yang, *J. Opt. Soc. Amer. B* **29**, 1844 (2012).
36. H. Y. Fan and L. Y. Hu, *Mod. Phys. Lett. B* **22**, 2435 (2008).