ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 3 (9), стр. 514–525

ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕФЕКТОМ

С. Е. Савотченко*

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
308012, Белгород, Россия

Поступила в редакцию 6 апреля 2018 г.

Показано, что вблизи тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, разделяющего нелинейные кристаллы керровского типа, существуют пространственно-периодические неоднородные стационарные состояния. Проанализированы контакты нелинейных самофокусирующих и дефокусирующих кристаллов. Пространственное распределение поля подчиняется стационарному нелинейному уравнению Шредингера с нелинейным относительно поля потенциалом, моделирующим тонкий дефектный слой с нелинейными свойствами. Показано, что существуют как симметричные, так и несимметричные относительно плоскости дефекта состояния. Установлено, что в кристалле с самофокусировкой возникают новые состояния, существование которых обусловлено нелинейностью дефекта и которые в случае линейного дефекта не возникают. Получены дисперсионные соотношения, определяющие энергию пространственно-периодических неоднородных стационарных состояний. Выражения для энергий таких состояний получены в явном аналитическом виде в частных случаях. Определены условия существования периодических состояний и их локализации в зависимости от характеристик дефекта и среды.

DOI: 10.1134/S0044451018090067

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение нелинейных поверхностных состояний, существующих вблизи границ раздела диэлектрических сред с различными характеристиками, представляется актуальным в связи с их широким применением в различных электронно-оптических устройствах, в том числе и в оптических системах хранения данных [1].

К настоящему времени существует множество теоретических работ, посвященных анализу распределения полей и дисперсионных соотношений для волн, распространяющихся вдоль границ раздела линейной и нелинейной сред [2, 3], двух нелинейных сред [4–7] и многослойных структур [8–10]. Модификации моделей границ раздела нелинейных кристаллов рассматривались в работе [11]. Особенности локализации нелинейных волн на границе раздела нелинейных сред с пространственной дисперсией анализировались в [12]. Взаимодействие вблизи дефекта связанных солитонных состояний, относящихся к различным состояниям двухуровневой системы, рассмотрено в работе [13] для случая границы раздела нелинейных сред и в [14] для случая границы раздела линейных и нелинейных сред.

При теоретическом изучении нелинейных волн часто используется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), которое при описании сред с эффектом Керра содержит кубическое (относительно искомого поля) слагаемое [15]. НУШ находит применение для описания нелинейных поверхностных волн различной физической природы, к примеру, упругих [6], магнитных [16], электрических [17].

Возбуждения полей часто рассматриваются в форме солитонов. Солитоны в различных магнитных системах теоретически изучались достаточно давно и фундаментально [18–21]. В оптических системах солитоны рассматривались как в простых волноводах, так и при наличии дефектов и оптических сверхрешеток [22, 23].

При изучении эффектов, связанных с взаимодействиями нелинейных возбуждений с плоским или точечным дефектом, в НУШ вводится потенциал поля, создаваемого таким дефектом [15]. Наиболее

* E-mail: savotchenkose@mail.ru

распространенными являются одномерные модели, в которых НУШ содержит короткодействующий потенциал в виде

$$U(x) = U_0\delta(x), \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом, расположенным в начале координат (иногда данная величина называется «мощностью» дефекта). При $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ — притягивается к нему.

Следует отметить, что использование потенциала в форме (1) не в полной мере позволяет анализировать взаимодействие, обусловленное физическими свойствами дефекта, с локальными возмущениями параметров среды, образующимися вблизи него. Для описания эффектов локализации возбуждений в слоистых структурах с учетом нелинейных свойств границ раздела слоев применялся потенциал с квадратичной нелинейностью относительно искомого поля [17, 24–26]. При наличии слабой связи между плоскопараллельными волноводами, амплитуда поля в которых существенно превышает усредненное значение амплитуды поля во всем кристалле, нелинейные слагаемые в НУШ учитывались внутри самих волноводов.

В данной работе предлагается обобщение предложенной в [24, 25] модели тонкого дефектного слоя, который внутри характеризуется керровской нелинейностью и разделяет кристаллы с керровской нелинейностью. Будет рассмотрено пространственно-неоднородное распределение поля возбуждений такого нелинейного дефекта. Анализ будет проведен для нелинейных сред керровского типа с различными знаками нелинейности, соответствующими самофокусировке и дефокусировке. Основной целью работы является нахождение всех типов пространственно-неоднородных стационарных состояний, возникающих в рассматриваемой системе и описываемых периодическими решениями НУШ, а также определение их энергии и условий существования. Особенностью данной работы является то, что в ней проведено исследование периодических состояний вблизи границы раздела с нелинейными свойствами между средами с различными характеристиками. Особое внимание будет уделено выявлению эффектов, обусловленных влиянием нелинейности дефекта, т. е. таких, которые вблизи простого дефекта в линейном приближении не возникают (пренебрежимо малы). К такого рода эффектам можно отнести образование особого вида стационарных пространственно-неоднородных состояний, не возникающих в случае дефекта, моделируемого потенциалом вида (1), т. е. в простейшем (линейном) приближении для потенциала дефекта.

2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим контакт двух кристаллических сред. Их границу раздела будем считать тонкой по сравнению с расстояниями локализации возмущений характеристик среды, ей создаваемыми, а также плоской. Можно считать, что граница раздела представляет собой плоский дефект кристаллической структуры, к примеру, двойниковую границу. Выберем координаты так, чтобы плоскость дефекта проходила через начало координат и была расположена в плоскости yz перпендикулярно оси x. Контактирующие кристаллы характеризуются ангармоническим взаимодействием элементарных возбуждений, поэтому их далее будем называть нелинейными.

