

ЭВОЛЮЦИЯ ЗАПУТАННОСТИ АТОМОВ В ПОЛЕ РЕЗОНАТОРА С РАЗЛИЧНЫМИ СТАТИСТИКАМИ В ОДНОМОДОВОМ ДВУХФОТОННОМ ПРОЦЕССЕ

*Судха Сингх**, *Каруна Гилхаре*

Университет Ранчи, Ранчи-834008, Джаркханд, Индия

Поступила в редакцию 25 декабря 2017 г.

(Перевод с английского)

EVOLUTION OF ATOMIC ENTANGLEMENT FOR DIFFERENT CAVITY-FIELD STATISTICS IN SINGLE-MODE TWO-PHOTON PROCESS

Sudha Singh, Karuna Gilhare

Изучена эволюция запутанности для пары двухуровневых ридберговских атомов, которые последовательно проходят через идеальный резонатор, возбужденный одной модой СВЧ-поля. Атомы взаимодействуют с полем резонатора за счет двухфотонных переходов. Исходное коллективное состояние двух атомов, один за другим входящих в резонатор, является незапутанным. Взаимодействия, обусловленные фотонным полем моды в резонаторе, приводят к образованию конечного двухатомного состояния смешанно-запутанного вида. Для количественной оценки запутанности используется хорошо известная мера для смешанных состояний, называемая запутанностью формирования. В работе вычислена запутанность формирования коллективного состояния двух атомов в зависимости от угла Раби для поля в фоковском состоянии, когерентного и теплового поля внутри резонатора. Обсуждается зависимость величины атомной запутанности от числа фотонов в резонаторе.

DOI: 10.1134/S004445101809002X

1. ВВЕДЕНИЕ

Запутанность является не только одним из наиболее существенных понятий, определяющих фундаментальное различие между классической и квантовой физикой, но также лежит в основе многих приложений, таких как квантовые компьютеры [1], квантовая обработка информации [2] и квантовая криптография [3]. Перспективным средством осуществления квантовой обработки информации считаются методы квантовой электродинамики в резонаторах. Простейшей схемой для изучения атомно-полевой запутанности является модель Джейнса – Каммингса [4], описывающая взаимодействие двухуровневого атома с квантованным полем

моды в приближении вращающейся волны. Изучение квантовой запутанности между двумя атомами, взаимодействующими за счет двухфотонного процесса на одной моде, представляет значительный интерес, поскольку запутанность может вызывать усиление взаимодействия за счет увеличения корреляции между двумя фотонами, участвующими в атомных переходах. В данной работе изучается эволюция запутанности между двумя двухуровневыми атомами, которые один за другим подвергаются действию различных полей в резонаторе посредством двухфотонного вырожденного процесса. Поскольку атомы друг с другом непосредственно не взаимодействуют, следует ожидать, что поле излучения будет оказывать значительное влияние на природу атомной запутанности. Исследовано влияние различных статистик поля на величину запутанности двух атомов. Результаты сравниваются с невырожденным процессом, описанным в работе [5].

* E-mail: ssingh8@gmail.com, vasudha_rnc1@rediffmail.com

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрен бездиссипативный резонатор с одной модой, через который один за другим проходят два двухуровневых ридберговских атома. Благодаря взаимодействию первого атома с полем в резонаторе, статистика поля начинает изменяться. Поскольку потерь в резонаторе нет, изменения остаются внутри резонатора до тех пор, пока в него не попадает второй атом. Таким образом, второй атом взаимодействует с полем, измененным за счет взаимодействия с первым атомом. В данном процессе оба атома могут становиться запутанными [5–8], хотя и не взаимодействуют непосредственно друг с другом или одновременно с полем в резонаторе. Гамильтониан модели для такой системы записывается в приближении вращающейся волны следующим образом:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3}{2} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{P}_+ + \hat{P}_-), \quad (1)$$

где $\hat{P}_+ = \hat{\sigma}_+\hat{a}^2$ и $\hat{P}_- = \hat{\sigma}_-\hat{a}^{\dagger 2}$. Здесь ω_0 — частота перехода в атоме, g — константа связи между атомом и полем, $\hat{\sigma}_3$ — оператор инверсии, $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ — повышающий и понижающий операторы Паули, \hat{a}^\dagger и \hat{a} — соответственно операторы рождения и уничтожения. Считается, что вначале оба атома находятся в возбужденных состояниях, поэтому начальное условие для системы в момент вхождения первого атома в резонатор имеет вид

