ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 3 (9), стр. 469–495

УНИТАРНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ПАРАФЕРМИ-СТАТИСТИКА ПОРЯДКА 2

Ю. А. Марков [a*], *М. А. Маркова* [a**], *Д. М. Гитман* [b,c,d***]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук 664033, Иркутск, Россия*

[b] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

[c] *Томский государственный университет 634050, Томск, Россия*

[d] *Институт физики университета Сан-Паулу 70297-400, Сан-Паулу, Бразилия*

Поступила в редакцию 29 марта 2018 г.

Рассмотрена связь между схемой унитарного квантования и параферми-статистикой порядка 2. Предложено соответствующее обобщение анзаца Грина, которое позволило обратить в тождество билинейные и трилинейные соотношения для операторов рождения и уничтожения двух различных параферми-полей, ϕ_a и ϕ_b. Предложен способ включения параграссмановых чисел ξ_k в общую схему унитарного квантования. Для парастатистики порядка 2 обнаружен интересный факт, что трилинейные соотношения, содержащие как параграссмановы переменные ξ_k, так и операторы поля a_k, b_m, при некотором обратимом отображении переходят в унитарно эквивалентные соотношения, в которых коммутаторы заменяются на антикоммутаторы и наоборот. Показано, что следствием данного обстоятельства является существование двух альтернативных определений когерентного состояния для параферми-осцилляторов. В явном виде построено преобразование Клейна для гриновских компонент операторов a_k и b_m, что позволило привести исходные коммутационные правила для компонент к нормальным коммутационным соотношениям для обычных ферми-полей. Проанализирована нетривиальная связь между трилинейными коммутационными соотношениями схемы унитарного квантования и так называемой тройной суперлиевой системой. Проведено краткое обсуждение возможности включения теории Дэффина – Кеммера – Петье в схему унитарного квантования.

DOI: 10.1134/S0044451018090031

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема квантования конечномерных физических систем постоянно привлекает внимание физиков-теоретиков. Из недавних работ в этом направлении исследований следует отметить работу [1]. В настоящей работе мы хотим рассмотреть другое направление исследований в квантовании конечномерных классических теорий, в которых основное внимание уделяется ли-алгебраическим аспектам рассматриваемых физических систем. В работах [2–4] и независимо [5–8] был предложен подход к квантованию полей, основанный на соотношениях алгебры Ли унитарной группы $SU(2M+1)$[1)]. В [2] предложенная схема квантования была названа униквантованием, в то время как в [5] она получила название A-квантования. В данной работе мы хотим исследовать более подробно некоторые свойства соотношений, полученных в работе [2], и, в частности, установить связь между унитарным квантованием и параферми-статистикой порядка 2. Ниже мы приводим несколько основных формул из работы [2],

* E-mail: markov@icc.ru

** E-mail: markova@icc.ru

*** E-mail: gitman@dfn.if.usp.br

1) Отметим, что некоторые аспекты частных случаев квантования, основанных на алгебрах $SU(2)$ и $SU(3)$, были рассмотрены ранее в работах [9–11].

на которые будем часто ссылаться в нашей работе. В Приложении А дана краткая схема вывода этих формул.

Пусть $a_k^\dagger$ и a_k — операторы рождения и уничтожения, которые подчиняются трилинейным соотношениям Грина [12] (ограничим наше рассмотрение только случаем параферми-статистики)

$$[[\hat{a}_k, \hat{a}_l], \hat{a}_m] = 2\hat{\delta}_{lm}\hat{a}_k - 2\hat{\delta}_{km}\hat{a}_l, \tag{1.1}$$

где $k, l, m = 1, 2, \ldots, M$, а $[\,,]$ — коммутатор. Оператор со шляпкой вверху $\hat{a}_k$ обозначает a_k или $a_k^\dagger$ и $\hat{\delta}_{kl} = \delta_{kl}$, когда $\hat{a}_k = a_k(a_k^\dagger)$ и $\hat{a}_l = a_l^\dagger(a_l)$, $\hat{\delta}_{kl} = 0$ — в противном случае. Для унитарного квантования в дополнение к операторам $\hat{a}_k$ вводится другой набор операторов рождения и уничтожения $\hat{b}_k$, удовлетворяющих тем же самым коммутационным соотношениям:

$$[[\hat{b}_k, \hat{b}_l], \hat{b}_m] = 2\hat{\delta}_{lm}\hat{b}_k - 2\hat{\delta}_{km}\hat{b}_l. \tag{1.2}$$

Кроме трилинейных соотношений Грина (1.1) и (1.2), из данной схемы квантования однозначным образом следуют смешанные коммутационные соотношения двух типов между операторами $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$:

1. трилинейные соотношения

$$[[\hat{b}_m, \hat{a}_k], \hat{a}_l] = 4\hat{\delta}_{km}\hat{b}_l + 2\hat{\delta}_{lk}\hat{b}_m + 2\hat{\delta}_{lm}\hat{b}_k, \tag{1.3}$$

$$[[\hat{a}_m, \hat{b}_k], \hat{b}_l] = 4\hat{\delta}_{km}\hat{a}_l + 2\hat{\delta}_{lk}\hat{a}_m + 2\hat{\delta}_{lm}\hat{a}_k, \tag{1.4}$$

2. билинейные соотношения

$$[\hat{a}_k, \hat{b}_m] = [\hat{a}_m, \hat{b}_k], \tag{1.5}$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_m] = [\hat{b}_k, \hat{b}_m]. \tag{1.6}$$

Таким образом, мы имеем случай двух параферми-полей порядка p, которые должны удовлетворять не только трилинейным, но и билинейным соотношениям. Как известно [13, 14], коммутационные соотношения (1.1) и (1.2) порождают алгебру, которая изоморфна алгебре ортогональной группы $SO(2M+1)$. Остальные соотношения (1.3)–(1.6) дополняют эту алгебру до алгебры унитарной группы $SU(2M+1)$. Оператор числа частиц

$$N = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}([a_k^\dagger, a_k]+p) \left(\equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}([b_k^\dagger, b_k]+p)\right) \tag{1.7}$$

и алгебра (1.1)–(1.6) однозначно фиксируют схему унитарного квантования.

В дополнении к сказанному выше необходимо отметить, что в построении Говоркова [2] для группы $SU(2M+1)$ существует еще один весьма важный оператор, обозначенный как ζ_0. Данный оператор в силу соотношений (A.10) и (A.18) можно выразить в терминах операторов $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ следующим образом:

$$\zeta_0 = \frac{i}{2(2M+1)}\sum_{k=1}^{M}\Big([a_k^\dagger, b_k] + [b_k^\dagger, a_k]\Big). \tag{1.8}$$

Оператор ζ_0 имеет коммутационные свойства:

$$[\hat{a}_k, \zeta_0] = 2i\hat{b}_k, \quad [\hat{b}_k, \zeta_0] = -2i\hat{a}_k. \tag{1.9}$$

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приведен краткий обзор работы Гринберга и Мессии для случая различных параферми-полей. В разд. 3 и 4 дано обобщение системы коммутационных правил для гриновских компонент операторов рождения и уничтожения двух параполей ϕ_a и ϕ_b. Приведено детальное доказательство того, что для парастатистики порядка $p = 2$ данная система обращает в тождество билинейные и трилинейные соотношения Говоркова. Раздел 5 посвящен включению парагpассмановых чисел ξ_k в общую схему унитарного квантования. Раздел 6 связан с построением коммутационных соотношений между операторами a_k, b_m, парагpассмановыми числами ξ_k и оператором $e^{\alpha i\widetilde{N}}$, где $\widetilde{N}$ определен формулой (5.9), а α — произвольное вещественное число. Рассмотрены два важных частных случая общих соотношений, когда $\alpha = \pm\pi$ и $\alpha = \pm\pi/2$. В этом же разделе рассмотрено некоторое обратимое отображение трилинейных соотношений, которые включают в себя как парагpассмановы числа, так и операторы поля. Выявлены нетривиальные особенности данного отображения. В разд. 7 определено действие некоторых операторов, которые возникают в рамках схемы унитарного квантования на вакуумное состояние.

Раздел 8 посвящен обсуждению свойств когерентных состояний. В частности, обнаружен интересный факт существования еще одного состояния для параферми-статистики порядка 2, которое обладает теми же свойствами, что и обычно используемые когерентные состояния. В разделе 9 проанализирована возможность вывода трилинейных соотношений Говоркова из требования инвариантности коммутационных соотношений между операторами a_k, b_m и $\widetilde{N}$ при унитарном преобразовании операторов a_k и b_m. Показано, что в отличие от случая одного параполя данного требования инвариантности недостаточно для восстановления всех трилинейных соотношений Говоркова. В разд. 10 построено так называемое преобразование Клейна для гриновских компонент операторов рождения и уничтожения параполей. В разд. 11 проанализирован вопрос о связи между трилинейными соотношениями Говоркова и тройной суперлиевой системой. Раздел 12 касается проблемы включения формализма Дэффина – Кеммера – Петье в общую схему унитарного квантования. Показано, что эти два подхода в конечном счете несовместимы. В заключительном разд. 13 кратко обсуждена возможная связь между схемой унитарного квантования, основанной на алгебре Ли унитарной группы $SU(2M)$, и парабозе-статистикой. В том же разделе акцентировано внимание на некоторых свойствах, присущих только парастатистике порядка 2.

В Приложении А приведены все основные соотношения алгебры Ли унитарной группы $SU(2M+1)$. Там же отмечены некоторые неточности, замеченные нами в работах Говоркова [2, 4]. В Приложении В выписаны различные операторные тождества, которые постоянно используются на протяжении всей работы. В Приложении С собраны все основные коммутационные соотношения, включающие оператор $\mathrm{e}^{\alpha i\tilde{N}}$.

2. ОБЗОР РАБОТЫ ГРИНБЕРГА И МЕССИИ

Распишем общее соотношение (1.1) более детально:

$$[[a_k^\dagger, a_l], a_m] = -2\delta_{km} a_l, \tag{2.1}$$

$$[[a_k, a_l], a_m] = 0 \tag{2.2}$$

и как следствие тождества Якоби (B.1) получим

$$[[a_k, a_l], a_m^\dagger] = 2\delta_{lm} a_k - 2\delta_{km} a_l. \tag{2.3}$$

Гринберг и Мессия [15] предложили обобщение соотношений (2.1)–(2.3) на случай нескольких разных параполей. Для того чтобы определить соответствующие коммутационные правила между различными параполями, авторы потребовали, чтобы искомые соотношения удовлетворяли трем условиям:

(i) левая часть этих соотношений должна иметь трилинейный вид[2)]

$$[[A, B], C],$$

а правая часть — быть линейной;

(ii) если внутренняя пара $[A, B]$ образована операторами одного поля, она должна коммутировать с C, если C относится к другому полю;

(iii) этим соотношениям должны удовлетворять обычные бозе- и ферми-поля.

В случае, когда эти условия применяются к двум параферми полям ϕ_a и ϕ_b, Гринберг и Мессия получили следующую систему трилинейных соотношений, включающих поле ϕ_a дважды и одно поле ϕ_b:

$$[[a_k^\dagger, a_l], b_m] = 0, \tag{2.4}$$

$$[[a_k, a_l], b_m] = 0, \tag{2.5}$$

$$[[a_k^\dagger, a_l^\dagger], b_m] = 0. \tag{2.6}$$

При использовании тождества Якоби (B.1), совместно с условиями (i) и (iii), из (2.4) следуют еще два трилинейных соотношения:

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] = 2\delta_{kl} b_m, \tag{2.7}$$

$$[[a_l, b_m], a_k^\dagger] = -2\delta_{kl} b_m. \tag{2.8}$$

В разд. 9 мы обсудим более подробно вывод (2.7) и (2.8). К соотношениям (2.4)–(2.8) добавляется их эрмитово сопряжение и еще 18 трилинейных соотношений, включающих поле ϕ_b дважды и одно поле ϕ_a.

Также в работе [15] было предложено непосредственное обобщение анзаца Грина [12]. Каждый оператор поля записывается в виде разложения по гриновским компонентам:

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{p} a_k^{(\alpha)}, \quad b_m = \sum_{\alpha=1}^{p} b_m^{(\alpha)}, \tag{2.9}$$

где p — порядок парастатистики. Каждая пара компонент, относящаяся к одному и тому же полю, удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} \{a_k^{(\alpha)}, a_l^{\dagger(\alpha)}\} = \delta_{kl}, \quad \{a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\} = 0, \\ [a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}] = [a_k^{(\alpha)}, a_l^{\dagger(\beta)}] = 0, \quad \alpha \neq \beta \end{gathered} \tag{2.10}$$

и аналогично для ϕ_b-поля. Здесь $\{\,,\}$ — антикоммутатор. Для каждой пары гриновских компонент различных полей Гринберг и Мессия постулировали следующие правила:

$$\begin{gathered} \{a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\} = \{a_k^{(\alpha)}, b_m^{\dagger(\alpha)}\} = 0, \\ \{a_k^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\} = \{a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{\dagger(\alpha)}\} = 0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

и

$$\begin{gathered} [a_k^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}] = [a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{\dagger(\beta)}] = 0, \\ [a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\beta)}] = [a_k^{(\alpha)}, b_m^{\dagger(\beta)}] = 0, \quad \alpha \neq \beta. \end{gathered} \tag{2.12}$$

[2)] Впрочем, сами авторы не исключили возможность существования билинейных коммутационных и антикоммутационных соотношений между различными параполями. Однако они ограничили свое внимание только трилинейными соотношениями. В схеме унитарного квантования билинейные соотношения (см. (1.5)–(1.6)) появляются неизбежно.

Поля, удовлетворяющие правилам (2.11) и (2.12), обращают в тождества трилинейные соотношения (2.4)–(2.8).

Наконец, к условиям единственности вакуумного состояния $|0\rangle$

$$a_k|0\rangle = b_k|0\rangle = 0, \quad \text{для всех } k \tag{2.13}$$

и

$$\begin{aligned} &a_k a_l^\dagger|0\rangle = p\delta_{kl}|0\rangle, \quad \text{для всех } k,\, l, \\ &b_m b_n^\dagger|0\rangle = p\delta_{mn}|0\rangle, \quad \text{для всех } m,\, n \end{aligned} \tag{2.14}$$

Гринберг и Мессия добавили еще два условия:

$$\begin{aligned} &b_m a_k^\dagger|0\rangle = 0, \quad \text{для всех } m,\, k, \\ &a_k b_m^\dagger|0\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Эти дополнительные условия могут быть получены из коммутационных соотношения (2.4)–(2.8) и из единственности вакуумного состояния $|0\rangle$. Данный вывод будет рассмотрен более детально в разд. 7 в контексте нашей задачи.

3. АНЗАЦ ГРИНА ДЛЯ СООТНОШЕНИЙ ГОВОРКОВА

Во Введении мы выписали трилинейные и билинейные коммутационные соотношения, которые возникают в рамках схемы унитарного квантования Говоркова. Первым шагом рассмотрим трилинейные соотношения для двух различных параполей. Частным случаем общей формулы (1.3) являются следующие выражения:

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] = 2\delta_{kl} b_m + 4\delta_{km} b_l, \tag{3.1}$$

$$[[a_l, b_m], a_k^\dagger] = -2\delta_{kl} b_m - 2\delta_{km} b_l. \tag{3.2}$$

Данные соотношения отличаются от аналогичных (2.7) и (2.8) схемы квантования Гринберга и Мессии наличием двух последних членов в правых частях. Складывая (3.1) и (3.2) и используя тождество Якоби, получаем аналог для трилинейного соотношения (2.4):

$$[[a_k^\dagger, a_l], b_m] = -2\delta_{km} b_l. \tag{3.3}$$

Здесь мы также наблюдаем появление нетривиального члена в правой части.

Представим a- и b-операторы в виде разложений (2.9). Возникает вопрос: какой вид должны иметь коммутационные правила для гриновских компонент $a_k^{(\alpha)}$ и $b_m^{(\beta)}$, чтобы трилинейные соотношения Говоркова (3.1) и (3.3) тождественно выполнялись. Ясно, что коммутационные правила (2.10) (и аналогично для ϕ_b-поля) должны быть справедливы и в этом случае, так как наборы a- и b-операторов по отдельности удовлетворяют стандартным трилинейным соотношениям для параферми-полей, (1.1) и (1.2). Поэтому необходимо обобщить соотношения (2.11) и (2.12) для гриновских компонент различных полей. Отметим, что коммутационные правила (2.11) и (2.12) в определенном смысле являются весьма тривиальными.