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |a_1, n\rangle, \quad (2)$$

где $|n\rangle$ обозначает состояния по числу фотонов в резонаторе с исходным распределением $P_n = |C_n|^2$.

$$\begin{aligned} \hat{P}_- |a, n\rangle &= \sqrt{(n+1)(n+2)} |b, n+2\rangle; & \hat{P}_+ |a, n\rangle &= 0, \\ \hat{P}_+ \hat{P}_- |a, n\rangle &= (n+1)(n+2) |a, n\rangle; & \hat{P}_-^2 |a, n\rangle &= 0, \\ \hat{P}_- \hat{P}_+ \hat{P}_- |a, n\rangle &= (n+1)^{3/2}(n+2)^{3/2} |b, n+2\rangle; & \hat{P}_+^2 \hat{P}_- |a, n\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Вектор состояния, представляющий два атома и резонатор для времени $t > 2\tau$, имеет следующий вид:

$$|\psi(t)_{A-A-F}\rangle = \alpha |a_2, a_1, n\rangle + \beta |a_2, b_1, n+2\rangle + \gamma |b_2, a_1, n+2\rangle + \delta |b_2, b_1, n+4\rangle. \quad (7)$$

Множители α , β , γ и δ определяются выражениями

Возбужденное состояние первого атома обозначается $|a_1\rangle$. В резонансе выполняется условие $2\omega \approx \omega_0$, при котором временную эволюцию волновой функции системы атом–поле можно записать в следующем виде [9]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(t=0)\rangle. \quad (3)$$

Зависимость $|\psi(t)\rangle$ можно получить, разлагая e^{iHt} и действуя каждым членом разложения на начальное состояние [9]. Суммируя полученные слагаемые, получаем

$$|\psi_1(t)\rangle = \cos \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} |a_1, n\rangle - i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} |b_1, n+2\rangle, \quad (4)$$

где t — время взаимодействия атома с полем. В момент времени t , когда первый атом уже покинул резонатор, туда попадает второй атом в возбужденном состоянии. Поскольку потерь в резонаторе нет, статистика поля в резонаторе за это время остается неизменной. Начальное условие для второго атома можно записать в виде $|\psi_2(t=0)\rangle = |a_2\rangle |\psi_1(\tau)\rangle$, поэтому

$$|\psi_2(t=0)\rangle = \cos \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} |a_2, a_1, n\rangle - i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} |a_2, b_1, n+2\rangle, \quad (5)$$

где $|a_2\rangle$ и $|b_2\rangle$ обозначают соответственно возбужденное и основное состояния второго атома. В условиях резонанса при $2\omega \approx \omega_0$ операторы P_+ и P_- становятся независимыми от времени в гейзенберговском рассмотрении. При выводе уравнений (4) и (5) использовались следующие свойства комбинированных операторов для атома и поля:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^2 \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\}, \\ \beta &= \left[\cos \left\{ gt\sqrt{(n+3)(n+4)} \right\} \right] \times \\ &\quad \times \left[-i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} \right], \\ \gamma &= \left[\cos \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} \right] \times \\ &\quad \times \left[-i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} \right], \\ \delta &= \left[-i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} \right] \times \\ &\quad \times \left[-i \sin \left\{ gt\sqrt{(n+3)(n+4)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь предполагается, что второй атом взаимодействует с полем в резонаторе в течение такого же промежутка времени t . Это условие можно достичь в экспериментах с микромазерами при помощи используемого в них фильтра скоростей.

3. ВЛИЯНИЕ СТАТИСТИК ПОЛЯ НА ДИНАМИКУ ЗАПУТАННОСТИ АТОМОВ

Оператор плотности поля системы двух атомов и поля в резонаторе ρ_{A-A-F} задается в виде

$$\rho_{A-A-F} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (9)$$

где $|\psi(t)\rangle$ определяется выражением (7). Оператор плотности системы атом-атом получается по формуле

$$\rho_{A-A} = \text{Tr}_F \rho_{A-A-F}. \quad (10)$$

Поскольку связанное состояние двух атомов на выходе из резонатора не является чистым, их запутанность определяется с помощью меры совпадения, введенной в работах [10, 11]. Совпадение определяется следующим образом:

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (11)$$

где λ_i — расположенные в порядке убывания четыре собственных значения неэрмитовой матрицы

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (12)$$

Здесь σ_y — матрица Паули по координате y , ρ — матрица плотности 4×4 системы двух атомов. Максимально возможная запутанность достигается при $C = 1$, в то время как $C = 0$ означает полную разделимость атомов. При $C > 0$ состояние является запутанным (неразделимым). Для количественного определения запутанности можно использовать другую монотонную по C функцию $E_f(\rho)$, называемую запутанностью формирования. Она определяется в следующем виде:

$$E_f(\rho) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2} \right), \quad (13)$$

где $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$.

На основании работ по изучению стандартных взаимодействий в модели Джейнса-Каммингса [6-8] ожидается, что статистика поля в резонаторе может оказывать заметное влияние на запутанность атомов. В дальнейшем изучается влияние поля в резонаторе на запутанность атомов для различных статистик.

3.1. Поле резонатора в фоковском состоянии

Если состояние поля в резонаторе является собственным для оператора числа частиц $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, то нормированное состояние со смешанной плотностью для двух атомов после прохождения через поле выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{A-A} = & \alpha^2 |a_2 a_1\rangle\langle a_2 a_1| + \beta^2 |a_2 b_1\rangle\langle a_2 b_1| + \\ & + \beta \gamma^* |a_2 b_1\rangle\langle b_2 a_1| + \gamma \beta^* |b_2 a_1\rangle\langle a_2 b_1| + \\ & + \gamma^2 |b_2 a_1\rangle\langle b_2 a_1| + \delta^2 |b_2 b_1\rangle\langle b_2 b_1|. \end{aligned} \quad (14)$$

Для поля в фоковском состоянии $|n\rangle$ четыре собственных значения матрицы R в выражении (12) равны

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = |\alpha|^2 |\delta|^2, \\ \lambda_4 &= 4|\beta|^2 |\gamma|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются из выражения (8). Таким образом, мера совпадения системы, составленной из двух атомов, равна

$$\begin{aligned} C = \max \left[0, \sin 2gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \times \right. \\ \left. \times \sin gt \left\{ \sqrt{(n+3)(n+4)} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вакуумного состояния $n = 0$ она сводится к выражению

$$\begin{aligned} C = \max \left[0, \sin \left(2\sqrt{2} gt \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \left\{ \left(2\sqrt{3} - \sqrt{2} \right) gt \right\} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, вакуумное состояние может вызывать запутанность при условии, что функции $\sin(2\sqrt{2}gt)$ и $\sin\{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})gt\}$ имеют одинаковый знак. На рис. 1 показана запутанность формирования, являющаяся монотонной функцией меры совпадения, для $n = 0, 2, 5$. Как видно, вакуумное поле вызывает значительную запутанность. Это происходит за счет взаимодействия первого атома в возбужденном состоянии с вакуумным полем резонатора, в процессе чего его состояние изменяется и перестает быть вакуумным при вхождении второго атома. Поэтому состояние атомов становится запутанным.

Для $n \neq 0$ аргументы синусов возрастают с увеличением n , что приводит к более частому появлению ненулевой меры совпадения. С ростом числа фотонов наблюдается увеличение запутанности формирования E_f . Сравнение величин E_f для $n = 0, n = 2$ и $n = 5$, полученных на рис. 1а-в в рамках невырожденной двухфотонной модели Джейнса-Каммингса [5], показывает, что запутанность