Рассмотрим для конкретности соотношение (3.3). Распишем левую часть в терминах гриновских компонент. Для коммутатора $[a_k^\dagger, a_l]$ имеем

$$[a_k^\dagger, a_l] = \sum_{\alpha=1}^{p} [a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}] + \sum_{\alpha\neq\beta} [a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\beta)}].$$

Последний член в правой части равен нулю в силу (2.10). Далее, для двойного коммутатора будем иметь

$$[[a_k^\dagger, a_l], b_m] = \sum_{\alpha=1}^{p} [[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\alpha)}] + \\ + \sum_{\alpha\neq\beta} [[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\beta)}]. \tag{3.4}$$

Символ $\sum_{\alpha\neq\beta}$ означает суммирование как по α-, так и по β-индексам с единственным ограничением $\alpha \neq \beta$. Для первого выражения под знаком суммы в правой части (3.4) используем операторное тождество (B.2), а для второго — обычное тождество Якоби (B.1):

$$[[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\alpha)}] = \{a_k^{\dagger(\alpha)}, \{b_m^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\}\} - \\ - \{a_l^{(\alpha)}, \{b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\alpha)}\}\}, \tag{3.5}$$

$$[[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\beta)}] = -[[a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}], a_k^{\dagger(\alpha)}] - \\ - [[b_m^{(\beta)}, a_k^{\dagger(\alpha)}], a_l^{(\alpha)}], \quad \alpha \neq \beta. \tag{3.6}$$

В силу коммутационных правил Гринберга – Мессии (2.11) и (2.12), эти выражения обращаются в нуль и мы приходим к (2.4). Модифицируем первые два соотношения в (2.11), оставив остальные без изменения (в этом случае второй двойной коммутатор (3.6) равен нулю). С этой целью введем в рассмотрение новый оператор Ω как некоторый дополнительный алгебраический элемент, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} &\{a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\} = 2\delta_{mk}\Omega, \quad \{a_k^{(\alpha)}, \Omega\} = b_k^{(\alpha)}, \\ &\{b_m^{\dagger(\alpha)}, a_k^{(\alpha)}\} = 2\delta_{mk}\Omega^\dagger, \quad \{b_m^{(\alpha)}, \Omega\} = -a_m^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В этом случае, как легко видеть, выражение (3.5) приводит к

$$[[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\alpha)}] = -2\delta_{mk} b_l^{(\alpha)}$$

и таким образом, в силу (3.4), мы воспроизводим (3.3). Однако, если попытаться применить коммутационные правила (3.7) к трилинейному соотношению (3.1), то можно увидеть, что последний член в правой части (3.1) не воспроизводится. Здесь требуется более радикальная модификация выражений (2.11) и (2.12). Ниже мы постулируем новую систему билинейных соотношений для гриновских компонент $a_k^{(\alpha)}$ и $b_m^{(\beta)}$. Далее проверим, что эти правила коммутации обращают в тождество билинейные (1.5), (1.6) и трилинейные (3.1), (3.3) соотношения Говоркова. Однако это будет иметь место только для частного случая парастатистики порядка 2.

Потребуем, чтобы гриновские компоненты $a_k^{(\alpha)}$, $b_m^{(\beta)}$ и дополнительный оператор Ω удовлетворяли следующей системе коммутационных правил:

$$[b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\alpha)}] = 2\delta_{mk}\Omega, \quad [a_k^{(\alpha)}, b_m^{\dagger(\alpha)}] = 2\delta_{mk}\Omega^{\dagger}, \tag{3.8}$$

$$[a_k^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}] = [a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{\dagger(\alpha)}] = 0, \tag{3.9}$$

$$[\Omega, a_k^{(\alpha)}] = b_k^{(\alpha)}, \quad [\Omega, b_m^{(\alpha)}] = -a_m^{(\alpha)}, \tag{3.10}$$

$$\{a_k^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\} = \{a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\} = \{a_k^{(\alpha)}, b_m^{\dagger(\beta)}\} = \\ = \{a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{\dagger(\beta)}\} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{3.11}$$

Необходимо отметить, что не все соотношения (3.8)–(3.11) являются независимыми. Как будет показано в конце раздела, соотношения (3.10) являются следствием (3.8), (3.11) и билинейных соотношений (1.5). Сравнивая (3.8) и (3.10) с соотношениями (3.7), видим, что вместо антикоммутаторов в (3.7) здесь мы имеем коммутаторы. То же самое справедливо и для соотношений Гринберга–Мессии (2.12), в которых коммутаторы заменили на антикоммутаторы (3.11).

Рассмотрим сначала наиболее простые из коммутационных правил Говоркова, а именно, билинейные соотношения (1.5) и (1.6). Соотношение (1.5), в частности, влечет

$$[a_k, b_m] = [a_m, b_k].$$

Подставляя в левую часть разложение (2.9) и учитывая (3.9), (3.10) и тождество Якоби, имеем следующую цепочку равенств:

$$[a_k, b_m] = \sum_{\alpha\neq\beta}[a_k^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}] = \sum_{\alpha\neq\beta}[a_k^{(\alpha)}, [\Omega, a_m^{(\beta)}]] = \\ = -\sum_{\alpha\neq\beta}\Big([\Omega, [a_m^{(\beta)}, a_k^{(\alpha)}]] + [a_m^{(\beta)}, [a_k^{(\alpha)}, \Omega]]\Big) = \\ = \sum_{\alpha\neq\beta}[a_m^{(\beta)}, b_k^{(\alpha)}] \equiv [a_m, b_k].$$

При выводе использовались также коммутационные правила для гриновских компонент ϕ_a-поля (2.10).

Далее рассмотрим билинейное соотношение (1.6), которое, в частности, подразумевает

$$[a_k, a_m] = [b_k, b_m].$$

Используя коммутационные правила (2.10), соотношения (3.9), (3.10) и тождество Якоби (B.1), здесь получаем цепочку равенств

$$[a_k, a_m] = \sum_{\alpha=1}^{p}[a_k^{(\alpha)}, a_m^{(\alpha)}] = \sum_{\alpha=1}^{p}[a_k^{(\alpha)}, [\Omega, b_m^{(\alpha)}]] = \\ = -\sum_{\alpha}\Big([b_m^{(\alpha)}, [a_k^{(\alpha)}, \Omega]] + [\Omega, [b_m^{(\alpha)}, a_k^{(\alpha)}]]\Big) = \\ = -\sum_{\alpha}[b_m^{(\alpha)}, b_k^{(\alpha)}] \equiv [b_k, b_m].$$

Вернемся снова к билинейному соотношению (1.5). Проанализируем чуть более сложный случай, когда один оператор является оператором рождения, а другой — оператором уничтожения:

$$[a_k^{\dagger}, b_m] = [a_m, b_k^{\dagger}]. \tag{3.12}$$

Используя соотношения (3.8) и (3.10), находим для левой части (3.12)

$$[a_k^{\dagger}, b_m] = \sum_{\alpha}[a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}] + \sum_{\alpha\neq\beta}[a_k^{\dagger(\alpha)}, b_m^{(\beta)}] = \\ = -2p\delta_{km}\Omega + \sum_{\alpha\neq\beta}[a_k^{\dagger(\alpha)}, [\Omega, a_m^{(\beta)}]]. \tag{3.13}$$

Выражение под знаком суммы в последнем члене, в силу тождества Якоби и коммутационных правил (2.10), (3.10), принимает вид

$$[a_k^{\dagger(\alpha)}, [\Omega, a_m^{(\beta)}]] = -[\Omega, [a_m^{(\beta)}, a_k^{\dagger(\alpha)}]] - \\ - [a_m^{(\beta)}, [a_k^{\dagger(\alpha)}, \Omega]] = [a_m^{(\beta)}, b_k^{\dagger(\alpha)}].$$

Добавим и вычтем сумму

$$\sum_{\alpha}[a_m^{(\alpha)}, b_k^{\dagger(\alpha)}]\ (\equiv 2p\delta_{mk}\Omega^{\dagger})$$

в правой части (3.13), тогда

$$[a_k^\dagger, b_m] = -2p\delta_{km}\Omega - \sum_\alpha [a_m^{(\alpha)}, b_k^{\dagger(\alpha)}] + \\ + \left(\sum_\alpha [a_m^{(\alpha)}, b_k^{\dagger(\alpha)}] + \sum_{\alpha\neq\beta} [a_m^{(\beta)}, b_k^{\dagger(\alpha)}]\right) \equiv \\ \equiv -2p\delta_{km}\big(\Omega + \Omega^\dagger\big) + [a_m, b_k^\dagger].$$

Таким образом, билинейное соотношение (3.12) будет выполняться, если оператор Ω удовлетворяет следующему условию:

$$\Omega + \Omega^\dagger = 0. \tag{3.14}$$

Разобранных примеров достаточно, чтобы утверждать, что билинейные соотношения (1.5), (1.6) обращаются в тождество с использованием системы коммутационных правил (2.10), (3.8)–(3.11) и дополнительного условия на оператор Ω (3.14).

В заключение данного раздела покажем, что для конкретного случая парастатистики, а именно для $p = 2$, коммутационные правила (3.10) являются следствием (3.8), (3.11) и билинейного соотношения (3.12). Другими словами, если мы постулируем справедливость (3.8), (3.11) и (3.12), то неизбежным их следствием будут соотношения (3.10). Для этой цели перепишем (3.12) в терминах гриновских компонент:

$$[a_k^{\dagger(1)}, b_m^{(2)}] + [a_k^{\dagger(2)}, b_m^{(1)}] = \\ = -\big([b_k^{\dagger(1)}, a_m^{(2)}] + [b_k^{\dagger(2)}, a_m^{(1)}]\big). \tag{3.15}$$

Вычислим коммутатор между (3.15) и оператором $a_l^{(1)}$. Здесь имеем два трилинейных коммутатора, отличных от нуля:

$$\begin{aligned} &[[a_k^{\dagger(1)}, b_m^{(2)}], a_l^{(1)}] = \{a_k^{\dagger(1)}, \{a_l^{(1)}, b_m^{(2)}\}\} - \\ &\quad - \{b_m^{(2)}, \{a_l^{(1)}, a_k^{\dagger(1)}\}\} = -2\delta_{kl} b_m^{(2)}, \\ &[[b_k^{\dagger(1)}, a_m^{(2)}], a_l^{(1)}] = -[[a_m^{(2)}, a_l^{(1)}], b_k^{\dagger(1)}] - \\ &\quad - [[a_l^{(1)}, b_k^{\dagger(1)}], a_m^{(2)}] = 2\delta_{kl}[\Omega, a_m^{(2)}]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

В первом случае мы использовали тождество (B.2). Тем самым искомый коммутатор оператора $a_l^{(1)}$ с (3.15) приводит к соотношению $[\Omega, a_m^{(2)}] = b_m^{(2)}$, а аналогичный коммутатор с $a_l^{(2)}$ дает $[\Omega, a_m^{(1)}] = b_m^{(1)}$, и мы воспроизводим первое соотношение в (3.10). Для получения второго соотношения необходимо взять коммутатор между $b_l^{(\alpha)}$ и (3.15). Для $\alpha = 1$ отличными от нуля коммутаторами будут

$$\begin{aligned} &[[a_k^{\dagger(1)}, b_m^{(2)}], b_l^{(1)}] = -[[b_m^{(2)}, b_l^{(1)}], a_k^{\dagger(1)}] - \\ &\quad - [[b_l^{(1)}, a_k^{\dagger(1)}], b_m^{(2)}] = -2\delta_{kl}[\Omega, b_m^{(2)}], \\ &[[b_k^{\dagger(1)}, a_m^{(2)}], b_l^{(1)}] = \{b_k^{\dagger(1)}, \{b_l^{(1)}, a_m^{(2)}\}\} - \\ &\quad - \{a_m^{(2)}, \{b_l^{(1)}, b_k^{\dagger(1)}\}\} = -2\delta_{kl} a_m^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Это дает нам $[\Omega, b_m^{(2)}] = -a_m^{(2)}$. Коммутатор, содержащий $b_l^{(2)}$, приводит к аналогичному выражению с заменой гриновского индекса $2 \to 1$, и мы воспроизводим таким образом второе соотношение в (3.10).

4. ТРИЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ГОВОРКОВА

Перейдем теперь к анализу трилинейных соотношений Говоркова (1.3) и (1.4). Здесь достаточно рассмотреть частные случаи (3.1)–(3.3). Мы уже анализировали соотношение (3.3) в предыдущем разделе, однако сейчас поступим несколько иначе. Для первого выражения в правой части (3.4) используем тождество Якоби, а для второго — тождество (B.2). В силу коммутационных правил (3.8)–(3.11), вместо (3.5) и (3.6), будем иметь

$$\sum_{\alpha=1}^{p} [[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\alpha)}] = \\ = -\sum_\alpha \Big([[a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}], a_k^{\dagger(\alpha)}] + [[b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\alpha)}], a_l^{(\alpha)}]\Big) = \\ = -2\delta_{km} \sum_\alpha [\Omega, a_l^{(\alpha)}] = -2\delta_{km} b_l,$$

$$\sum_{\alpha\neq\beta} [[a_k^{\dagger(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\beta)}] = \\ = \sum_{\alpha\neq\beta} \Big(\{a_k^{\dagger(\alpha)}, \{b_m^{(\beta)}, a_l^{(\alpha)}\}\} - \{a_l^{(\alpha)}, \{b_m^{(\beta)}, a_k^{(\dagger\alpha)}\}\}\Big) = 0.$$

Здесь мы также воспроизводим соотношение (3.3), как это имело место и для правил (3.7).

Рассмотрим далее более сложное трилинейное соотношение (3.1), которое для удобства выпишем еще раз

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] = 2\delta_{kl} b_m + 4\delta_{km} b_l. \tag{4.1}$$

Для «внутреннего» коммутатора можно использовать результат (3.13)

$$[b_m, a_k^\dagger] = 2p\delta_{km}\Omega + \sum_{\alpha\neq\beta} [b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}],$$

тогда исходное для анализа выражение в левой части (4.1) принимает вид

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] = 2p\delta_{mk}[\Omega, a_l] + \\ + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_\gamma [[b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}], a_l^{(\gamma)}]. \tag{4.2}$$

Используя тождество (B.2), перепишем двойной коммутатор под знаком суммы в виде

$$[[b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}], a_l^{(\gamma)}] = \{b_m^{(\alpha)}, \{a_l^{(\gamma)}, a_k^{\dagger(\beta)}\}\} - \\ - \{a_k^{\dagger(\beta)}, \{a_l^{(\gamma)}, b_m^{(\alpha)}\}\},$$

а тройную сумму представим следующим образом:

$$\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{\gamma} = \sum_{\alpha=\gamma\neq\beta} + \sum_{\alpha\neq\beta=\gamma} + \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}. \tag{4.3}$$

Учитывая соотношения (2.10) и (3.11), будем иметь следующие отличные от нуля члены:

$$\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{\gamma}[[b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}], a_l^{(\gamma)}] = \\ = 2(p-1)\delta_{lk}\, b_m + \sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\Big(\{b_m^{(\alpha)}, \{a_l^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}\}\} - \\ - \{a_k^{\dagger(\beta)}, \{a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\}\}\Big) + \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}\{b_m^{(\alpha)}, \{a_l^{(\gamma)}, a_k^{\dagger(\beta)}\}\}.$$

Второй вклад в правой части последнего выражения с помощью тождеств (B.2) и (B.1) можно представить как

$$\sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\Big(\{b_m^{(\alpha)}, \{a_l^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\beta)}\}\} - \{a_k^{\dagger(\beta)}, \{a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\}\}\Big) = \\ = -\sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\Big([[a_m^{\dagger(\beta)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\alpha)}] + [[a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}], a_k^{\dagger(\beta)}]\Big).$$

Он равен нулю в силу (2.10) и (3.9). Окончательно находим для (4.2)

$$[[b_m, a_k^{\dagger}], a_l] = 2(p-1)\delta_{lk} b_m + 2p\delta_{mk} b_l + \\ + \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}\{b_m^{(\alpha)}, \{a_l^{(\gamma)}, a_k^{\dagger(\beta)}\}\}. \tag{4.4}$$

Мы видим, что данное выражение воспроизводит (4.1) только в случае, когда $p=2$. В этом частном случае последний член в правой части (4.4) просто отсутствует, а числовые коэффициенты в остальных членах принимают правильные значения.

Трилинейное соотношение (3.2) выполняется автоматически в силу тождества Якоби. Тем не менее поучительно увидеть это непосредственно. В силу (3.9), справедливо равенство

$$[a_l, b_m] = \sum_{\alpha\neq\beta}[a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}]$$

и поэтому

$$[[a_l, b_m], a_k^{\dagger}] = \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{\gamma}[[a_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}], a_k^{\dagger(\gamma)}] = \\ = \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{\gamma}\Big(\{a_l^{(\alpha)}, \{a_k^{\dagger(\gamma)}, b_m^{(\beta)}\}\} - \\ - \{b_m^{(\beta)}, \{a_k^{\dagger(\gamma)}, a_l^{(\alpha)}\}\}\Big). \tag{4.5}$$

Тройную сумму в правой части (4.5) снова представим в виде разложения (4.3). Тогда с учетом коммутационных правил (3.11) и (2.10), выражение (4.5) принимает вид

$$[[a_l, b_m], a_k^{\dagger}] = -2(p-1)\delta_{kl} b_m + \\ + \sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\Big(\{a_l^{(\alpha)}, \{a_k^{\dagger(\beta)}, b_m^{(\beta)}\}\} - \{b_m^{(\beta)}, \{a_k^{\dagger(\beta)}, a_l^{(\alpha)}\}\}\Big) - \\ - \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}\{b_m^{(\beta)}, \{a_k^{\dagger(\gamma)}, a_l^{(\alpha)}\}\}.$$

Для второго вклада в правой части имеем цепочку равенств:

$$\sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\Big(\{a_l^{(\alpha)}, \{a_k^{\dagger(\beta)}, b_m^{(\beta)}\}\} - \{b_m^{(\beta)}, \{a_k^{\dagger(\beta)}, a_l^{(\alpha)}\}\}\Big) = \\ = -\sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\Big([[b_m^{(\beta)}, a_k^{\dagger(\beta)}], a_l^{(\alpha)}] + [[a_k^{\dagger(\beta)}, a_l^{(\alpha)}], b_m^{(\beta)}]\Big) = \\ = 2\delta_{mk}\sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}[\Omega, a_l^{(\alpha)}] = 2(p-1)\delta_{mk} b_l,$$

в силу которых вместо (4.5) будем иметь

$$[[a_l, b_m], a_k^{\dagger}] = -2(p-1)\delta_{kl} b_m - 2(p-1)\delta_{mk} b_l - \\ - \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}\{b_m^{(\beta)}, \{a_k^{\dagger(\gamma)}, a_l^{(\alpha)}\}\}.$$

Видно, что данное выражение воспроизводит трилинейное соотношение (3.2) только для $p=2$.