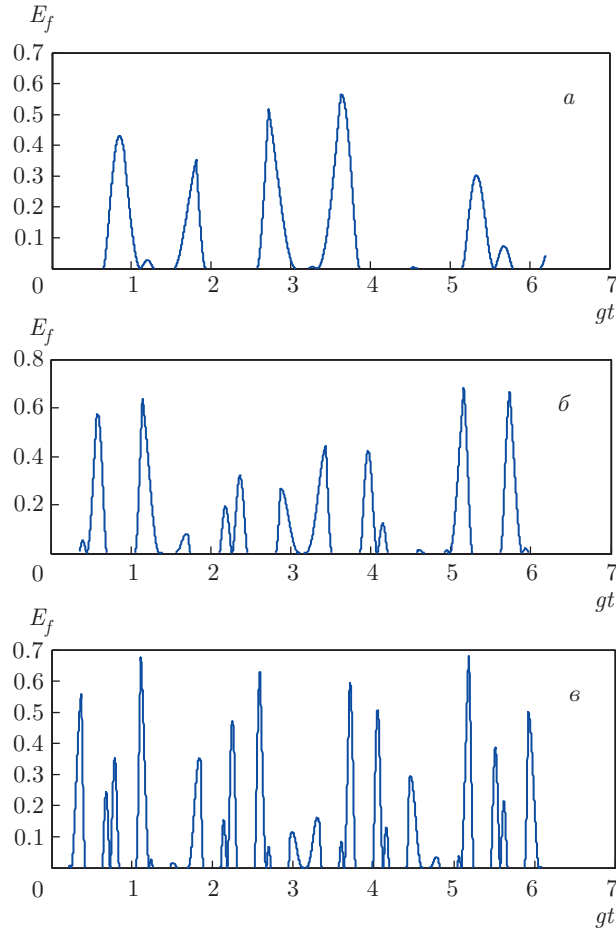


Рис. 1. Эволюция запутанности атомов, изначально находящихся в возбужденных состояниях, для поля в фоковском состоянии при $n = 0$ (а), 2 (б), 5 (в)

формирования E_f для вырожденного двухфотонного процесса оказывается больше, чем в случае невырожденного процесса.

3.2. Поле резонатора в когерентном состоянии

Для когерентного состояния поля в резонаторе полную волновую функцию модели можно записать в следующем виде:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n [\alpha|a_2, a_1, n\rangle + \beta|a_2, b_1, n+2\rangle + \gamma|b_2, a_1, n+2\rangle + \delta|b_2, b_1, n+4\rangle], \quad (18)$$

где

$$|C_n(\alpha)|^2 = P_n(\bar{n}) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (19)$$

Функции $P_n(\bar{n})$ выражают распределение вероятности когерентного поля для числа фотонов в пуассоновской статистике. Когерентные состояния $|\alpha\rangle$ выражаются следующим образом:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (20)$$

Состояние нормированной плотности обоих атомов после исключения полевых переменных записывается в виде

$$\rho(t)_{A-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|[\psi(t)_{A-A-F}\langle\psi(t)_{A-A-F}|]|n\rangle. \quad (21)$$

Используя данное выражение, получаем следующие матричные элементы ρ_{A-A} :

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos^4 gt \sqrt{(n+1)(n+2)}, \quad (22a)$$

$$\rho_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \left(\cos^2 gt \sqrt{(n+3)(n+4)}\right) \times C_n^* \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \times \left(\cos gt \sqrt{(n+3)(n+4)}\right), \quad (22b)$$

$$\rho_{13} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \left(\cos^2 gt \sqrt{(n+3)(n+4)}\right) \times C_n^* \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \times \left(\cos gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right), \quad (22c)$$

$$\rho_{14} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+4} \left(\cos^2 gt \sqrt{(n+5)(n+6)}\right) \times C_n^* \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \times \left(i \sin gt \sqrt{(n+3)(n+4)}\right), \quad (22d)$$

$$\rho_{21} = -\rho_{12}, \quad (22e)$$

$$\rho_{22} = \sum_{n_1=0}^{\infty} |C_n|^2 \left(\cos^2 gt \sqrt{(n+3)(n+4)}\right) \times \left(\sin^2 gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right), \quad (22f)$$

$$\rho_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \left(-i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \times \cos gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \times \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \times \left(\cos gt \sqrt{(n+1)(n+2)}\right), \quad (22g)$$

$$\begin{aligned} \rho_{24} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} C_{n+2} \left(-i \sin gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \times \\ & \times \left(\cos gt \sqrt{(n+5)(n+6)} \right) \times \\ & \times C_n^* \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \\ & \times \left(i \sin gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right), \end{aligned} \quad (22h)$$

$$\rho_{31} = -\rho_{13}, \quad (22i)$$

$$\rho_{32} = \rho_{23}, \quad (22j)$$

$$\begin{aligned} \rho_{33} = & \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \left(\cos^2 gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \\ & \times \left(\sin^2 gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \end{aligned} \quad (22k)$$

$$\begin{aligned} \rho_{34} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} C_{n+2} \left(-i \sin gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \times \\ & \times \left(\cos gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \times \\ & \times C_n^* \left(i \sin gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \\ & \times \left(i \sin gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right), \end{aligned} \quad (22l)$$

$$\rho_{41} = \rho_{14}, \quad (22m)$$

$$\rho_{42} = -\rho_{24}, \quad (22n)$$

$$\rho_{43} = -\rho_{34}, \quad (22o)$$

$$\begin{aligned} \rho_{44} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} |C_n|^2 \left(\sin^2 gt \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \\ & \times \left(\sin^2 gt \sqrt{(n+3)(n+4)} \right). \end{aligned} \quad (22p)$$

Для исследования запутанности двух атомов была проведена численная оценка $E_f(\rho)$ из выражения (13). Запутанность формирования E_f вычислена отдельно для большого и малого числа фотонов. На рис. 2 построены зависимости запутанности формирования E_f от угла Раби gt для $\langle n \rangle = 10, 20, 40$. Отметим, что атомы периодически распутываются. Эта особенность следует из уменьшения и восстановления инверсии заселенности, происходящих в двухуровневом атоме в резонаторе через двухфотонный процесс. Поскольку запутанность атомов вносится полем за счет двухфотонного процесса, его влияние также наблюдается в запутанности двух атомов. Обнаружено, что величина запутанности атомов увеличивается с ростом среднего числа фотонов \bar{n} . Такое поведение согласуется с результатами для невырожденного двухфотонного процесса [5] и зависящей от интенсивности модели Джейнса – Каммингса [8], но отличается от результатов моделей Джейнса – Каммингса [12] и Тэвиса – Каммингса [13].

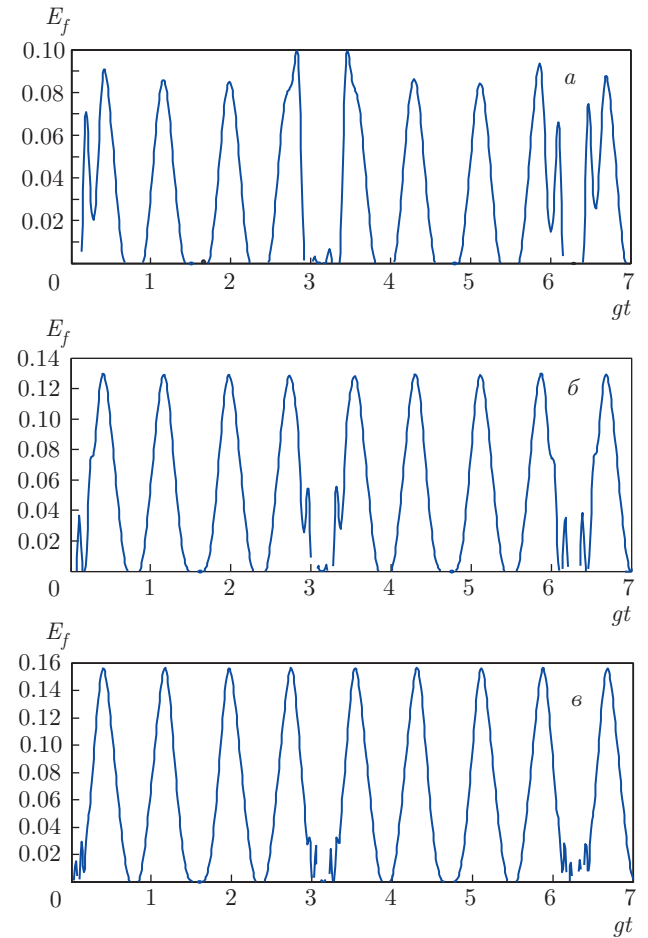


Рис. 2. Эволюция запутанности атомов, изначально находящихся в возбужденных состояниях, для поля с одной модой в когерентном состоянии с разными числами фотонов: $\langle n \rangle = 10$ (а), 20 (б), 40 (в)

са – Каммингса [8], но отличается от результатов моделей Джейнса – Каммингса [12] и Тэвиса – Каммингса [13].