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ПАРАГРАССМАНОВЫХ ЧИСЕЛ

В этом разделе мы хотели бы включить в общую схему униквантования параграссмановы числа, которые обозначим через ξ_k, $k=1,\ldots,M$. Нашей задачей сейчас является определение коммутационных правил, включающих одновременно ξ_k и операторы a_k, b_m. В случае одного параферми-поля, например, ϕ_a, такие коммутационные правила были предложены в работе [16]:

$$\begin{aligned} &[a_k, [a_l, \xi_m]] = 0, \quad [a_k, [a_l^{\dagger}, \xi_m]] = 2\delta_{kl}\xi_m, \\ &[\xi_k, [\xi_l, a_m]] = 0, \quad [\xi_k, [\xi_l, \xi_m]] = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Для частного случая парастатистики $p=2$ вместо последнего соотношения в (5.1) мы можем использовать более простое выражение:

$$\xi_k\xi_l\xi_m + \xi_m\xi_l\xi_k = 0.$$

Остальные соотношения можно получить из (5.1) эрмитовым сопряжением. Считаем, что аналогичные правила коммутации имеют место и для второго ϕ_b-поля. Для параграссмановых чисел ξ_k также справедливо гриновское представление

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_k^{(\alpha)}.$$

Билинейные коммутационные соотношения для гриновских компонент $a_k^{(\alpha)}$, $b_m^{(\alpha)}$ и $\xi_l^{(\alpha)}$ были даны в работе [17]:

$$\begin{aligned} &\{a_k^{(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}\} = 0, \quad \{b_m^{(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}\} = 0, \\ &\{\xi_k^{(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}\} = 0, \quad [a_k^{(\alpha)}, \xi_l^{(\beta)}] = 0, \\ &[b_m^{(\alpha)}, \xi_l^{(\beta)}] = 0, \quad [\xi_k^{(\alpha)}, \xi_l^{(\beta)}] = 0, \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \tag{5.2}$$

включая их эрмитово сопряженные. Они обращают (5.1) в тождество.

Как уже было сказано выше, нас интересуют трилинейные соотношения, включающие одновременно операторы a_k, b_m и параграссмановы числа ξ_k. Естественно начать наше изучение со следующих выражений:

$$[b_m, [a_k^\dagger, \xi_l]], \quad [a_k, [b_m^\dagger, \xi_l]].$$

Однако предварительный анализ этих соотношений с использованием (3.8)–(3.11) и (5.2) показал, что двойные коммутаторы, в конечном итоге, приводятся к несколько запутанным выражениям, поэтому, опираясь на проведенный анализ, мы рассмотрим несколько иные трилинейные соотношения, а именно:

$$\{b_m, [a_k^\dagger, \xi_l]\}, \quad \{a_k, [b_m^\dagger, \xi_l]\}. \tag{5.3}$$

В терминах гриновских компонент с учетом (5.2) первое выражение здесь принимает вид

$$\{b_m, [a_k^\dagger, \xi_l]\} = \sum_\alpha \{b_m^{(\alpha)}, [a_k^{\dagger(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}]\} + \\ + \sum_{\alpha\neq\beta} \{b_m^{(\beta)}, [a_k^{\dagger(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}]\}. \tag{5.4}$$

Для первого члена в правой части с использованием (B.3) и правил (3.8), (5.2) имеем

$$\{b_m^{(\alpha)}, [a_k^{\dagger(\alpha)}, \xi_l^{(\alpha)}]\} = \{\xi_l^{(\alpha)}, [b_m^{(\alpha)}, a_k^{\dagger(\alpha)}]\} + \\ + [a_k^{\dagger(\alpha)}, \{\xi_l^{(\alpha)}, b_m^{(\alpha)}\}] = 2\delta_{mk}\{\xi_l^{(\alpha)}, \Omega\}.$$

Нетрудно видеть с использованием того же тождества, что второй член в (5.4) обращается в нуль и, таким образом, вместо (5.4) получим

$$\{b_m, [a_k^\dagger, \xi_l]\} = 2\delta_{mk}\{\xi_l, \Omega\}. \tag{5.5}$$

Аналогичные рассуждения для второго выражения в (5.3) приводят к

$$\{a_k, [b_m^\dagger, \xi_l]\} = -2\delta_{mk}\{\xi_l, \Omega\}. \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.5), (5.6) и тождества (B.3) вытекают следующие равенства:

$$[\xi_l, \{b_m, a_k^\dagger\}] = 0, \quad [\xi_l, \{a_k, b_m^\dagger\}] = 0.$$

Необходимо отметить, что соотношения (5.5) и (5.6) являются непосредственным следствием коммутационных правил (3.8)–(3.11) и (5.2) для гриновских компонент и не содержат никакой новой информации. Однако здесь мы можем сделать шаг вперед и постулировать следующее условие:

$$\{\xi_l, \Omega\} = \Lambda \xi_l, \tag{5.7}$$

где Λ — некоторая константа, удовлетворяющая (в силу (3.14)) условию

$$\Lambda = -\Lambda^*,$$

а звездочка означает комплексное сопряжение. Таким образом, вместо (5.5) и (5.6), сейчас имеем искомые трилинейные соотношения

$$\begin{aligned} &\{b_m, [a_k^\dagger, \xi_l]\} = 2\Lambda\delta_{mk}\xi_l, \\ &\{a_k, [b_m^\dagger, \xi_l]\} = 2\Lambda^*\delta_{mk}\xi_l. \end{aligned} \tag{5.8}$$

В работе [2] Говорков ввел в рассмотрение важный оператор $\tilde{N}$:

$$\widetilde{N} = \frac{i}{2(2M+1)} \sum_{k=1}^{M} \left([a_k^\dagger, b_k] + \lambda\right), \tag{5.9}$$

где λ — вещественная константа, отличная от нуля[3)]. В терминах оператора ζ_0 (1.8) (с учетом (3.12)) выражение (5.9) можно также представить в виде

$$\widetilde{N} = \frac{1}{2}\,\zeta_0 + \frac{iM}{2(2M+1)}\,\lambda. \tag{5.10}$$

Оператор $\tilde{N}$ обладает следующими свойствами:

$$[i\widetilde{N}, a_k] = b_k, \quad [i\widetilde{N}, b_k] = -a_k. \tag{5.11}$$

Данные соотношения в точности совпадают с соотношениями (3.10) для гриновских компонент $a_k^{(\alpha)}$ и $b_k^{(\alpha)}$. Тем не менее оператор Ω в (3.10) нельзя буквально отождествить с оператором $i\widetilde{N}$, так как это

3) Отметим, что ни в работе [2], ни в обзоре [4] число λ не было фиксировано.

приводит к противоречиям в последующем рассмотрении. Можно увидеть определенную нетривиальную связь между $i\widetilde{N}$ и Ω уже на простом уровне, если найти соотношение вида (5.7) для оператора $i\widetilde{N}$. Для этой цели рассмотрим антикоммутатор

$$\left\{\xi_l, \frac{1}{2}\,\zeta_0\right\} = \frac{i}{2(2M+1)} \sum_{k=1}^{M} \{\xi_l, [a_k^\dagger, b_k]\} =$$
$$= \frac{i}{2(2M+1)} \sum_{k=1}^{M} \Big(\{b_k, [\xi_l, a_k^\dagger]\} + [a_k^\dagger, \{b_k, \xi_l\}]\Big).$$

Первый член под знаком суммы определяется первым соотношением в (5.8), а второй член, как будет показано в следующем разделе, равен

$$[a_k^\dagger, \{b_k, \xi_l\}] = 2\Lambda^* \xi_l.$$

С учетом сказанного выше имеем

$$\left\{\xi_l, \frac{1}{2}\,\zeta_0\right\} = -\frac{iM}{2M+1}\,(\Lambda - \Lambda^*)\xi_l$$

и тогда из выражения (5.10) следует

$$\{\xi_l, i\widetilde{N}\} = \tilde{\Lambda}\xi_l, \qquad (5.12)$$

где

$$\tilde{\Lambda} = \frac{M}{2M+1}\,(2\Lambda - \lambda). \qquad (5.13)$$

Получим явные выражения для коммутаторов между оператором $i\widetilde{N}$ и гриновскими компонентами $a_k^{(\alpha)}$ и $b_k^{(\alpha)}$. Для этого подставим (3.13) для $p = 2$ в правую часть (5.9), тогда получим

$$i\widetilde{N} = \frac{2M}{2M+1}\,\Omega - \frac{1}{2(2M+1)} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{M} \left([a_k^{\dagger(1)}, b_k^{(2)}] + [a_k^{\dagger(2)}, b_k^{(1)}]\right) -$$
$$- \frac{M}{2(2M+1)}\,\lambda. \qquad (5.14)$$

Используя соотношения (3.10) и равенство (3.16), находим

$$\begin{aligned} [i\widetilde{N}, a_k^{(1)}] &= \frac{1}{2M+1}\left(2Mb_k^{(1)} + b_k^{(2)}\right), \\ [i\widetilde{N}, a_k^{(2)}] &= \frac{1}{2M+1}\left(2Mb_k^{(2)} + b_k^{(1)}\right). \end{aligned} \qquad (5.15)$$

Аналогичные рассуждения для коммутаторов с гриновскими компонентами $b_m^{(\alpha)}$ с использованием (3.10) и (3.17) приводят нас к

$$\begin{aligned} [i\widetilde{N}, b_m^{(1)}] &= -\frac{1}{2M+1}\left(2Ma_m^{(1)} + a_m^{(2)}\right), \\ [i\widetilde{N}, b_m^{(2)}] &= -\frac{1}{2M+1}\left(2Ma_m^{(2)} + a_m^{(1)}\right). \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Несмотря на несколько необычный вид коммутационных соотношений (5.15) и (5.16), они правильно воспроизводят (5.11), в чем легко убедиться, просто сложив соотношения в (5.15) и в (5.16) между собой, и учесть, что

$$a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)}, \quad b_m = b_m^{(1)} + b_m^{(2)}.$$

6. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$

Определим ряд коммутационных соотношений между оператором $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$, операторами a_k, b_m и параграссмановыми числами ξ_l. Здесь α — произвольное вещественное число. Для этой цели прежде всего заметим, что для оператора a_k справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}} a_k \mathrm{e}^{-\alpha i\widetilde{N}} = a_k + \alpha[i\widetilde{N}, a_k] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\,\alpha^2[i\widetilde{N}, [i\widetilde{N}, a_k]] + \dots =$$
$$= a_k\left(1 - \frac{1}{2!}\,\alpha^2 + \frac{1}{4!}\,\alpha^4 - \dots\right) + b_k\left(\alpha - \frac{1}{3!}\,\alpha^3 + \dots\right) \equiv$$
$$\equiv a_k\cos\alpha + b_k\sin\alpha. \qquad (6.1)$$

При выводе данного соотношения учтено тождество (B.7) и соотношения (5.11). Аналогичное выражение можно получить и для оператора b_m. Используя (6.1), выпишем основные соотношения, определяющие правила перестановки между $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$ и a_k, b_m:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}} a_k &= (a_k\cos\alpha + b_k\sin\alpha)\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}, \\ \mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}} b_m &= (b_m\cos\alpha - a_m\sin\alpha)\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Здесь нас интересуют, главным образом, два важных частных случая данных формул:

1) в случае, когда $\alpha = \pm\pi$, имеем

$$\{\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}, a_k\} = 0, \quad \{\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}, b_m\} = 0; \qquad (6.3)$$

2) в случае, когда $\alpha = \pm\pi/2$, имеем

$$\mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}} a_k = \pm b_k \mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}}, \qquad (6.4)$$

$$\mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}} b_m = \mp a_m \mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}}. \qquad (6.5)$$

Стоит особо отметить, что соотношения (6.4) и (6.5) говорят нам о возможности двух эквивалентных «отображений» оператора b_k в оператор a_k:

$$\begin{aligned} a_k &= \pm\mathrm{e}^{\mp\pi/2 i\widetilde{N}} b_k \mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}}, \\ a_k &= \mp\mathrm{e}^{\pm\pi/2 i\widetilde{N}} b_k \mathrm{e}^{\mp\pi/2 i\widetilde{N}}. \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Данное обстоятельство, в частности, удобно при анализе конкретных выражений. Антикоммутационные соотношения (6.3) совпадают с аналогичными соотношениями для оператора $(-1)^N = \mathrm{e}^{\pm\pi i N}$:

$$\{\mathrm{e}^{\pm\pi i N}, a_k\} = 0, \quad \{\mathrm{e}^{\pm\pi i N}, b_m\} = 0, \qquad (6.7)$$

где N — оператор числа частиц (1.7). Соотношения (6.7) справедливы в силу

$$\begin{aligned} &[a_k, N] = a_k, \quad [a_k^\dagger, N] = -a_k^\dagger, \\ &[b_m, N] = b_m, \quad [b_m^\dagger, N] = -b_m^\dagger. \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Что касается соотношений (6.4) и (6.5), то здесь можно упомянуть любопытную формальную связь с работами Швингера [18, 19] (см. также [20]), посвященными построению и анализу «базисов унитарных операторов». Соотношение из [18, 19]

$$\widehat{X}(\alpha)\widehat{U} = \widehat{U}\widehat{Y}(\alpha)$$

будет аналогом (6.4), (6.5). Здесь $\widehat{X}(\alpha)$ и $\widehat{Y}(\alpha)$ являются двумя ортонормальными операторными базисами в заданном пространстве, связанными между собой унитарным оператором $\widehat{U} = (\widehat{U}_{ab})$:

$$\widehat{U}_{ab} = \sum_{k=1}^{N} |a_k\rangle\langle b_k|,$$

где $|a_k\rangle$, $|b_k\rangle$ и их сопряженные являются двумя упорядоченными множествами векторов. В нашем случае оператор $\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}$ играет роль оператора $\widehat{U}$. Можно указать на ряд других совпадений между двумя формализмами, но мы не будем далее углубляться в анализ данной связи.

Введем в рассмотрение параграссмановы числа ξ_k. Поскольку сейчас мы имеем антикоммутационное соотношение (5.7) вместо (6.1), нам необходимо рассмотреть следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\alpha\Omega}\xi_k\mathrm{e}^{\alpha\Omega} &= \xi_k + \alpha\{\Omega, \xi_k\} + \frac{1}{2!}\alpha^2\{\Omega, \{\Omega, \xi_k\}\} + \ldots = \\ &= \xi_k\Big(1 + \Lambda\alpha + \frac{1}{2!}(\Lambda\alpha)^2 + \ldots\Big) \equiv \xi_k\mathrm{e}^{\alpha\Lambda}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тождество (B.8). Таким образом, имеем следующее коммутационное правило между операторм $\mathrm{e}^{\alpha\Omega}$ и параграссмановыми числами ξ_k:

$$\mathrm{e}^{\alpha\Omega}\xi_k = \xi_k\mathrm{e}^{\alpha\Lambda}\mathrm{e}^{-\alpha\Omega}.$$

Аналогично для оператора $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$ с учетом (5.12) получаем

$$\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}\xi_k = \xi_k\mathrm{e}^{\alpha\tilde{\Lambda}}\mathrm{e}^{-\alpha i\widetilde{N}}. \qquad (6.9)$$

На основании перестановочных соотношений (6.4), (6.5) и (6.9) можно поставить вопрос: какой вид примут различные трилинейные соотношения при отображении (6.6). Ответ является несколько неожиданным: не во всех случаях они сводятся к простой замене $a_k \rightleftharpoons b_k$.

Рассмотрим отображение наиболее простого трилинейного соотношения из (5.1), включающего один оператор a_m:

$$[\xi_k, [\xi_l, a_m]] = 0. \qquad (6.10)$$

Вначале рассмотрим коммутатор $[\xi_l, a_m]$. Используя (6.6) и (6.9), приходим к следующему выражению:

$$[\xi_l, a_m] = \mp\mathrm{e}^{\pm\pi/2\tilde{\Lambda}}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}\{\xi_l, b_m\}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}. \qquad (6.11)$$

Обратим внимание на то, что в правой части возникает *антикоммутатор*. Подстановка (6.11) в (6.10) приводит к

$$\xi_k\{\xi_l, b_m\} - \mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}}\{\xi_l, b_m\}\xi_k\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}} = 0. \qquad (6.12)$$

Далее, используя соотношения (6.3) и (6.9), для последнего члена в (6.12) имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}}\{\xi_l, b_m\}\xi_k\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}} = \\ &\quad = -\mathrm{e}^{\mp\pi\tilde{\Lambda}}\{\xi_l, b_m\}\Big(\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\xi_k\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\Big) = -\{\xi_l, b_m\} \end{aligned}$$

и таким образом находим вместо (6.12)

$$\{\xi_k, \{\xi_l, b_m\}\} = 0. \qquad (6.13)$$

Вопреки ожиданию, при отображении (6.6) соотношение (6.10) не переходит в аналогичное соотношение только с заменой $a_m \to b_m$. Мы видим, что дополнительно к этой замене все коммутаторы меняются на антикоммутаторы. Данное обстоятельство может иметь место только для парастатистики порядка 2.