На рис. 3 показаны зависимости E_f от угла Раби gt для $\bar{n} = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$. Для малых величин \bar{n} наблюдается изменение вида графиков, а также увеличение высоты пиков запутанности формирования с уменьшением числа фотонов в резонаторе $\bar{n} = |\alpha|^2$. Для малых величин \bar{n} получены узкие острые пики пуассоновского распределения, которые уширяются при увеличении \bar{n} . При увеличении среднего числа фотонов также наблюдается сдвиг пиков запутанности формирования влево, как ожидается для когерентного поля.

Из сравнения рис. 3 данной работы с рис. 3 из работы [5] для модели Джейнса – Каммингса с двумя модами можно сделать вывод, что максимальная

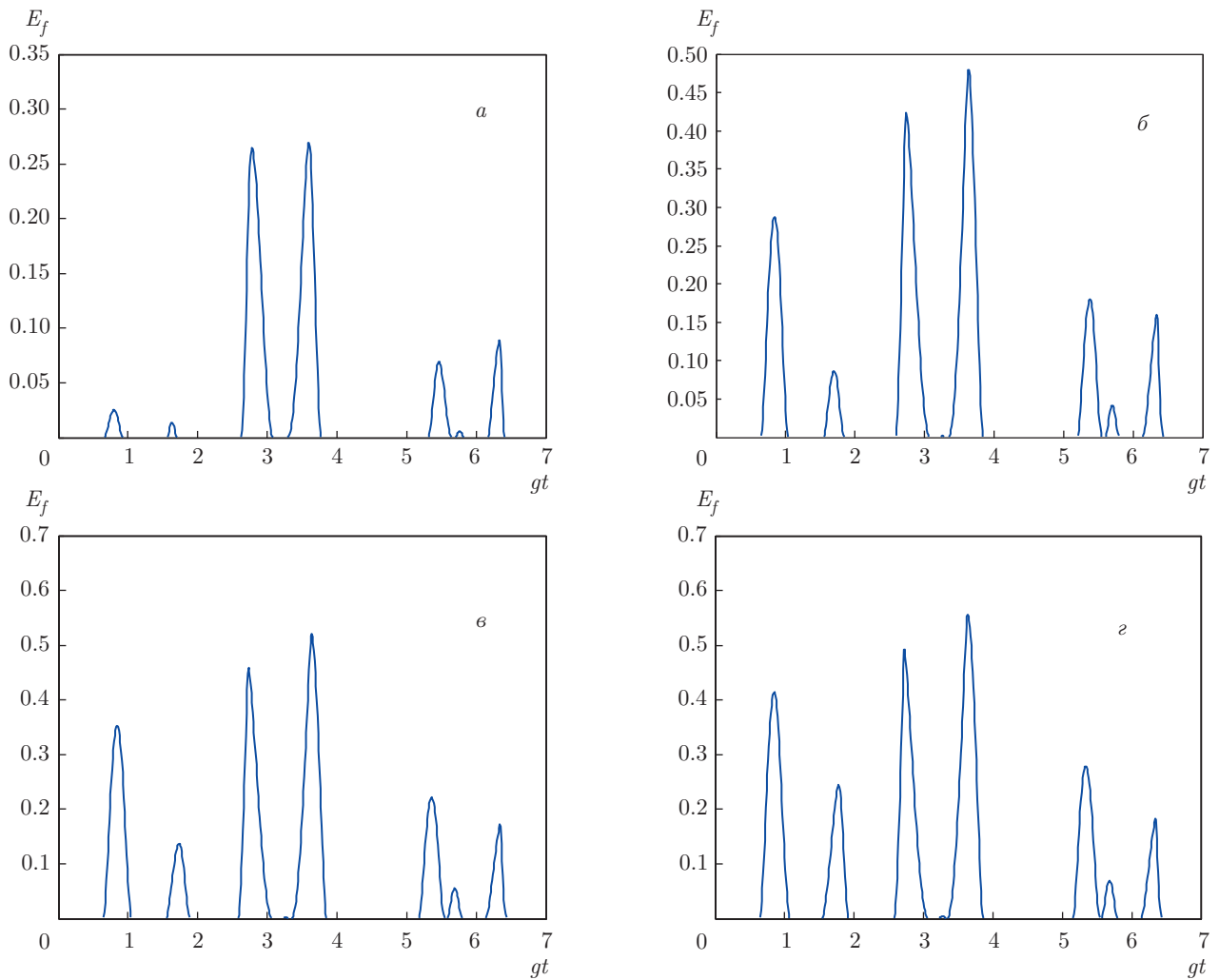


Рис. 3. Эволюция запутанности атомов, изначально находящихся в возбужденных состояниях, для поля с одной модой в когерентном состоянии с разными числами фотонов: $\langle n \rangle = 0.5$ (а), 0.1 (б), 0.05 (в), 0.01 (г)

величина запутанности для вырожденного двухфотонного процесса в обоих случаях много больше, чем для невырожденного процесса.

3.3. Поле резонатора с одной модой в тепловом состоянии

Среднее число фотонов при температуре T [К] для поля в тепловом равновесии, подчиняющегося статистике Бозе–Эйнштейна, равно $\langle n \rangle = (\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^{-1}$. Статистика фотонов задается следующим распределением P_n :

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}. \tag{23}$$

Коллективное состояние резонатора с двумя атомами получается суммированием по всем n , а запутанность формирования вычисляется так же, как в разд. 3.2. На рис. 4 построена зависимость $E_f(gt)$ для $\langle n \rangle = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$. Аналогично лестничной модели с двумя модами [5] обнаружено, что величина запутанности атомов возрастает с уменьшением числа фотонов в резонаторе. Однако, сравнивая рис. 4 с рис. 4 из работы [5] для лестничной модели с двумя модами, построенными для $\langle n \rangle = 0.5, 0.1, 0.05$ и 0.01, можно увидеть, что величины пиков E_f в данном случае намного больше. Таким образом, запутанность в вырожденном случае с двумя модами оказывается намного больше, чем в невырожденном случае.

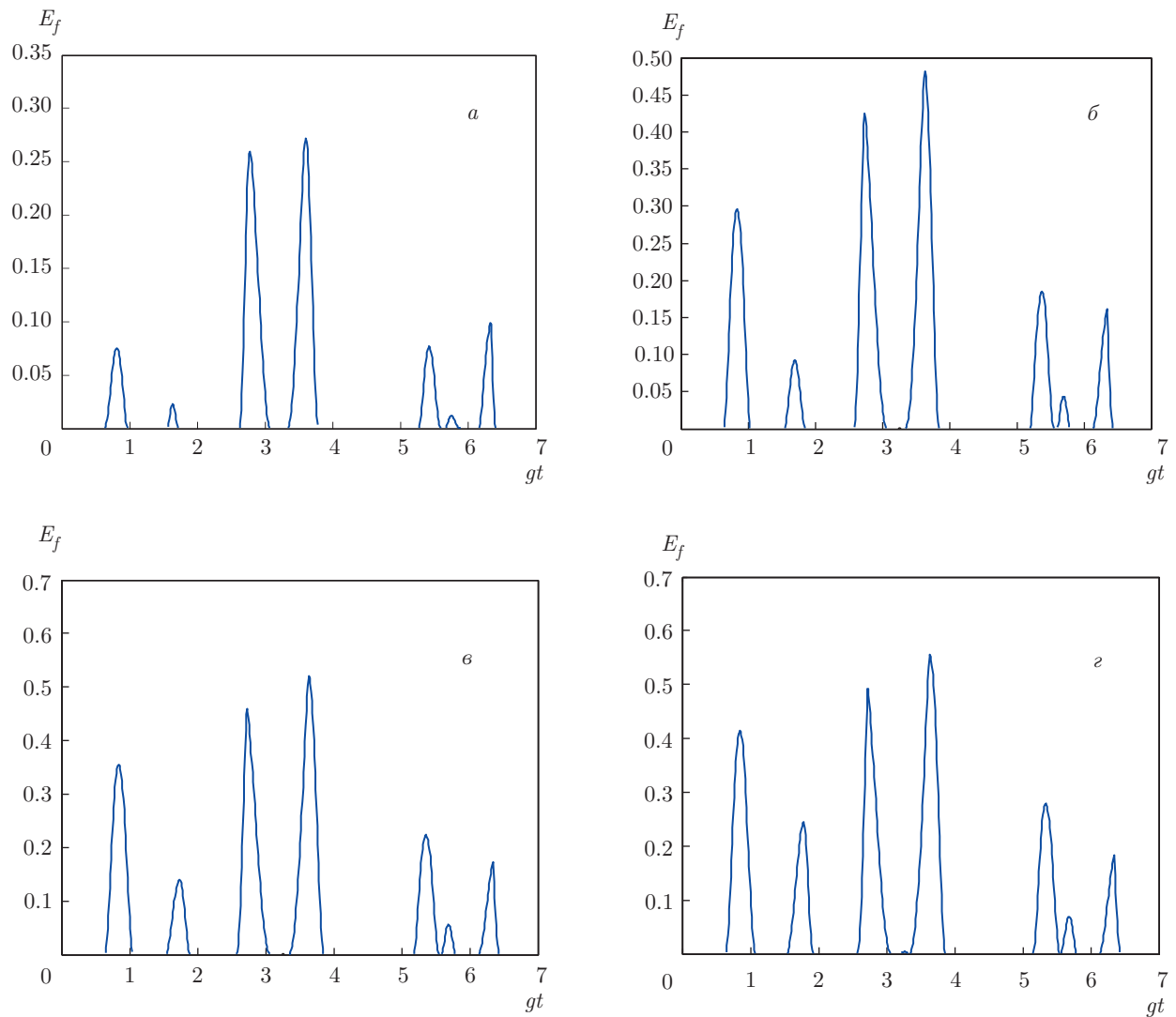


Рис. 4. Эволюция запутанности атомов в тепловом поле с одной модой с разными числами фотонов: $\langle n \rangle = 0.5$ (а), 0.1 (б), 0.05 (в), 0.01 (г)

4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрена экспериментальная ячейка на микромазере [14], в которой два атома последовательно проходят через резонатор, не пересекаясь друг с другом. Изучена динамика запутанности между атомами, обусловленная взаимодействием через двухфотонный вырожденный процесс. Результаты сравниваются с результатами работы [5], в которой было рассмотрено взаимодействие через двухфотонный невырожденный процесс. Для исходного когерентного поля в резонаторе наблюдалось периодическое запутывание и распутывание, причем высота пиков E_f немного увеличивается с

ростом \bar{n} для больших фотонных чисел. Для малых значений \bar{n} получаются зависимости другого типа с узкими острыми пиками. Это является характерной особенностью пуассоновского распределения с максимумом при \bar{n} , которое уширяется при увеличении \bar{n} . Для случая малых значений числа фотонов наблюдалось увеличение запутанности между двумя атомами при уменьшении среднего числа фотонов как для исходного когерентного, так и для теплового поля. Эволюция величины E_f для двухфотонного процесса с одной модой ведет себя похожим образом. Квантовые эффекты, усиливающиеся в основном при малых значениях \bar{n} , способствуют увеличению высоты пиков E_f .

ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Briegel and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001).
2. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2000).
3. A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
4. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
5. Sudha Singh and Amrita, Int. J. Theor. Phys. **52**, 3874 (2013).
6. B. Ghosh, A. S. Majumdar, and N. Nayak, Int. J. Quant. Inf. **5**, 169 (2007).
7. A. Datta, B. Ghosh, A. S. Majumdar, and N. Nayak, Euro. Phys. Lett. **67**, 934 (2004).
8. P. Saha, A. S. Majumdar, S. Singh, and N. Nayak, Int. J. Quant. Inf. **8**, 1397 (2010).
9. S. Singh, Pramana J. Phys. **66**, 615 (2006).
10. S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
11. W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
12. B. Ghosh, A. S. Majumdar, and N. Nayak, Int. J. Theor. Phys. **13**, 86 (2009).
13. M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **65**, 040101 (2002).
14. D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).