Мы можем непосредственно проверить справедливость трилинейного соотношения (6.13), используя анзац Грина. Действительно, в силу коммутационных правил (5.2) имеет место равенство

$$\{\xi_l, b_m\} = \sum_{\alpha\neq\beta}\{\xi_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\},$$

тогда, используя разбиение тройной суммы (4.3), имеем

$$\begin{aligned} \{\xi_k, \{\xi_l, b_m\}\} &= \sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\{\xi_k^{(\alpha)}, \{\xi_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\}\} + \\ &+ \sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\{\xi_k^{(\beta)}, \{\xi_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\}\} + \\ &+ \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}\{\xi_k^{(\gamma)}, \{\xi_l^{(\alpha)}, b_m^{(\beta)}\}\}. \end{aligned} \qquad (6.14)$$

С учетом тождества (B.2) и соотношений (5.2), найдем для первых двух членов в правой части (6.14)

$$\sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\{\xi_k^{(\alpha)},\{\xi_l^{(\alpha)},b_m^{(\beta)}\}\} = \\ = \sum_{\alpha=\gamma\neq\beta}\Big(\{b_m^{(\beta)},\{\xi_k^{(\alpha)},\xi_l^{(\alpha)}\}\}+[\xi_l^{(\alpha)},[b_m^{(\beta)},\xi_k^{(\alpha)}]]\Big)=0,$$

$$\sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\{\xi_k^{(\beta)},\{b_m^{(\beta)},\xi_l^{(\alpha)}\}\} = \\ = \sum_{\alpha\neq\beta=\gamma}\Big([b_m^{(\beta)},[\xi_l^{(\alpha)},\xi_k^{(\beta)}]]+\{\xi_l^{(\alpha)},\{b_m^{(\beta)},\xi_k^{(\beta)}\}\}\Big)=0.$$

Третий член (6.14) отсутствует для $p=2$.

Рассмотрим отображение более нетривиальных трилинейных соотношений (5.8). Для конкретности рассмотрим второе из них:

$$\{a_k,[\xi_l,b_m^\dagger]\}=2\Lambda\delta_{mk}\xi_l. \tag{6.15}$$

Используя вторую формулу в (6.6), имеем исходное для анализа выражение

$$\{a_k,[\xi_l,b_m^\dagger]\}=\mp\Big(\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}b_k\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}[\xi_l,b_m^\dagger]+ \\ +[\xi_l,b_m^\dagger]\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}b_k\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}\Big).$$

Для коммутатора в правой части используем выражение, аналогичное (6.11):

$$[\xi_l,b_m^\dagger]=\pm\mathrm{e}^{\pm\pi/2\tilde{\Lambda}}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}\{\xi_l,a_m^\dagger\}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}.$$

Умножим обе части выражения (6.15) на оператор $\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}$. Тогда с учетом сказанного выше будем иметь

$$\mathrm{e}^{\mp\pi/2\tilde{\Lambda}}\Big(\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}b_k\{\xi_l,a_m^\dagger\}\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\Big)-\mathrm{e}^{\pm\pi/2\tilde{\Lambda}}\{\xi_l,a_m^\dagger\}b_k= \\ =2\Lambda\delta_{mk}\Big(\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}\xi_k\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}\Big).$$

Выражение в круглых скобках в левой части равно $\mathrm{e}^{\pm\pi\tilde{\Lambda}}b_k\{\xi_l,a_m^\dagger\}$, а в правой — равно $\mathrm{e}^{\pm\pi/2\tilde{\Lambda}}\xi_k$. Сокращая на общий множитель $\mathrm{e}^{\pm\pi/2\tilde{\Lambda}}$ в левой и правой частях, окончательно находим

$$[b_k,\{\xi_l,a_m^\dagger\}]=2\Lambda\delta_{mk}\xi_l. \tag{6.16}$$

Здесь мы снова наблюдаем, что при отображении (6.6) в трилинейном соотношении (6.15) происходит не только замена операторов $a\rightleftharpoons b$, но и коммутатор меняется на антикоммутатор и наоборот. Аналогично предыдущему случаю (6.13), можно проверить (6.16), используя представление Грина для операторов и параграссмановых чисел.

Рассмотрим отображение трилинейного соотношения из (5.1), содержащего операторы a_k и $a_l^\dagger$:

$$[a_k,[a_l^\dagger,\xi_m]]=2\delta_{kl}\xi_m.$$

Рассуждения, полностью аналогичные предыдущему случаю, приводят к следующему соотношению:

$$\{b_k,\{b_l^\dagger,\xi_m\}\}=2\delta_{kl}\xi_m, \tag{6.17}$$

в справедливости которого можно убедиться, используя анзац Грина.

Особенностью всех рассмотренных выше примеров является то, что параграссмановы числа ξ_k всегда входят в коммутатор или антикоммутатор вместе с оператором a_k или b_m (или с их эрмитовым сопряжением). Рассмотрим отображение соотношений, где данное обстоятельство не имеет места, например, отображение соотношений вида

$$\begin{aligned}&\{\xi_l,[b_m^\dagger,a_k]\}=2\big(\Lambda-\Lambda^*\big)\delta_{mk}\xi_l,\\&[\xi_l,\{a_k^\dagger,b_m\}]=0.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Ясно, что при отображении (6.6) эти два соотношения никак не могут перейти друг в друга, так как правые части у них различны. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят нас к

$$\begin{aligned}&\{\xi_l,[a_m^\dagger,b_k]\}=2\big(\Lambda^*-\Lambda\big)\delta_{mk}\xi_l,\\&[\xi_l,\{b_k^\dagger,a_m\}]=0,\end{aligned}$$

т. е. структура трилинейных соотношений остается неизменной, и в данном случае они просто представляют эрмитово сопряжение (6.18). То же самое справедливо и для трилинейных соотношений, которые вообще не содержат переменную ξ_k, например,

$$[[a_k^\dagger,a_l],b_m]=-2\delta_{km}b_l.$$

При отображении (6.6) это соотношение переходит в

$$[[b_k^\dagger,b_l],a_m]=-2\delta_{km}a_l.$$

И здесь структура полностью сохраняется. Таким образом все трилинейные коммутационные соотношения распадаются на два множества, в одном из которых соотношения меняют свою структуру при отображении (6.6), а в другом — сохраняют ее. Все зависит от того, как параграссманова переменная ξ_k входит в конкретное трилинейное соотношение. Ясно, что все приведенные выше рассуждения справедливы и при отображении, обратном к (6.6), т. е.

$$\begin{aligned}&b_m=\pm\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}a_m\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}},\\&b_m=\mp\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}a_m\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Необходимо только в исходных формулах (6.10), (6.15), ... заменить операторы a_k на b_k (и наоборот) и то же самое сделать в конечных формулах (6.13), (6.16), ...

7. ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРОВ Ω И $i\widetilde{N}$ НА ВАКУУМНОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим вопрос о действии операторов Ω и $\tilde{N}$ на вакуумное состояние $|0\rangle$. Для оператора $\tilde{N}$ (5.10) имеем

$$\widetilde{N}|0\rangle = \frac{1}{2}\,\zeta_0|0\rangle + \frac{iM}{2(2M+1)}\,\lambda|0\rangle. \tag{7.1}$$

Далее в силу определения оператора ζ_0 (1.8) с учетом (2.13) находим

$$\zeta_0|0\rangle = -\frac{i}{2M+1}\sum_{k=1}^{M} b_k a_k^\dagger|0\rangle. \tag{7.2}$$

Если использовать дополнительное условие Гринберга и Мессии (2.15), то получим, что

$$\zeta_0|0\rangle = 0,$$

и поэтому из (7.1) следует

$$\widetilde{N}|0\rangle = \lambda\,\frac{iM}{2(2M+1)}\,|0\rangle.$$

Таким образом, если бы мы захотели потребовать выполнения условия

$$\widetilde{N}|0\rangle = 0 \tag{7.3}$$

по аналогии с подобным условием для оператора числа частиц

$$N|0\rangle = 0,$$

то пришли бы к тривиальному требованию: $\lambda = 0$. Однако последнее условие приводит, фактически, к вырождению рассматриваемой теории. Единственной возможностью избежать этого является отказ от условий (2.15).

Для того чтобы понять, как необходимо изменить (2.15), рассмотрим более детально вывод условий (2.15), как он был представлен в [15]. Только теперь будем исходить из трилинейных соотношений Говоркова. Первым шагом подействуем соотношением (4.1) на вакуумное состояние

$$a_l(b_m a_k^\dagger)|0\rangle = 0 \quad \text{для всех}\ \ k,\, l,\, m.$$

Условие единственности вакуума $|0\rangle$ влечет

$$b_m a_k^\dagger|0\rangle = c_{mk}|0\rangle, \tag{7.4}$$

где c_{mk} — некоторые числа. Заметим, что на этой стадии рассуждений дополнительный член $4\delta_{km}b_l$ в правой части (4.1) не играет никакой роли. Далее рассмотрим коммутатор вида

$$[[b_l, b_m^\dagger], b_m a_k^\dagger] = [[b_l, b_m^\dagger], b_m]a_k^\dagger + b_m[[b_l, b_m^\dagger], a_k^\dagger]$$

(нет суммирования!).

Используя трилинейные соотношения (2.1) и (3.3) с заменой a на b (и обратно), находим

$$[[b_l, b_m^\dagger], b_m a_k^\dagger] = 2\delta_{mm} b_l a_k^\dagger - 2\delta_{kl} b_m a_m^\dagger.$$

Именно здесь, по сравнению со случаем Гринберга и Мессии, в правой части появляется новый член. Действуя на вакуум последним выражением и используя уравнения (2.14) и (7.4), получим

$$0 = 2b_l a_k^\dagger|0\rangle - 2\delta_{kl} b_m a_m^\dagger|0\rangle = 2c_{lk}|0\rangle - 2\delta_{lk}c_{mm}|0\rangle$$

или

$$c_{lk} = \delta_{lk}c_{mm}.$$

Полагаем

$$c_{mm} \equiv c \quad \text{для всех}\ m,$$

где c — произвольная, вообще говоря, комплексная константа. Таким образом, в рамках схемы унитарного квантования мы приходим к следующим дополнительным условиям, вместо (2.15):

$$\begin{aligned} b_m a_k^\dagger|0\rangle &= c\,\delta_{mk}|0\rangle,\\ a_k b_m^\dagger|0\rangle &= c^*\delta_{mk}|0\rangle. \end{aligned} \tag{7.5}$$

В этом случае из (7.2) следует

$$\zeta_0|0\rangle = -c\,\frac{iM}{2M+1}\,|0\rangle \tag{7.6}$$

и поэтому

$$\widetilde{N}|0\rangle = -(c-\lambda)\,\frac{iM}{2(2M+1)}\,|0\rangle. \tag{7.7}$$

Далее, если подействовать на вакуум соотношением (5.12), то с учетом правила [17]

$$\xi_l|0\rangle = |0\rangle\xi_l$$

и уравнения (7.7) получим условие, связывающее константы Λ и c:

$$(c-\lambda)\,\frac{M}{2M+1} = (2\Lambda-\lambda)\,\frac{M}{2M+1}$$

или

$$\Lambda = \frac{1}{2}\,c. \tag{7.8}$$

Как прямое следствие (7.8) и (5.7), находим правило действия оператора Ω на вакуум:

$$\Omega|0\rangle = \frac{1}{4}\, c|0\rangle.$$

Таким образом, если бы мы захотели потребовать выполнения условия (7.3), то уравнения (7.7) и (7.8) привели бы нас к однозначной фиксации постоянных Λ и c в терминах параметра λ:

$$c = \lambda, \quad \Lambda = \frac{1}{2}\,\lambda. \qquad (7.9)$$

Это единственный параметр, который остается неопределенным в рассматриваемой теории. Отметим, что в случае (7.9) постоянная $\tilde{\Lambda}$ обращается в нуль и вместо (5.12) будем иметь

$$\{\xi_l, \widetilde{N}\} = 0.$$

8. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В работе [16] были построены и детально изучены когерентные состояния параферми-операторов на основе параграссмановой алгебры. Было определено когерентное состояние системы параферми-осцилляторов a_k в следующем виде:

$$|(\xi)_p\,; a\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}[\xi_l, a_l^{\dagger}]\right)|0\rangle, \qquad (8.1)$$

при этом

$$a_k|(\xi)_p\,; a\rangle = \xi_k|(\xi)_p\,; a\rangle. \qquad (8.2)$$

В обозначение когерентного состояния $|(\xi)_p\rangle$, принятого в [16], мы ввели дополнительный символ a с целью подчеркнуть, что данное состояние связано с полем ϕ_a. Формула (8.2) является следствием операторного соотношения

$$a_k \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_l[\xi_l, a_l^{\dagger}]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_l[\xi_l, a_l^{\dagger}]\right\} a_k + \\ + \xi_k \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_l[\xi_l, a_l^{\dagger}]\right\}, \qquad (8.3)$$

которое легко получить, используя тождество (B.7) и трилинейные соотношения (5.1). Здесь только отметим, что простой вид второго члена в правой части (8.3) обусловлен точным обрыванием ряда

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, a_l^{\dagger}]\right\} a_k \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_{l'}, a_{l'}^{\dagger}]\right\} = \\ = a_k + \left(-\frac{1}{2}\right)[[\xi_l, a_l^{\dagger}], a_k] + \\ + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2[[\xi_l, a_l^{\dagger}], [[\xi_{l'}, a_{l'}^{\dagger}], a_k]] + \ldots = a_k - \xi_k$$

на втором члене разложения.

Аналогично можно определить когерентное состояние для системы параферми-осцилляторов b_k:

$$|(\xi)_p\,; b\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right)|0\rangle, \qquad (8.4)$$

так что

$$b_m|(\xi)_p\,; b\rangle = \xi_m|(\xi)_p\,; b\rangle. \qquad (8.5)$$

В общем случае когерентное состояние (8.4) для b-операторов никогда не будет когерентным состоянием для a-операторов. Однако для парастатистики порядка 2 в рамках уникнвантования ситуация несколько иная. Действительно, рассмотрим следующее операторное тождество:

$$a_k \exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} - \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} a_k \equiv \\ \equiv \left(a_k - \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} a_k \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_{l'}, b_{l'}^{\dagger}]\right\}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_{l''}, b_{l''}^{\dagger}]\right\}. \qquad (8.6)$$

Здесь и далее для простоты записи мы используем обычное соглашение о суммировании по двум одинаковым индексам. В силу тождества (B.8) и соотношений (5.8) будем иметь

$$\exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} a_k \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_{l'}, b_{l'}^{\dagger}]\right\} = \\ = a_k + \frac{1}{2}\big\{[\xi_l, b_l^{\dagger}], a_k\big\} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \\ \times \big\{[\xi_l, b_l^{\dagger}], \big\{[\xi_{l'}, b_{l'}^{\dagger}], a_k\big\}\big\} + \ldots = \\ = a_k + \Lambda\xi_k + \frac{1}{2!}\Lambda\xi_k[\xi_l, b_l^{\dagger}] + \ldots \qquad (8.7)$$

и таким образом из (8.6) следует операторное равенство вида

$$a_k \exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\} a_k - \\ - \Lambda\xi_k\left(\sum_s \frac{1}{(s+1)!}\,[\xi_m, b_m^{\dagger}]^s\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, b_l^{\dagger}]\right\}. \qquad (8.8)$$

В отличие от (8.3), в первом члене в правой части (8.8) в экспоненциальной функции изменился знак. Однако это не играет никакой роли, так как при действии (8.8) на вакуум этот член обращается в нуль. Более серьезные изменения произошли во втором члене, по сравнению с (8.3) он приобрел дополнительный множитель

$$\Lambda \sum_s \frac{1}{(s+1)!}\,[\xi_m, b_m^\dagger]^s = \\ = \Lambda\left(1 + \frac{1}{2!}\,[\xi_m, b_m^\dagger] + \frac{1}{3!}\,[\xi_m, b_m^\dagger]^2 + \ldots\right). \quad (8.9)$$

Данное обстоятельство связано с тем, что ряд в (8.7) не обрывается точно на втором члене $\Lambda\xi_k$, как это имело место при выводе (8.3). Единственным положительным моментом здесь является то, что ряд (8.9) является конечным. В частности, для наиболее важного с физической точки зрения случая, когда $M = 2$ (и $p = 2$), этот ряд содержит только члены, выписанные в (8.9). Действуя операторным соотношением (8.8) на вакуум, находим далее:

$$a_k|(\xi)_2\,;b\rangle = \\ = \Lambda\xi_k\left(\sum_s \frac{1}{(s+1)!}\,[\xi_m, b_m^\dagger]^s\right)|(\xi)_2\,;b\rangle. \quad (8.10)$$

Если ввести сопряженное когерентное состояние для ϕ_b-поля

$$\langle(\bar{\xi}\,')_2; b| \equiv \langle 0|\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}[\bar{\xi}_l', b_l]\right),$$

то для частного случая $M = 2$ можно выписать матричный элемент оператора a_k в базисе когерентных состояний для b-операторов:

$$\langle(\bar{\xi}\,')_2; b|\,a_k|(\xi)_2\,;b\rangle = \\ = -\Lambda\left(1 + \frac{1}{2!}\,[\xi_l, \bar{\xi}_l'] + \frac{1}{3!}\,[\xi_l, \bar{\xi}_l']^{\,2}\right)\langle(\bar{\xi}\,')_2; b|(\xi)_2\,;b\rangle,$$

где функция перекрытия имеет стандартный вид [16]

$$\langle(\bar{\xi}\,')_2; b|(\xi)_2\,;b\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}[\bar{\xi}_l', \xi_l]\right\}. \quad (8.11)$$

Сложность выражения в правой части (8.10) неизбежна в рассматриваемом подходе. В конечном счете это является следствием «впутывания» когерентного состояния с противоположным знаком параграссмановой переменной ξ_k. Действительно, если подействовать оператором $[\xi_l, b_l^\dagger]$ на (8.10), то будем иметь

$$[\xi_l, b_l^\dagger]a_k|(\xi)_2\,;b\rangle = \Lambda\xi_k\Big(|(\xi)_2\,;b\rangle + |(-\xi)_2\,;b\rangle\Big).$$

В силу (5.8) последнее выражение можно также представить как

$$a_k[\xi_l, b_l^\dagger]\,|(\xi)_2\,;b\rangle = \Lambda\xi_k\Big(|(\xi)_2\,;b\rangle - |(-\xi)_2\,;b\rangle\Big)$$

(напомним, что по двойным индексам подразумевается суммирование). В свою очередь, состояние $|(-\xi)_2\,;b\rangle$ может быть представлено как результат действия на исходное когерентное состояние $|(\xi)_2\,;b\rangle$ парафермионного оператора так называемой G-четности $(-1)^N$ с оператором числа частиц (1.7), т. е.

$$(-1)^N|(\xi)_2\,;b\rangle = |(-\xi)_2\,;b\rangle.$$

Отметим, что в рамках обычной ферми-статистики такие состояния рассматривались в работе [21] в контексте построения континуального интеграла по траекториям для мнимой части эффективного действия, т. е. фазы фермионного функционального детерминанта. Также интересно отметить, что G-оператор входит в так называемую деформированную алгебру Гейзенберга (осциллятор Калоджеро–Васильева) [22–24], включающую оператор отражения $R = (-1)^N$ и параметр деформации $\nu \in \mathbb{R}$. В статье [25] было показано, что эта алгебра, состоящая из одной моды, имеет конечномерные представления некоторой деформированной парафермионной алгебры, которая при параметре деформации $\nu = -3$ приводится к стандартной парафермионной алгебре порядка 2. Это может служить указанием на то, что существует определенная связь между унитарным квантованием Говоркова и деформированной алгеброй Гейзенберга.

В разд. 6 были проанализированы отображения различных трилинейных коммутационных соотношений. Здесь мы бы хотели рассмотреть задачу об отображении когерентных состояний (8.1) и (8.4). Возникает интересный вопрос: связаны ли когерентные состояния между собой преобразованием вида (6.6) (или (6.19)). Для конкретности, в качестве исходного возьмем выражение (8.1), а в качестве преобразования, связывающего операторы a_k и b_k, выберем

$$a_k = -\mathrm{e}^{\pi/2i\widetilde{N}}b_k\mathrm{e}^{-\pi/2i\widetilde{N}}. \quad (8.12)$$

Окончательное выражение будет иметь простой вид, однако вывод его оказывается несколько громоздким.

С учетом (8.12) формула (8.2) может быть представлена в виде (для $p = 2$)

$$-\exp\left\{\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}b_k\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, a_l^\dagger]\right\}|0\rangle = \xi_k\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l, a_l^\dagger]\right\}|0\rangle.$$

Подействуем слева оператором $\mathrm{e}^{-\pi/2i\widetilde{N}}$. Далее в левую часть перед вакуумным состоянием $|0\rangle$ вставим единичный оператор

$$I \equiv \mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}.$$

Кроме того, вставляем единичный оператор в правую часть между ξ_k и экспоненциальной функцией, тогда получим

$$b_k\left(\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l,a_l^\dagger]\right\}\exp\left\{\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\right)\times \\ \times\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}|0\rangle = -\left(\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\xi_k\times \\ \times\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\right)\left(\exp\left\{\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l,a_l^\dagger]\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\right)\exp\left\{\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}|0\rangle. \quad (8.13)$$

Используя операторное тождество (B.9), находим

$$\exp\left\{\pm\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_l,a_l^\dagger]\right\}\exp\left\{\mp\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right\} = \\ = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\exp\left(\pm\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)[\xi_l,a_l^\dagger]\times \\ \times\exp\left(\pm\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)\right)\exp\left(\mp\pi i\widetilde{N}\right)\right] = \\ = \exp\left(\pm\frac{1}{2}\exp\left(\pm\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\{\xi_l,b_l^\dagger\}\exp\left(\mp\pi i\widetilde{N}\right)\right).$$

На последнем шаге здесь было использовано соотношение (6.11). В силу (6.9) выражение в первых круглых скобках в правой части (8.13) равно

$$\exp\left(-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)\xi_k\exp\left(-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\xi_k.$$

С учетом всего сказанного выше вместо (8.13) находим

$$b_k\exp\left(-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\{\xi_l,b_l^\dagger\}\exp\left(\pi i\widetilde{N}\right)\right)\times \\ \times\exp\left(-\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)|0\rangle = -\exp\left(-\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\xi_k\times \\ \times\exp\left(\frac{1}{2}\exp\left(\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\{\xi_l,b_l^\dagger\}\exp\left(-\pi i\widetilde{N}\right)\right)\times \\ \times\exp\left(\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)|0\rangle. \quad (8.14)$$

В предыдущем разделе мы получили правило действия оператора $i\widetilde{N}$ на вакуумное состояние

$$i\widetilde{N}|0\rangle = \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}|0\rangle. \quad (8.15)$$

Используя это, найдем

$$\exp\left(\mp\frac{\pi\widetilde{N}}{2i}\right)|0\rangle = \exp\left(\mp\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)|0\rangle.$$

Нам осталось проанализировать экспоненциальный оператор

$$\exp\left(\mp\frac{1}{2}\exp\left(\mp\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\{\xi_l,b_l^\dagger\}\times \\ \times\exp\left(\pm\pi i\widetilde{N}\right)\right) \equiv \mathrm{e}^A. \quad (8.16)$$

Рассмотрим следующее разложение:

$$\mathrm{e}^A = \operatorname{ch}A + \operatorname{sh}A = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{A^{2s+1}}{(2s+1)!} + \\ + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{A^{2s}}{(2s)!}. \quad (8.17)$$

Сначала определим явный вид оператора A^2:

$$A^2 = \left(\mp\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{e}^{\mp\pi\tilde{\Lambda}}\{\xi_l,b_l^\dagger\}\left(\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\{\xi_{l'},b_{l'}^\dagger\}\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\right) = \\ = (-1)\left(\mp\frac{1}{2}\right)^2\{\xi_l,b_l^\dagger\}^2.$$

При выводе данного выражения учтено, что в силу (6.3) и (6.9), справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\{\xi_{l'},b_{l'}^\dagger\}\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}} = (-1)\mathrm{e}^{\pm\pi\tilde{\Lambda}}\{\xi_{l'},b_{l'}^\dagger\}.$$

Таким образом,

$$A^{2s} = (-1)^s\left(\mp\frac{1}{2}\right)^{2s}\{\xi_l,b_l^\dagger\}^{2s}$$

и

$$A^{2s+1} = (-1)^s\left(\mp\frac{1}{2}\right)^{2s+1}\{\xi_l,b_l^\dagger\}^{2s+1}\times \\ \times\exp\left(\mp\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\exp(\pm\pi i\widetilde{N}).$$

Подставляя полученные выражения в (8.17), находим, что экспоненциальный оператор (8.16) можно представить в следующем виде:

$$\exp\left(\mp\frac{1}{2}\exp\left(\mp\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\{\xi_l, b_l^\dagger\}\exp\left(\pm\pi i\widetilde{N}\right)\right) = \\ = \cos\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) \mp \sin\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) \times \\ \times \exp\left(\mp\frac{\pi\tilde{\Lambda}}{2}\right)\exp\left(\pm\pi i\widetilde{N}\right).$$

Здесь в правой части действие оператора $\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}$ на вакуум определяется формулой (8.15). С учетом сказанного выше, основное выражение (8.14) принимает вид

$$b_k\left[\cos\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)\right]|0\rangle = \\ = -\xi_k\left[\cos\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)\right]|0\rangle. \quad (8.18)$$

Следует специально отметить, что все экспоненциальные множители, содержащие постоянную $\tilde{\Lambda}$, в точности сократились. Это является косвенным доказательством правильности наших рассуждений. Несколько громоздкое выражение (8.18) обращается в тождество, если выполняется следующее соотношение[4)]:

$$b_k\exp\left(\pm\frac{1}{2}i\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle = \\ = (\pm i)\xi_k\exp\left(\pm\frac{1}{2}i\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle. \quad (8.19)$$

Таким образом, при отображении когерентного состояния (8.1) с (8.2) мы приходим не к когерентному состоянию (8.4) с (8.5), а к выражению (8.19). Это находится в полном соответствии с правилом, установленным в разд. 6: если параграссманово число ξ_k входит в коммутатор (антикоммутатор) вместе с оператором a_k или b_k (или их сопряжением), то при отображении (6.6) или (6.19) в дополнение к замене $a_k \rightleftharpoons b_k$ необходимо заменить коммутатор (антикоммутатор) на антикоммутатор (коммутатор). Ясно, что фактор $(\pm i)$ в (8.19) не играет здесь никакой роли.

Докажем теперь прямым вычислением соотношение (8.19). Опуская фактор $(\pm i)$ в левой и правой частях, перепишем его следующим образом:

$$b_k\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle = \\ = \xi_k\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle. \quad (8.20)$$

Для доказательства нам достаточно рассмотреть следующее выражение:

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)b_k\exp\left(-\frac{1}{2}\{\xi_{l'}, b_{l'}^\dagger\}\right) = \\ = b_k + \left(-\frac{1}{2}\right)\{\{\xi_l, b_l^\dagger\}, b_k\} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times \\ \times\{\{\xi_l, b_l^\dagger\}, \{\{\xi_{l'}, b_{l'}^\dagger\}, b_k\}\} + \ldots = \\ = b_k + \left(-\frac{1}{2}\right)2\xi_k + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 2\{\{\xi_l, b_l^\dagger\}, \xi_k\} + \ldots = \\ = b_k - \xi_k. \quad (8.21)$$

Здесь мы использовали трилинейные коммутационные правила (6.17) и (6.13), справедливые при $p = 2$. Ряд в (8.21) обрывается точно на втором члене разложения, как это имело место при вычислении операторного соотношения (8.3) для стандартного определения когерентного состояния (8.1), (8.2). Аналогом формулы (8.3) сейчас будет

$$b_k\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)b_k + \\ + \xi_k\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right).$$

Действуя на вакуумное состояние $|0\rangle$ предыдущим выражением, приходим к формуле (8.20). Далее можно показать, что вместо (8.8) будем иметь

$$a_k\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)a_k - \\ - \Lambda\xi_k\left(\sum_s\frac{(-1)^s}{(s+1)!}\{\xi_m, b_m^\dagger\}^s\right)\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right).$$

Наконец, можно получить функцию перекрытия для «когерентного» состояния $\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle$. Несколько громоздкие вычисления, которые мы здесь опускаем, приводят нас к

[4)] Соотношение вида (8.19), конечно, не является единственным. Например, соотношение

$$b_k\exp\left(\pm\frac{1}{2}i\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle = -\xi_k\exp\left(\mp\frac{1}{2}i\{\xi_l, b_l^\dagger\}\right)|0\rangle$$

также обращает (8.18) в тождество. Однако здесь в правой части изменился знак в экспоненте и отсутствует множитель i перед ξ_k. Кроме того, непосредственным вычислением можно убедиться, что это соотношение не выполняется, в отличие от (8.19).

$$\langle 0|\,\exp\left(\frac{1}{2}\{\bar{\xi}'_l, b^\dagger_l\}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\{\xi_{l'}, b^\dagger_{l'}\}\right)|0\rangle = \\ = \exp\left(\frac{1}{2}[\bar{\xi}'_l, \xi_l]\right).$$

Это следовало ожидать, так как правая часть в (8.11) инвариантна при отображении (6.6) (или (6.19)).

9. УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В работе [26] было показано, что трилинейные соотношения (2.1)–(2.3) для одного параферми-поля ϕ_a могут быть получены из требования, чтобы уравнения

$$[a_k, N] = a_k, \quad [a^\dagger_k, N] = -a^\dagger_k, \tag{9.1}$$

где N — оператор числа частиц (1.7), были инвариантны при унитарном преобразовании a_k-операторов:

$$a'_k = a_k + \sum_{l=1}^{M} \alpha_{kl}\, a_l.$$

Здесь инфинитезимальные параметры преобразования α_{kl} подчиняются условию

$$\alpha_{kl} + \alpha^*_{lk} = 0. \tag{9.2}$$

Возникает следующий вопрос: можно ли получить трилинейные соотношения Говоркова (3.1)–(3.3), содержащие операторы двух различных параферми-полей, ϕ_a и ϕ_b, как следствие требования инвариантности уравнений

$$[i\widetilde{N}, a_k] = b_k, \quad [i\widetilde{N}, b_k] = -a_k \tag{9.3}$$

при бесконечно малом линейном преобразовании операторов a_k и b_k? Для удобства дальнейших ссылок, выпишем еще раз явный вид оператора $i\widetilde{N}$:

$$i\widetilde{N} = \varrho \sum_{k=1}^{M}\left([a^\dagger_k, b_k] + \lambda\right), \quad \varrho \equiv -\frac{1}{2(2M+1)}. \tag{9.4}$$

Понятно, что искомое преобразование, оставляющее (9.3) инвариантными, должно «перемешивать» операторы a_k и b_k, т. е. иметь вид

$$\begin{aligned} a'_k &= a_k + \alpha_{kl}\, b_l, \qquad & a'^\dagger_k &= a^\dagger_k - \alpha_{lk}\, b^\dagger_l, \\ b'_k &= b_k + \beta_{kl}\, a_l, \qquad & b'^\dagger_k &= b^\dagger_k - \beta_{lk}\, a^\dagger_l. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Здесь для краткости записи мы опустили знаки суммирования и потребовали, чтобы инфинитезимальные параметры преобразования α_{kl} и β_{kl} удовлетворяли условию (9.2). Для коммутатора в (9.4) имеем

$$[a'^\dagger_k, b'_k] = [a^\dagger_k, b_k] - \alpha_{lk}\,[b^\dagger_l, b_k] + \beta_{kl}\,[a^\dagger_k, a_l].$$

Требование инвариантности для первого выражения в (9.3) приводит к следующему соотношению:

$$\alpha_{ms}[b_s, i\widetilde{N}] - \varrho\,\alpha_{lk}[a_m, [b^\dagger_l, b_k]] + \\ + \varrho\beta_{kl}[a_m, [a^\dagger_k, a_l]] = \beta_{ms}a_s.$$

Коммутатор в первом члене в левой части, в силу (9.3) равен $-a_s$, а двойной коммутатор в третьем члене, в силу (2.1) равен $2\delta_{mk}a_l$. Поэтому последнее выражение можно представить как

$$-\varrho\,\alpha_{lk}[a_m, [b^\dagger_l, b_k]] = \delta_{ml}\big(\beta_{lk}\,(1-2\varrho) + \alpha_{lk}\big)a_k.$$

Здесь мы сделаем еще один шаг: потребуем выполнения дополнительного условия, связывающего параметры α_{kl} и β_{kl} между собой

$$\alpha_{kl} = -\beta_{kl}.$$

Только в этом частном случае параметр ϱ в точности сокращается в левой и правой частях, и мы приходим к

$$[a_m, [b^\dagger_l, b_k]] = -2\delta_{ml}a_k.$$

Требование инвариантности второго соотношения в (9.3) приводит к аналогичному выражению:

$$[[a^\dagger_k, a_l], b_m] = -2\delta_{km}b_l. \tag{9.6}$$

Тем самым мы воспроизводим соотношение Говоркова (3.3).

Вид преобразования (9.5) более нагляден при использовании матричных обозначений:

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_M)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_M)^T$ (T — знак транспонирования) и $\alpha = (\alpha_{kl})$. Матрица

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $X^\dagger = X$ и, таким образом, принадлежит алгебре унимодулярной группы $SU(2M)$, что вполне естественно, так как все соотношения Говоркова получены в рамках квантования полей, основанного на соотношениях алгебры Ли группы $SU(2M+1)$.

Однако остается вопрос: можно ли из одного трилинейного соотношения (9.6) получить другие соотношения (3.1) или (3.2)? В случае одного параферми-поля ϕ_a ответ является положительным [26]. Действительно, требование инвариантности (9.1) приводит к соотношению (2.1). Использование тождества Якоби и соотношения (2.1) достаточно для восстановления другого трилинейного соотношения (2.3). В случае (9.6) тождество Якоби дает

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] + [[a_l, b_m], a_k^\dagger] = 2\delta_{km} b_l \tag{9.7}$$

и здесь в левой части, в отличие от случая одного поля, мы имеем два разных выражения и априори неясно, как их «расцепить».

Гринберг и Мессия [15] предложили свой подход к расцеплению соотношений типа (9.7). Мы уже упоминали об этом в разд. 2. Рассмотрим этот подход более подробно. Исходным здесь является соотношение (2.4). Использование тождества Якоби приводит к

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] + [[a_l, b_m], a_k^\dagger] = 0. \tag{9.8}$$

В расцеплении данного соотношения, Гринберг и Мессия использовали условия (i) и (iii), которые приведены в разд. 2. В частности, условие (iii) требует, чтобы искомые трилинейные соотношения удовлетворяли обычным бозе- и ферми-полям.

Пусть операторы a_k и b_k являются операторами ферми-осцилляторов, т. е. удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$\{a_k^\dagger, a_l\} = \delta_{kl}, \quad \{b_m^\dagger, b_n\} = \delta_{mn}, \tag{9.9}$$

$$\{a_k, a_l\} = 0, \quad \{b_m, b_n\} = 0, \ \ldots, \tag{9.10}$$

$$\{a_k^\dagger, b_m\} = 0, \quad \{a_k, b_m\} = 0, \ \ldots \tag{9.11}$$

Тогда для первого члена в левой части (9.8), используя тождество (B.2), будем иметь

$$[[b_m, a_k^\dagger], a_l] = \{b_m, \{a_l, a_k^\dagger\}\} - \{a_k^\dagger, \{a_l, b_m\}\} = 2\delta_{lk} b_m, \tag{9.12}$$

а для второго, соответственно, получим

$$[[a_l, b_m], a_k^\dagger] = \{a_l, \{a_k^\dagger, b_m\}\} - \{b_m, \{a_k^\dagger, a_l\}\} = -2\delta_{lk} b_m. \tag{9.13}$$

Выражения в правых частях (9.12) и (9.13) просто постулируются в качестве правых частей в трилинейных соотношениях для параферми-осцилляторов a_k и b_k, как это было уже сделано в (2.7) и (2.8).

Применим данный подход к соотношению (9.7). Ясно, что стандартная система коммутационных правил (9.9)–(9.11) здесь неприменима. Эта система должна быть несколько модифицирована с целью воспроизведения правых частей трилинейных соотношений (3.1) и (3.2). Соотношения (9.9) и (9.10) следует оставить без изменений, а вместо первого соотношения в (9.11) рассмотреть, например, выражение

$$\{a_k^\dagger, b_m\} = -2\delta_{km}\mathrm{G}.$$

Здесь мы ввели в рассмотрение дополнительную алгебраическую величину G, такую что

$$\{a_l, \mathrm{G}\} = b_l.$$

В этом случае вместо (9.13) получим то, что нужно:

$$[[a_l, b_m], a_k^\dagger] = -2\delta_{km} b_l - 2\delta_{kl} b_m.$$

Однако соотношение (9.12) все еще остается неизменным. Это служит намеком на то, что трилинейные соотношения Говоркова, в отличие от системы трилинейных соотношений Гринберга и Мессии, в принципе не допускают сведения к более простым билинейным соотношениям обычной ферми-статистики, даже с модификацией билинейных соотношений, содержащих различные поля. Таким образом, вопрос о правиле расцепления соотношения (9.7) остается открытым.

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЛЕЙНА

В работе [27] (см. также [28]), было построено так называемое преобразование Клейна [29–34] гриновских компонент параферми-поля произвольного порядка p. Данное преобразование позволило привести исходные соотношения (2.10), которые содержат как коммутаторы, так и антикоммутаторы, к нормальным коммутационным соотношениям для p обычных ферми-полей. В частности, в работе [27] показано, что для приведения к нормальным коммутационным правилам необходимо ввести в рассмотрение $p/2$ операторов Клейна H_{2j}, $j = 1, \ldots, p/2$ для четного p и $(p-1)/2$ операторов для нечетного p. Таким образом, для парастатистики порядка $p = 2, 3$ нам необходим один оператор Клейна H_2, а при $p = 4$ необходимы уже два оператора H_2 и H_4.

В рассматриваемой нами задаче с двумя параферми-полями ϕ_a и ϕ_b порядка $p = 2$ можно предположить, что нам потребуются, как минимум, два оператора Клейна, которые мы обозначим как $H_A^{(2)}$ и $H_B^{(1)}$. Смысл этих обозначений станет ясен чуть ниже. Нам нужно определить преобразование Клейна гриновских компонент $a_k^{(\alpha)}$ и $b_m^{(\alpha)}$ таким образом, чтобы одновременно привести к нормальной форме как коммутационные соотношения (2.10) отдельно для каждого набора $\{a_k^{(\alpha)}\}$, $\{b_m^{(\alpha)}\}$, так и коммутационные соотношения (3.8)–(3.11) смешанного типа.

Мы считаем, что искомое преобразование Клейна имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= A_k^{(1)} H_A^{(2)}, \quad b_m^{(1)} = -iB_m^{(1)} H_B^{(1)}, \\ a_k^{(2)} &= iA_k^{(2)} H_A^{(2)}, \quad b_m^{(2)} = B_m^{(2)} H_B^{(1)}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

где $A_k^{(\alpha)}$ и $B_m^{(\alpha)}$ — новые гриновские компоненты, удовлетворяющие следующим коммутационным правилам с операторами Клейна ($H_A^{(2)}$, $H_B^{(1)}$):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [A_k^{(1)}, H_A^{(2)}] = 0, \quad \{A_k^{(1)}, H_B^{(1)}\} = 0, \\ \{A_k^{(2)}, H_A^{(2)}\} = 0, \quad [A_k^{(2)}, H_B^{(1)}] = 0, \end{cases} \\ &\begin{cases} \{B_m^{(1)}, H_B^{(1)}\} = 0, \quad [B_m^{(1)}, H_A^{(2)}] = 0, \\ [B_m^{(2)}, H_B^{(1)}] = 0, \quad \{B_m^{(2)}, H_A^{(2)}\} = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{10.2}$$

При этом сами операторы Клейна удовлетворяют условиям

$$\big(H_A^{(2)}\big)^2 = \big(H_B^{(1)}\big)^2 = I, \quad [H_A^{(2)}, H_B^{(1)}] = 0. \tag{10.3}$$

Явный вид этих операторов будет выписан ниже, а сейчас мы просто покажем, что преобразование Клейна (10.1) с правилами (10.2) и (10.3) действительно приводит к поставленной цели.

Легко проверить, что преобразование (10.1) приводит к нормальному виду коммутационные соотношения (2.10). Это позволяет записать их следующим образом:

$$\begin{gathered} \big\{A_k^{(\alpha)}, A_l^{\dagger(\alpha)}\big\} = \delta_{kl}, \quad \big\{A_k^{(\alpha)}, A_l^{\dagger(\beta)}\big\} = 0, \\ \big\{B_m^{(\alpha)}, B_n^{\dagger(\alpha)}\big\} = \delta_{mn}, \quad \big\{B_m^{(\alpha)}, B_n^{\dagger(\beta)}\big\} = 0, \\ \big\{A_k^{(\alpha)}, A_l^{(\beta)}\big\} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \big\{B_m^{(\alpha)}, B_n^{(\beta)}\big\} = 0. \end{gathered} \tag{10.4}$$

Поэтому мы сосредоточим свое внимание на анализе системы (3.8)–(3.11). Рассмотрим соотношение (3.8) при $\alpha = 1$. Прямой подстановкой (10.1) в (3.8), с использованием (10.2) и (10.3), находим

$$[b_m^{(1)}, a_k^{\dagger(1)}] = iH_A^{(2)} \big\{B_m^{(1)}, A_k^{\dagger(1)}\big\} H_B^{(1)} = 2\delta_{mk}\Omega. \tag{10.5}$$

Полученное выражение служит намеком на то, что оператор Ω должен также быть преобразован. Таким образом, преобразование Клейна (10.1) необходимо дополнить следующим правилом:

$$\Omega = H_A^{(2)} \widetilde{\Omega} H_B^{(1)}, \tag{10.6}$$

где $\widetilde{\Omega}$ — новый оператор. Соотношение, аналогичное (10.5) также справедливо при $\alpha = 2$. Поэтому вместо (3.8), сейчас будем иметь

$$\big\{B_m^{(\alpha)}, A_k^{\dagger(\alpha)}\big\} = \frac{2}{i}\, \delta_{mk} \widetilde{\Omega}. \tag{10.7}$$

Далее нетрудно проверить, что вместо (3.9) сейчас получим

$$\big\{A_k^{(\alpha)}, B_m^{(\alpha)}\big\} = 0, \quad \big\{A_k^{\dagger(\alpha)}, B_m^{\dagger(\alpha)}\big\} = 0 \tag{10.8}$$

и соотношения (3.10) с учетом (10.6) переходят в

$$\big\{A_k^{(\alpha)}, \widetilde{\Omega}\big\} = iB_k^{(\alpha)}, \quad \big\{B_m^{(\alpha)}, \widetilde{\Omega}\big\} = iA_m^{(\alpha)}. \tag{10.9}$$

Обратим внимание на то, что в правой части выражений (10.9) знаки одинаковы, в отличие от (3.10). Наконец, антикоммутационные соотношения (3.11) сохраняют свой вид при преобразовании Клейна и здесь можно просто сделать замену:

$$a_k^{(\alpha)} \to A_k^{(\alpha)} \quad \text{и} \quad b_m^{(\alpha)} \to B_m^{(\alpha)}.$$

Определим теперь явный вид операторов Клейна $H_A^{(2)}$ и $H_B^{(1)}$. Для этой цели перепишем парафермионные операторы числа частиц (1.7) в терминах новых гриновских компонент $A_k^{(\alpha)}$ и $B_m^{(\alpha)}$. Для конкретности рассмотрим оператор числа частиц для b параферми-осцилляторов. При $p = 2$ имеем

$$N_b = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \big([b_m^{\dagger(1)}, b_m^{(1)}] + [b_m^{\dagger(2)}, b_m^{(2)}]\big) + M.$$

Подставляя преобразование Клейна (10.1) в предыдущее выражение и учитывая (10.2)–(10.4), находим, что данный парафермионный оператор числа частиц можно представить в следующем виде:

$$N_b = N_B^{(1)} + N_B^{(2)},$$

где

$$N_B^{(\alpha)} \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} [B_m^{\dagger(\alpha)}, B_m^{(\alpha)}] + \frac{1}{2} M, \quad \alpha = 1, 2 \tag{10.10}$$

представляют собой операторы числа частиц обычных фермионов. Аналогичное представление справедливо и для a параферми-осцилляторов. Явный вид операторов Клейна $H_A^{(2)}$ и $H_B^{(1)}$ задается следующими выражениями:

$$H_A^{(2)} = (-1)^{N_A^{(2)}}, \quad H_B^{(1)} = (-1)^{N_B^{(1)}}.$$

Большая часть коммутационных соотношений в (10.2) выполняется достаточно очевидным образом. Только два из них требуют специального рассмотрения, а именно:

$$\{A_k^{(1)}, H_B^{(1)}\} = 0, \quad \{B_m^{(2)}, H_A^{(2)}\} = 0. \tag{10.11}$$

Рассмотрим первое из них. Прежде всего представим оператор Клейна $H_B^{(1)}$ в несколько ином виде:

$$H_B^{(1)} = \mathrm{e}^{i\pi N_B^{(1)}}.$$

Рассматриваемое соотношение тогда можно записать как

$$\{A_k^{(1)}, H_B^{(1)}\} = \\ = \left(\mathrm{e}^{i\pi N_B^{(1)}} A_k^{(1)} \mathrm{e}^{-i\pi N_B^{(1)}} + A_k^{(1)}\right)\mathrm{e}^{i\pi N_B^{(1)}}. \quad (10.12)$$

Далее, используя тождество (B.7), имеем

$$\mathrm{e}^{i\pi N_B^{(1)}} A_k^{(1)} \mathrm{e}^{-i\pi N_B^{(1)}} = A_k^{(1)} + i\pi[N_B^{(1)}, A_k^{(1)}] + \\ + \frac{1}{2!}\,(i\pi)^2[N_B^{(1)}, [N_B^{(1)}, A_k^{(1)}]] + \ldots \quad (10.13)$$

Таким образом, доказательство сводится к вычислению коммутатора $[N_B^{(1)}, A_k^{(1)}]$. Используя определение оператора числа фермионов (10.10) и тождество (B.2), получим

$$[N_B^{(1)}, A_k^{(1)}] = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} [[B_m^{\dagger(1)}, B_m^{(1)}], A_k^{(1)}] = \\ = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\{B_m^{\dagger(1)}, \{A_k^{(1)}, B_m^{(1)}\}\} - \{B_m^{(1)}, \{A_k^{(1)}, B_m^{\dagger(1)}\}\}\right).$$

Первый член в правой части равен нулю в силу (10.8), а для второго члена, в силу (10.7) и (10.9), имеем

$$\{B_m^{(1)}, \{A_k^{(1)}, B_m^{\dagger(1)}\}\} = \frac{2}{i}\,\delta_{km}\{B_m^{(1)}, \widetilde{\Omega}\} = 2\delta_{km}A_m^{(1)}.$$

Таким образом, искомый коммутатор равен

$$[N_B^{(1)}, A_k^{(1)}] = -A_k^{(1)}.$$

Подставляя найденное соотношение в (10.13), находим далее

$$\mathrm{e}^{i\pi N_B^{(1)}} A_k^{(1)} \mathrm{e}^{-i\pi N_B^{(1)}} = \\ = A_k^{(1)}\left(1 - i\pi + \frac{1}{2!}(i\pi)^2 - \frac{1}{3!}(i\pi)^3 + \ldots\right) \equiv \\ \equiv A_k^{(1)}\mathrm{e}^{-i\pi} = -A_k^{(1)}.$$

Таким образом, правая часть равенства (10.12) действительно обращается в нуль. Второе соотношение в (10.1) доказывается аналогичным образом.

11. ТРОЙНАЯ СУПЕРЛИЕВА СИСТЕМА

В данном разделе мы бы хотели обсудить интересную связь между трилинейными соотношениями Говоркова (3.1)–(3.3) и так называемой тройной суперлиевой системой. Тройная суперлиева система, которая является обобщением стандартной тройной лиевой системы [35–38], была детально изучена в работах [39–42]. Наше рассмотрение будет основано на работе [39], в которой автор переформулировал парастатистику как тройную суперлиеву систему. В [39] был приведен ряд конкретных примеров такой переформулировки. Особенно нас будет интересовать пример 3 из работы [39] (явная формулировка данного примера приведена ниже). Нам потребуется несколько определений (в обозначениях работы [39]).

Пусть V — векторное суперпространство, которое представляет собой прямую сумму

$$V = V_B \oplus V_F.$$

В этом суперпространстве вводится градуировка

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in V_B \\ 1, & \text{если } x \in V_F, \end{cases} \quad (11.1)$$

а тройное суперпроизведение $[\ldots, \ldots, \ldots]$ определяется как трилинейное отображение

$$[\ldots, \ldots, \ldots];\ V \otimes V \otimes V \to V.$$

Тройное суперпроизведение подчиняется трем условиям, которые можно найти в [39]. Если $V_f = 0$, т. е. $V = V_B$, то тройное произведение $[x, y, z]$ приводит к стандартной тройной лиевой системе.

Кроме того, предполагается, что векторное суперпространство V всегда имеет билинейную форму $\langle x|y\rangle$, удовлетворяющую

$$\langle x|y\rangle = (-1)^{\sigma(x)\sigma(y)}\langle y|x\rangle, \\ \langle x|y\rangle = 0, \text{ если } \sigma(x) \neq \sigma(y). \quad (11.2)$$

Приведем теперь формулировку примера 3 из [39]. Пусть $P: V \to V$ является линейным отображением в V, сохраняющим градуировку, т. е.

$$\sigma(Px) = \sigma(x), \text{ для любого } x \in V \quad (11.3)$$

и предположим справедливость равенств

$$P^2 = \lambda I, \quad (11.4)$$

$$\langle x|Py\rangle = -\langle Px|y\rangle, \quad (11.5)$$

где I — тождественное отображение в V и λ — отличная от нуля константа. Следующее выражение для тройного произведения:

$$[x, y, z] = \langle y|Pz\rangle Px - (-1)^{\sigma(x)\sigma(y)}\langle x|Pz\rangle Py - \\ - 2\langle x|Py\rangle Pz + \lambda\langle y|z\rangle x - (-1)^{\sigma(x)\sigma(y)}\lambda\langle x|z\rangle y \quad (11.6)$$

преобразует V в тройную суперлиеву систему. Отметим, что одна и та же константа λ входит как в условие (11.4), так и в определение тройного произведения (11.6).

Покажем, что трилинейные соотношения Говоркова (3.1)–(3.3) представляют собой частные случаи общей формулы (11.6). Кроме того, тройное произведение содержит в себе также стандартные трилинейные соотношения для одного поля ϕ_a (и ϕ_b) (2.1)–(2.3). Первым шагом фиксируем два набора операторов

$$(a_k, a_k^\dagger) \ \text{и} \ (b_k, b_k^\dagger), \quad k = 1, \ldots, M,$$

между которыми задаем отображение P по правилу (ср. с (5.11))

$$\begin{aligned} Pa_k &= b_k, \qquad Pb_k = -a_k, \\ Pa_k^\dagger &= b_k^\dagger, \qquad Pb_k^\dagger = -a_k^\dagger. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Отсюда следует

$$P^2 a_k = -a_k, \quad P^2 b_k = -b_k,$$

и, таким образом, в силу условия (11.4) постоянная λ фиксируется однозначно:

$$\lambda = -1. \tag{11.8}$$

Рассмотрим второе условие (11.5). Полагаем $x = a_k^\dagger$ и $y = b_m$, тогда в силу (11.7) условие для билинейной формы $\langle \cdot | \cdot \rangle$ сводится к

$$\langle a_k^\dagger | a_m \rangle = \langle b_k^\dagger | b_m \rangle. \tag{11.9}$$

Фиксируем градуировку

$$\sigma(a_k) = \sigma(a_k^\dagger) = 0, \quad \sigma(b_m) = \sigma(b_m^\dagger) = 0,$$

тогда первое условие в (11.2) дает нам

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle \ \text{для любых} \ x, y \in V.$$

Таким образом, $V_F = 0$ и $V = V_B$. Выберем билинейную форму $\langle x|y \rangle$ так, чтобы удовлетворялись условия

$$\begin{aligned} \langle a_k^\dagger | a_m \rangle &= \langle a_m | a_k^\dagger \rangle = -2\delta_{km}, \\ \langle b_k^\dagger | b_m \rangle &= \langle b_m | b_k^\dagger \rangle = -2\delta_{km}, \\ \langle a_k^\dagger | a_m^\dagger \rangle &= \langle a_k | a_m \rangle = 0, \\ \langle b_k^\dagger | b_m^\dagger \rangle &= \langle b_k | b_m \rangle = 0, \\ \langle a_k^\dagger | b_m \rangle &= \langle a_k | b_m \rangle = 0, \\ \langle b_k^\dagger | a_m \rangle &= \langle b_k^\dagger | a_m^\dagger \rangle = 0. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Условие (11.9) выполняется автоматически.

Вернемся к основному соотношению (11.6) и полагаем в нем $x = a_k^\dagger$, $y = a_l$ и $z = b_m$. Тогда в силу (11.7), (11.8) и (11.10) получим

$$\begin{aligned} [a_k^\dagger, a_l, b_m] = -\langle a_l | a_m \rangle b_k^\dagger + \langle a_k^\dagger | a_m \rangle b_l + 2\langle a_k^\dagger | b_l \rangle a_m - \\ - \langle a_l | b_m \rangle a_k^\dagger + \langle a_k^\dagger | b_m \rangle a_l = -2\delta_{km} b_l. \end{aligned}$$

Таким образом, мы воспроизводим трилинейное соотношение (3.3). Далее, если мы полагаем $x = b_m$, $y = a_k^\dagger$ и $z = a_l$, то тройное произведение (11.6) принимает вид

$$\begin{aligned} [b_m, a_k^\dagger, a_l] = -\langle a_k^\dagger | b_l \rangle a_m - \langle b_m | b_l \rangle b_k^\dagger - \\ - 2\langle b_m | b_k^\dagger \rangle b_l - \langle a_k^\dagger | a_l \rangle b_m + \langle b_m | a_l \rangle a_k^\dagger = \\ = 4\delta_{mk} b_l + 2\delta_{kl} b_m, \end{aligned}$$

что дает соотношение (3.1). Нетрудно убедиться, что при $x = a_l$, $y = b_m$ и $z = a_k^\dagger$ мы воспроизводим (3.2). Можно утверждать, что с правилами (11.7), (11.8) и (11.10) все трилинейные соотношения Говоркова содержатся в одной формуле (11.6).

Рассмотрим для полноты картины тройное произведение для одного набора операторов, например, для $(a_k,\, a_k^\dagger)$. Пусть $x = a_k^\dagger$, $y = a_l$ и $z = a_m$, тогда из (11.6) получим

$$[a_k^\dagger, a_l, a_m] = -\langle a_l | a_m \rangle a_k^\dagger + \langle a_k^\dagger | a_m \rangle a_l = -2\delta_{km} a_l.$$

Мы видим, что тройное произведение с правилами (11.7), (11.8) и (11.10) правильно воспроизводит стандартные трилинейные соотношения параферми-статистики. Этот частный случай был рассмотрен в работе [39] в качестве примера 2 для тройного произведения

$$[x, y, z] = \lambda \big\{ \langle y | z \rangle x - (-1)^{\sigma(x)\sigma(y)} \lambda \langle x | z \rangle y \big\}. \tag{11.11}$$

Фактически, тройное произведение (11.11) представляет два последних члена в (11.6). Однако в нашем случае имеется отличие от случая [39]. Мы фиксируем константу λ и билинейную форму следующим образом:

$$\lambda = -1, \quad \langle a_k^\dagger | a_l \rangle = \langle a_l | a_k^\dagger \rangle = -2\delta_{kl},$$

в то время в работе [39] это делалось несколько иначе:

$$\lambda = 2, \quad \langle a_k^\dagger | a_l \rangle = \langle a_l | a_k^\dagger \rangle = \delta_{kl}.$$

И в том, и в другом случаях тройное произведение (11.11) правильно воспроизводит соотношения для параферми-статистики, однако в последнем случае соотношения Говоркова не воспроизводятся.

12. СВЯЗЬ С ФОРМАЛИЗМОМ ДЭФФИНА – КЕММЕРА – ПЕТЬЕ

В нашей работе [43] было получено представление собственного времени Фока – Швингера для обратного оператора $\hat{\mathcal{L}}^{-1}$:

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{L}}} \equiv \frac{\hat{\mathcal{L}}^2}{\hat{\mathcal{L}}^3} = i\int\limits_0^\infty dT \int \frac{d^2\chi}{T^2} \exp\Big\{-iT\big(\hat{H}(z) - i\epsilon\big) + \\ + \frac{1}{2}\big(T[\chi,\hat{\mathcal{L}}] + \frac{1}{4}T^2[\chi,\hat{\mathcal{L}}]^2\big)\Big\}, \quad \epsilon \to +0, \quad (12.1)$$

где

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \hat{\mathcal{L}}(z,D) = A\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/3}(z)}\,\eta_\mu(z) D_\mu + mI\right),$$

а

$$\hat{H}(z) \equiv \hat{\mathcal{L}}^3(z,D)$$

— оператор Гамильтона; $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$ — ковариантная производная; χ — параграссманова переменная порядка $p = 2$ (т. е. $\chi^3 = 0$) с правилами интегрирования [16]

$$\int d^2\chi = 0 = \int d^2\chi\,[\chi,\hat{\mathcal{L}}], \quad \int d^2\chi\,[\chi,\hat{\mathcal{L}}]^2 = 4\hat{\mathcal{L}}^2.$$

Оператор $\hat{\mathcal{L}}(z,D)$ представляет кубический корень некоторого волнового оператора третьего порядка во внешнем электромагнитном поле. Далее, матрицы $\eta_\mu(z)$ определяются через матрицы β_μ алгебры Дэффина – Кеммера – Петье (ДКП) и комплексный параметр деформации z следующим образом:

$$\eta_\mu(z) \equiv \left(1 + \frac{1}{2}\,z\right)\beta_\mu - z\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\zeta_\mu,$$

где

$$\zeta_\mu = i[\beta_\mu,\omega] \quad (12.2)$$

и

$$\omega = \frac{1}{(M!)^2}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2M}}\beta_{\mu_1}\beta_{\mu_2}\ldots\beta_{\mu_{2M}}. \quad (12.3)$$

В конце всех вычислений необходимо перейти к пределу $z \to q$ (q примитивный кубический корень из единицы).

Одной из причин появления настоящей работы была попытка разработать удобный математический аппарат, который позволил бы в рамках ДКП-подхода построить представление для обратного оператора $\hat{\mathcal{L}}^{-1}(z,D)$ (12.1) в виде интеграла по траекториям в некотором парасуперпространстве. Матричный элемент оператора $\hat{\mathcal{L}}^{-1}(z,D)$ в соответствующем базисе состояний можно рассматривать в качестве пропагатора массивной векторной частицы во внешнем калибровочном поле. К сожалению, формализм унитарного квантования Говоркова оказался неподходящим для этой цели. Ниже мы обсудим данную проблему более детально.

Первым шагом вычислим коммутатор $[\zeta_\mu,\omega]$, где ζ_μ определяется уравнением (12.2). Используя соотношения[5)]

$$\omega^2\beta_\mu + \beta_\mu\,\omega^2 = \beta_\mu, \quad \omega\beta_\mu\,\omega = 0, \quad (12.4)$$

легко найти, что

$$[\zeta_\mu,\omega] = i\beta_\mu. \quad (12.5)$$

Сравнивая выражения (12.2) и (12.5) с (A.17), найдем, что самый простой путь установления связи между ДКП-теорией и унитарным квантованием — буквальное отождествление матриц β_μ и ζ_μ из ДКП-подхода с величинами β_μ и ζ_μ, которые возникают в рамках уникввантования, уравнение (A.6). Отсюда, в частности, следует

$$\omega \equiv -\frac{1}{2}\,\zeta_0. \quad (12.6)$$

Теперь необходимо проверить, будут ли выполняться соотношения (A.11)–(A.16), если мы остаемся только в рамках ДКП-формализма. Рассмотрим сначала билинейные соотношения (A.15) и (A.16). Для правой части соотношения (A.15), с учетом (12.4), получим

$$[\zeta_\mu,\zeta_\nu] = -[[\beta_\mu,\omega],[\beta_\nu,\omega]] = [\omega,[\beta_\mu,\beta_\nu]]\omega + [\beta_\mu,\beta_\nu].$$

В силу $\omega - \beta_\mu$ алгебры имеет место равенство

$$[\omega,[\beta_\mu,\beta_\nu]] = 0 \quad (12.7)$$

и таким образом мы приходим к (A.15). Для билинейного соотношения (A.16) с учетом тождества Якоби и (12.7) получим

$$[\zeta_\mu,\beta_\nu] = -i[[\omega,\beta_\mu],\beta_\nu] = \\ = i\big([[\beta_\mu,\beta_\nu],\omega] + [[\beta_\nu,\omega],\beta_\mu]\big) = [\zeta_\nu,\beta_\mu], \quad (12.8)$$

где мы также видим полное совпадение. Однако соотношение (12.8) на самом деле в рамках ДКП-теории является более «слабым». Действительно, рассмотрим еще раз билинейное соотношение (A.16), не прибегая в этот раз к тождеству Якоби. Используя равенства

$$\omega\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu\,\omega = \omega\delta_{\mu\nu}, \\ \beta_\mu\omega\beta_\nu + \beta_\nu\,\omega\beta_\mu = 0,$$

5) Все основные формулы $\omega - \beta_\mu$ матричной алгебры для спина 1 можно найти в Приложении A нашей работы [43].

имеем

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu] = -i[[\omega, \beta_\mu], \beta_\nu] \equiv$$
$$\equiv -i\big(\omega\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu\omega - \beta_\mu\omega\beta_\nu - \beta_\nu\omega\beta_\mu\big) = -i\omega\delta_{\mu\nu}$$

и, таким образом, вместо (A.16), находим

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu] = [\zeta_\nu, \beta_\mu] = -i\omega\delta_{\mu\nu}. \tag{12.9}$$

Именно данное обстоятельство имеет отрицательное последствие для трилинейных соотношений, к рассмотрению которых мы сейчас переходим.

Трилинейное соотношение (A.11) выполняется очевидным образом в силу ДКП-алгебры

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu. \tag{12.10}$$

Соотношение (A.12) также выполняется, так как алгебра (12.10) справедлива и для матриц ζ_μ. Рассмотрим теперь смешанный коммутатор ζ_μ и β_μ. В силу (12.9) и (12.5) для (A.13) имеем

$$[\zeta_\lambda, [\zeta_\mu, \beta_\nu]] = -i\delta_{\mu\nu}[\zeta_\lambda, \omega] \equiv \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda,$$

а должно быть

$$[\zeta_\lambda, [\zeta_\mu, \beta_\nu]] = 2\delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu + \delta_{\lambda\mu}\beta_\nu.$$

Таким образом, мы видим, что правые части двух последних выражений не совпадают. Билинейное соотношение (A.13), так же как и (A.14), не выполняется.

Несоответствие между схемой унитарного квантования и ДКП-теорией можно также увидеть, если рассмотреть соотношение (A.10), в котором ζ_0 заменено на ω согласно правилу (12.6). Тогда, учитывая (12.9), получим

$$\omega = \frac{i}{2(2M+1)} \sum_{\mu=1}^{2M} [\zeta_\mu, \beta_\mu] =$$
$$= \frac{1}{2(2M+1)}\,\omega \sum_{\mu=1}^{2M} \delta_{\mu\mu} = \frac{M}{2M+1}\,\omega. \tag{12.11}$$

Здесь имеется очевидное противоречие. Суммируя все сказанное выше, можно утверждать, что несмотря на определенное сходство двух формализмов, схема квантования, основанная на теории Дэффина–Кеммера–Петье, не вкладывается в схему унитарного квантования, предложенную Говорковым.

Существует однако еще одна возможность, связанная с парафермионным квантованием в соответствии с алгеброй Ли ортогональной группы $SO(2M+2)$. Такое квантование было рассмотрено в свое время в работе [44] (см. также [45]). Весьма важным для нас обстоятельством является то, что для случая группы $SO(2M+2)$ также возникает некоторый дополнительный оператор, обозначенный в работе [44] как a_0. Данный оператор следует рассматривать в качестве аналога оператора ζ_0 (1.8). К сожалению, в отличие от схемы унитарного квантования, для группы $SO(2M+2)$ мы имеем лишь один набор операторов $(a_k, a_k^\dagger)$, которые связаны с исходными величинами β_μ соотношениями (A.18). Тем не менее, в данной ситуации можно просто ввести второй набор операторов $(b_k, b_k^\dagger)$, полагая по определению[6)]

$$b_k \equiv [a_0, a_k], \quad b_k^\dagger \equiv [a_0, a_k^\dagger], \quad a_0^\dagger = -a_0.$$

В этом случае трилинейные соотношения в [44], содержащие оператор a_0, принимают вид

$$[a_k^\dagger, b_m] = -2\delta_{km}a_0, \quad [b_m^\dagger, a_k] = 2\delta_{mk}a_0,$$
$$[a_0, b_m] = -a_m, \quad [a_0, b_m^\dagger] = -a_m^\dagger,$$
$$[a_k, b_m] = 0, \quad [a_k^\dagger, b_m^\dagger] = 0$$

и, в частности, имеем

$$a_0 = -\frac{1}{4M} \sum_{k=1}^{M} \Big([a_k^\dagger, b_k] + [b_k^\dagger, a_k]\Big). \tag{12.12}$$

Кроме того, в статье [44] было также определено действие оператора a_0 на вакуумное состояние (ср. с (7.6)):

$$a_0|0\rangle = \pm\frac{i}{2}\,p|0\rangle.$$

Обратим внимание, что выражение в правой части (12.12) имеет другой множитель перед знаком суммы по сравнению с (1.8). Это позволит нам избавиться от противоречия (12.11) при отождествлении оператора a_0 с оператором ω из ДКП-теории. Следует отметить также, что все величины ζ_μ связаны с $(b_k, b_k^\dagger)$ посредством (A.18). В этом случае прямым следствием выражения (12.2) является

$$a_0 \equiv -i\omega.$$

Все вопросы, связанные с парафермионным квантованием, основанным на ортогональной группе $SO(2M+2)$, и связь между данной схемой квантования и теорией Дэффина–Кеммера–Петье — предмет отдельного рассмотрения.

---

6) Мы переопределили операторы в [44] для нашего случая следующим образом:

$$a_0 \to 2ia_0, \quad a_k \to \sqrt{2}a_k, \quad b_m \to 2\sqrt{2}ib_m.$$

13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели различные аспекты связи между теорией унитарного квантования и парастатистикой. При анализе данной связи основной упор был сделан на использовании гриновского разложения операторов рождения и уничтожения, а также параграссмановых чисел. Оказалось, что система коммутационных соотношений, полученная Говорковым в рамках уникавантования, является весьма жесткой, так как эту систему удалось связать лишь с весьма частным случаем парастатистики, а именно, с параферми-статистикой порядка 2. Однако даже в этом случае потребовалось введение ряда дополнительных предположений и нового оператора Ω (разд. 3). Необходимо отметить также, что в работах [2,3] был рассмотрен также случай нечетного числа размерностей, т. е. случай унитарной группы $SU(2M)$. Говорков показал, что алгебра Ли этой унитарной группы содержит алгебру Ли симплектической группы $Sp(2M)$, а также другие операторы, которые дополняют ее до алгебры Ли исходной группы $SU(2M)$. Как известно [13], квантование в соответствии с алгеброй Ли симплектической группы $Sp(2M)$ соответствует парабозонному квантованию. Тем самым можно поставить аналогичную задачу о связи между схемой унитарного квантования, основанной на алгебре Ли унитарной группы $SU(2M)$, и парабозе-статистикой.

В заключение, однако, мы бы хотели обсудить чуть подробней одно из следствий построений, представленных в настоящей работе (разд. 6), которое осталось несколько затененным большим количеством формул. Это следствие связано с параферми-статистикой порядка 2 как таковой и не является спецификой схемы унитарного квантования. Оказывается, что некоторые трилинейные соотношения, содержащие как a_k (или b_m), так и параграссмановы числа ξ_k, имеют другое эквивалентное (дуальное?) представление. Это можно увидеть на примере следующих двух соотношений:

$$[\xi_k, [\xi_l, a_m]] = 0, \quad [a_k, [a_l^\dagger, \xi_m]] = 2\delta_{kl}\xi_m, \tag{13.1}$$

для которых дуальные соотношения имеют вид

$$\{\xi_k, \{\xi_l, a_m\}\} = 0, \quad \{a_k, \{a_l^\dagger, \xi_m\}\} = 2\delta_{kl}\xi_m. \tag{13.2}$$

Все эти соотношения обращаются в тождества при учете обычно используемых коммутационных правил для гриновских компонент операторов a_k и параграссмановых чисел ξ_k, уравнения (2.10) и (5.2).

В разд. 8 мы показали, что следствием этих двух формулировок трилинейных соотношений (13.1) и (13.2) является существование двух альтернативных определений парафермионного когерентного состояния, а именно:

$$|(\xi)_2\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}[\xi_l, a_l^\dagger]\right)|0\rangle,$$

$$|(\xi)_2\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}\{\xi_l, a_l^\dagger\}\right)|0\rangle.$$

И в том и в другом случаях выполняется основное свойство когерентного состояния:

$$a_k|(\xi)_2\rangle = \xi_k|(\xi)_2\rangle$$

и, кроме того, в обоих случаях функция перекрытия имеет свой обычный вид

$$\langle(\bar{\xi}\,')_2|(\xi)_2\rangle = \mathrm{e}^{(1/2)[\bar{\xi}_l{}', \xi_l]}.$$

Точный смысл появления таких «двойников» остается для нас неясным. Возможно, одной из причин чисто алгебраического характера является тот факт, что из четырех основных тождеств (B.1)–(B.4), только два являются независимыми, а именно, (B.2) и (B.3). Это обстоятельство и его следствие были проанализированы детально в работе Лаврова, Радченко и Тютина [46]. В частности, тождество Якоби (B.1) является следствием обобщенного тождества (B.2). Последнее содержит двойные антикоммутаторы в правой части как и в (13.2). Это намекает на то, что соотношения (13.1) и (13.2) являются следствием друг друга для $p = 2$. В любом случае, можно утверждать, что параферми-статистика порядка 2 является весьма специфичным случаем парастатистики (также как обычная $p = 1$ ферми-статистика), так как она обладает свойствами, которые полностью отсутствуют для параферми-статистик более высоких порядков ($p \geq 3$).

Работа Д. М. Г. выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-02-00149), Фонда исследований Сан-Паулу (FAPESP, грант 2016/03319-6), Национального Совета по науке (CNPq), а также в рамках программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгебра Ли $SU(2M+1)$

Алгебра Ли унитарной группы $SU(2M+1)$ имеет вид [47]

$$[X_{\mu\nu}, X_{\sigma\lambda}] = \delta_{\nu\sigma} X_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} X_{\sigma\nu}, \quad \sum_{\mu=0}^{2M} X_{\mu\mu} = 0, \tag{A.1}$$

где индексы $\mu, \nu, \ldots$ пробегают значения $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2M$. Если ввести новое множество операторов

$$F_{\mu\nu} = X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu},$$
$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}, \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} = +\widetilde{F}_{\nu\mu},$$

то алгебра Ли (A.1) принимает несколько иной вид:

$$[F_{\mu\nu}, F_{\sigma\lambda}] = \delta_{\nu\sigma} F_{\mu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} F_{\mu\sigma}, \tag{A.2}$$

$$[\widetilde{F}_{\mu\nu}, \widetilde{F}_{\sigma\lambda}] = \delta_{\nu\sigma} F_{\mu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda} F_{\mu\sigma}, \tag{A.3}$$

$$[F_{\mu\nu}, \widetilde{F}_{\sigma\lambda}] = \delta_{\nu\sigma} \widetilde{F}_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \widetilde{F}_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \widetilde{F}_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \widetilde{F}_{\mu\sigma}, \tag{A.4}$$

а особое условие переходит в

$$\sum_{\mu=0}^{2M} \widetilde{F}_{\mu\mu} = 0. \tag{A.5}$$

Операторы $F_{\mu\nu}$ образуют алгебру Ли ортогональной группы $SO(2M+1)$, а операторы $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ дополняют эту алгебру до алгебры унитарной группы $SU(2M+1)$.

Процедура унитарного квантования основана на выборе алгебры Ли группы $SO(2M+1)$ в качестве основной алгебры. Говорков [2] ввел в рассмотрение следующие величины:

$$\beta_\mu \equiv iF_{\mu 0}, \quad \beta_0 = iF_{00} = 0, \quad \zeta_\mu \equiv \widetilde{F}_{\mu 0}, \quad \zeta_0 = \widetilde{F}_{00} \neq 0. \tag{A.6}$$

Соотношения, приведенные ниже, являются следствием алгебры (A.2)–(A.4):

$$F_{\mu\nu} = [\beta_\mu, \beta_\nu] - i\big(\delta_{0\nu}\beta_\mu - \delta_{0\mu}\beta_\nu\big), \tag{A.7}$$

$$[\zeta_\mu, \zeta_\nu] = [\beta_\mu, \beta_\nu] - 2i\big(\delta_{0\nu}\beta_\mu - \delta_{0\mu}\beta_\nu\big), \tag{A.8}$$

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu] = -i\widetilde{F}_{\mu\nu} + i\delta_{\mu\nu}\,\zeta_0 + i\big(\delta_{0\nu}\zeta_\mu - \delta_{0\mu}\zeta_\nu\big). \tag{A.9}$$

В силу равенства $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \widetilde{F}_{\nu\mu}$ из (A.9) следует, что

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu] - [\zeta_\nu, \beta_\mu] = 2i\big(\delta_{0\nu}\zeta_\mu - \delta_{0\mu}\zeta_\nu\big).$$

Данное соотношение определяет антисимметричную часть коммутатора $[\zeta_\mu, \beta_\nu]$. В работе [2] в формуле (A.7) отсутствуют все члены в круглых скобках, в формуле (A.8) отсутствует множитель 2 в правой части, а в (A.9) отсутствует предпоследний член. Все эти члены и множитель важны, когда мы проверяем непротиворечивость различных выражений (см. ниже).

Далее, полагая $\mu = \nu$ в (A.9) и суммируя по μ с учетом (A.5), находим еще одно важное соотношение:

$$\zeta_0 = -\frac{i}{2M+1} \sum_{\mu=1}^{2M} [\zeta_\mu, \beta_\mu], \tag{A.10}$$

т. е. оператор ζ_0 не является независимым, а определяется другими операторами.

В терминах переменных (A.6) можно переписать алгебру (A.2)–(A.4) в эквивалентной форме трилинейных соотношений

$$[\beta_\lambda, [\beta_\mu, \beta_\nu]] = \delta_{\lambda\mu}\beta_\nu - \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu, \tag{A.11}$$

$$[\zeta_\lambda, [\zeta_\mu, \zeta_\nu]] = \delta_{\lambda\mu}\,\zeta_\nu - \delta_{\lambda\nu}\,\zeta_\mu, \tag{A.12}$$

$$[\zeta_\lambda, [\zeta_\mu, \beta_\nu]] = 2\delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu + \delta_{\lambda\mu}\beta_\nu, \tag{A.13}$$

$$[\beta_\lambda, [\zeta_\mu, \beta_\nu]] = -2\delta_{\mu\nu}\zeta_\lambda - \delta_{\lambda\nu}\zeta_\mu - \delta_{\lambda\mu}\zeta_\nu \tag{A.14}$$

и билинейных:

$$[\beta_\mu, \beta_\nu] = [\zeta_\mu, \zeta_\nu], \tag{A.15}$$

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu] = [\zeta_\nu, \beta_\mu]. \tag{A.16}$$

Здесь индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, 2M$. В обзорной работе Говоркова [4], однако, утверждается, что соотношения (A.11)–(A.16) «*... выполняются для ζ_0 автоматически вследствие их выполнения для других ζ_μ. Поэтому в них индексы μ, ν, λ можно считать пробегающими значения $0, 1, 2, \ldots\ldots, 2M$*». То, что это не так, можно увидеть из сравнения, например, билинейных соотношений (A.15), (A.16) с соотношениями (A.8), (A.9). В первом случае при $\nu = 0$ имеем (напомним, что $\beta_0 = 0$)

$$[\zeta_\mu, \zeta_0] = 0, \quad [\beta_\mu, \zeta_0] = 0,$$

тогда как во втором случае коммутаторы принимают вид

$$[\zeta_\mu, \zeta_0] = -2i\beta_\mu, \quad [\beta_\mu, \zeta_0] = 2i\zeta_\mu. \tag{A.17}$$

Обобщение трилинейных соотношений (A.11), (A.12), справедливое при любых значениях индексов, имеет, соответственно, вид

$$[\beta_\lambda, [\beta_\mu, \beta_\nu]] = \delta_{\lambda\mu}\beta_\nu - \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu + \delta_{0\nu}\big(\delta_{0\lambda}\beta_\mu - \delta_{0\mu}\beta_\lambda\big) - \delta_{0\mu}\big(\delta_{0\lambda}\beta_\nu - \delta_{0\nu}\beta_\lambda\big),$$

$$[\zeta_\lambda,[\zeta_\mu,\zeta_\nu]]=\delta_{\lambda\mu}\,\zeta_\nu-\delta_{\lambda\nu}\,\zeta_\mu+\\+\delta_{0\nu}\big(\delta_{0\lambda}\zeta_\mu-\delta_{0\mu}\zeta_\lambda-\delta_{\mu\lambda}\zeta_0\big)-\\-\delta_{0\mu}\big(\delta_{0\lambda}\zeta_\nu-\delta_{0\nu}\zeta_\lambda-\delta_{\nu\lambda}\zeta_0\big)+2i\big(\delta_{0\nu}[\beta_\mu,\zeta_\lambda]-\delta_{0\mu}[\beta_\nu,\zeta_\lambda]\big).$$

Характерной особенностью последнего выражения является появление членов, билинейных по β- и ζ-операторам, от которых, в принципе, невозможно избавиться.

Наконец, более общее выражение для (A.13) имеет вид

$$[\zeta_\lambda,[\zeta_\mu,\beta_\nu]]=2\delta_{\mu\nu}\beta_\lambda+\delta_{\lambda\nu}\beta_\mu+\delta_{\lambda\mu}\beta_\nu-\\-\delta_{0\nu}\big(\delta_{0\lambda}\beta_\mu-\delta_{0\mu}\beta_\lambda\big)-\delta_{0\mu}\big(\delta_{0\lambda}\beta_\nu-\delta_{0\nu}\beta_\lambda\big)+2i\delta_{0\mu}[\zeta_\nu,\zeta_\lambda].$$

Здесь также правая часть содержит билинейное по ζ слагаемое.

Для унитарного представления рассматриваемой алгебры величины β_μ и ζ_μ являются эрмитовыми:

$$\beta_\mu^\dagger=\beta_\mu,\quad \zeta_\mu^\dagger=\zeta_\mu.$$

Это обстоятельство позволяет ввести эрмитово-сопряженные операторы

$$\begin{aligned} a_k&=\beta_{2k-1}-i\beta_{2k}, & b_k&=\zeta_{2k-1}-i\zeta_{2k},\\ a_k^\dagger&=\beta_{2k-1}+i\beta_{2k}, & b_k^\dagger&=\zeta_{2k-1}+i\zeta_{2k},\end{aligned}\tag{A.18}$$

где $k=1,2,\ldots,M$. Алгебра (1.1)–(1.6) и (1.9) для операторов a_k, b_k и ζ_0 является прямым следствием (A.11)–(A.16) и (A.17).

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Операторные тождества

В этом Приложении мы приводим ряд операторных тождеств, которые часто используются в тексте:

$$[A,[B,C]]=-[B,[C,A]]-[C,[A,B]],\tag{B.1}$$

$$[A,[B,C]]=\{C,\{A,B\}\}-\{B,\{A,C\}\},\tag{B.2}$$

$$\{A,[B,C]\}=\{B,[C,A]\}-[C,\{A,B\}],\tag{B.3}$$

$$[A,\{B,C\}]=-[B,\{C,A\}]-[C,\{A,B\}],\tag{B.4}$$

где $[\,,]$ и $\{\,,\}$ обозначают соответственно коммутаторы и антикоммутаторы. В дополнении к (B.1)–(B.4) полезны также следующие более простые соотношения:

$$[A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\}=\\=B[A,C]+[A,B]C,\tag{B.5}$$

$$\{A,BC\}=\{A,B\}C-B[A,C]=\\=B\{A,C\}+[A,B]C.\tag{B.6}$$

Наконец, операторные тождества, включающие экспоненциальную функцию имеют вид [48–51]

$$\mathrm{e}^XY\mathrm{e}^{-X}=Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\\+\frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]]+\ldots,\tag{B.7}$$

$$\mathrm{e}^XY\mathrm{e}^{X}=Y+\{X,Y\}+\frac{1}{2!}\{X,\{X,Y\}\}+\\+\frac{1}{3!}\{X\{X,\{X,Y\}\}\}+\ldots,\tag{B.8}$$

$$\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\mathrm{e}^{-X}=\exp\big(\mathrm{e}^XY\mathrm{e}^{-X}\big).\tag{B.9}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ C

Коммутационные соотношения с оператором $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$

Здесь мы собрали вместе все (анти)коммутационные соотношения, содержащие оператор $\mathrm{e}^{\alpha i\widetilde{N}}$, которые возникли в разд. 6 и 8 в силу разных обстоятельств. При значениях параметра $\alpha=\pm\pi$ имеем

$$\{\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}},a_k\}=0,\quad \{\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}},b_m\}=0,$$

при $\alpha=\pm\pi/2$ —

$$a_k\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}=\mp\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}b_k,\quad b_m\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}=\pm\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}a_m,$$

$$\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}a_k=\pm b_k\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}},\quad \mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}b_m=\mp a_m\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}$$

или в эквивалентной форме

$$a_k=\mp\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}b_k\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}},\quad b_m=\pm\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}a_m\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}},$$

$$a_k=\pm\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}b_k\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}},\quad b_m=\mp\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}a_m\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}.$$

Коммутационные соотношения, включающие параграссмановы числа ξ_k, для случая $\alpha=\pm\pi$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}[\xi_l,a_k]&=-\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{\Lambda}}[\xi_l,a_k]\mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}},\\ \mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\{\xi_l,a_k\}&=-\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{\Lambda}}\{\xi_l,a_k\}\mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}},\\ \mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}[\xi_l,b_m]&=-\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{\Lambda}}[\xi_l,b_m]\mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}},\\ \mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{N}}\{\xi_l,b_m\}&=-\mathrm{e}^{\pm\pi i\widetilde{\Lambda}}\{\xi_l,b_m\}\mathrm{e}^{\mp\pi i\widetilde{N}},\end{aligned}$$

а для случая $\alpha=\pm\pi/2$ —

$$\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}[\xi_l,a_k]=\mp\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{\Lambda}}\{\xi_l,b_k\}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}},$$

$$\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{N}}[\xi_l,b_m]=\pm\mathrm{e}^{\pm\pi/2i\widetilde{\Lambda}}\{\xi_l,a_m\}\mathrm{e}^{\mp\pi/2i\widetilde{N}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. M. Assirati and D. M. Gitman, Europhys. J. C **77**, 476 (2017).
2. А. Б. Говорков, ТМФ **41**, 318 (1979).
3. A. B. Govorkov, J. Phys. A **13**, 1673 (1980).
4. А. Б. Говорков, ЭЧАЯ **14**, 1229 (1983).
5. T. D. Palev, Preprint JINR E17-10550 (1977) (arXiv: hep-th/9705032).
6. T. D. Palev, Rep. Math. Phys. **18**, 117 (1980).
7. T. D. Palev, Rep. Math. Phys. **18**, 129 (1980).
8. T. D. Palev and J. Van der Jeugt, J. Math. Phys. **43**, 3850 (2002).
9. А. Б. Говорков, ЖЭТФ **54**, 1785 (1968).
10. A. Ramakrishnan, R. Vasudevan, and P. S. Chandrasekaran, J. Math. Anal. Appl. **35**, 249 (1971).
11. A. J. Bracken and H. S. Green, J. Math. Phys. **14**, 1784 (1973).
12. H. S. Green, Phys. Rev. **90**, 270 (1953).
13. S. Kamefuchi and Y. Takahashi, Nucl. Phys. **36**, 177 (1962).
14. C. Ryan and E. C. G. Sudarshan, Nucl. Phys. **47**, 207 (1963).
15. O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah, Phys. Rev. B **138**, 1155 (1965).
16. M. Omote and S. Kamefuchi, Lett. Nuovo Cimento **24**, 345 (1979).
17. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, J. Math. Phys. **21**, 609 (1980).
18. Y. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **46**, 570 (1960).
19. Y. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **46**, 883 (1960).
20. Ю. Швингер, *Квантовая кинематика и динамика*, Наука, Москва (1992).
21. E. D'Hoker and D. G. Gagné, Nucl. Phys. B **467**, 272 (1996).
22. М. А. Васильев, Письма в ЖЭТФ **50**, 374 (1990).
23. M. A. Vasiliev, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 1115 (1991).
24. O. V. Dodlov, S. E. Konstein, and M. A. Vasiliev, Письма в ЖЭТФ **58**, 911 (1993).
25. M. S. Plyushchay, Nucl. Phys. B **491**, 619 (1997).
26. I. Bialynicki-Berula, Nucl. Phys. **49**, 605 (1963).
27. K. Drühl, R. Haag, and J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **18**, 204 (1970).
28. R. Y. Cusson, Ann. Phys. **55**, 22 (1969).
29. O. Klein, J. de Phys. **9**, 1 (1938).
30. L. Rosenfeld, *Nuclear Forces*, North Holland Publishing Co., Amsterdam (1948).
31. G. Lüders, Z. Naturforsch. **13a**, 254 (1958).
32. H. Umezawa, J. Podolanski, and S. Oneda, Proc. Phys. Soc. A **68**, 503 (1955).
33. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, Nuovo Cimento A **83**, 275 (1984).
34. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, Prog. Theor. Phys. **75**, 727 (1986).
35. N. Jacobson, Amer. J. Math. **71**, 149 (1949).
36. W. G. Lister, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 217 (1952).
37. A. A. Sagle, Pacific J. Math. **15**, 281 (1965).
38. K. Yamaguti, J. Sci. A **8**, 135 (1969).
39. S. Okubo, J. Math. Phys. **35**, 2785 (1994).
40. S. Okubo and N. Kamiya, J. Algebra **198**, 388 (1997).
41. N. Kamiya and S. Okubo, Proc. Edinb. Math. Soc. **43**, 243 (2000).
42. N. Kamiya and S. Okubo, Proc. Edinb. Math. Soc. **59**, 169 (2016).
43. Yu. A. Markov, M. A. Markova, and A. I. Bondarenko, Phys. Rev. D **92**, 105017 (2015).
44. B. Geyer, Nucl. Phys. B **8**, 326 (1968).
45. H. Fukutome, Prog. Theor. Phys. **65**, 809 (1981).
46. П. М. Лавров, О. В. Радченко, И. В. Тютин, ТМФ **179**, 196 (2014).
47. S. Okubo, J. Math. Phys. **16**, 528 (1975).
48. I. Mendaš and P. Milutinović, J. Phys. A **22**, L687 (1989).
49. I. Mendaš and P. Milutinović, J. Phys. A **23**, 537 (1990).
50. I. Mendaš and D.P. Popović, Phys. Scr. **82**, 045007 (2010).
51. J.-C. Pain, J. Phys. A **46**, 035304 (2013).