Будем рассматривать возбуждения, однородно распределенные вдоль плоскости дефекта и неоднородные в перпендикулярном к ней направлении, на основе одномерной модели, когда динамика описывается одномерным НУШ:

$$i\psi_t' = -\frac{1}{2m}\,\psi_{xx}'' + \Omega(x)\psi - \gamma(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi, \qquad (2)$$

где m — эффективная масса возбуждения,

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, & x < 0, \\ \Omega_2, & x > 0, \end{cases}$$

$\Omega_{1,2}$ — постоянные величины. Параметр нелинейности в НУШ будет иметь вид

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x < 0, \\ \gamma_2, & x > 0, \end{cases}$$

где $\gamma_{1,2}$ — постоянные величины.

Нелинейные свойства плоского дефекта будем описывать одномерным потенциалом в виде [17, 24, 25]

$$U(x) = \left\{U_0 + W_0|\psi|^2\right\}\delta(x), \qquad (3)$$

где W_0 — параметр нелинейности дефекта, положительное значение которого соответствует дефокусировке, а отрицательное — самофокусировке в тонком дефектном слое.

Следует отметить, что в работах [24, 25] было принято $U_0 = 0$. Нелинейное уравнение со слагаемым вида (3) с двумя его параметрами U_0 и

W_0 использовалось при формулировке модели оптической системы, в которой периодическая модуляция линейного показателя преломления сочетается с пространственно-неоднородной нелинейностью, представленной периодической решеткой Кронига–Пенни с одиночным нелинейным дефектом — тонкослойным нелинейным волноводом [26]. Были проанализированы солитоны, порождаемые такой решеткой, аппроксимированной кусочно-постоянной функцией, в случаях, соответствующих возможным сочетаниям знаков параметров дефекта U_0 и W_0. В частности, для положительных дефектов локализованные моды существуют уже в линейном режиме. Режимы, возникающие как в полубесконечных, так и в первых конечных запрещенных зазорах, порождаемые бифуркациями из соответствующих линейных состояний, устойчивы в слабонелинейном режиме, но дестабилизируются по мере увеличения их амплитуд. В случае фокусирующей нелинейности и отрицательного дефекта все моды, обладающие такой же симметрией, как и те, которые были устойчивы в линейном режиме, становятся неустойчивыми, но в первой конечной щели появляется новая устойчивая мода. В случае дефокусирующей нелинейности и отрицательного дефекта единственные моды такого типа могут существовать и быть устойчивыми в первой конечной щели. Положительные дефекты с дефокусирующей нелинейностью порождают локализованные волны, возникающие путем бифуркации из линейных мод как в полубесконечных, так и в первых конечных щелях. Также возникают моды, которые существуют выше определенной пороговой мощности, необходимой для изменения совокупного отклика дефекта от фокусировки до дефокусировки [27].

Будем рассматривать простую модель, описывающую только стационарные состояния с энергией E, определяемые из стационарного НУШ, получаемого из (2) после подстановки в него волновой функции в виде $\psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt)$:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\,\psi'' + \Omega(x)\psi - \gamma(x)\psi^3 + U(x)\psi. \qquad (4)$$

Решение НУШ (4) с потенциалом (3) эквивалентно нахождению решения контактной краевой задачи для НУШ без потенциала:

$$\psi'' + 2m\left(E - \Omega(x) + \gamma(x)\psi^2\right)\psi = 0, \qquad (5)$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$, через которую проходит плоскость дефекта. Непрерывность волновой функции определяет первое (стандартное) граничное условие:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0). \qquad (6)$$

Если проинтегрировать обе части уравнения (5) с потенциалом (3) по x на малом интервале $[-\varepsilon;\varepsilon]$ и устремить затем ε к нулю, то в результате можно получить второе граничное условие [24, 25]:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2m\psi(0)\left\{U_0 + W_0\psi^2(0)\right\}. \qquad (7)$$

В линейном кристалле без дефекта могут распространяться свободные волны с квадратичным законом дисперсии. При наличии простого дефекта, описываемого короткодействующим потенциалом (1), в линейной среде существует симметричное локализованное по обе стороны от дефекта состояние в случае притягивающего дефекта. В нелинейной среде как с простым дефектом, так и с нелинейным также существуют локализованные состояния [4, 17, 24, 25]. В нелинейной среде без дефекта могут существовать нелинейные волны, описываемые эллиптическими функциями.

3. ТИПЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Для удобства введем обозначения волновых функций слева и справа от границы раздела кристаллов:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x < 0, \\ \psi_2(x), & x > 0. \end{cases}$$

3.1. Периодические состояния первого типа в кристалле с самофокусировкой

В случае кристалла с самофокусировкой, что отвечает положительной нелинейности ($\gamma > 0$) в уравнении (5), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1,\ \Omega_2\}$, НУШ (5) имеет пространственно-периодическое решение вида

$$\psi_j(x) = A_{cj}\,\mathrm{cn}\left(q_{cj}(x - x_{cj}), k\right), \qquad (8)$$

где k — модуль эллиптической функции cn ($1 > k^2 > 1/2$). Здесь и далее значение индекса $j = 1$ соответствует величинам, относящимся к характеристикам кристалла слева от плоскости дефекта при $x < 0$, а значение индекса $j = 2$ — справа от плоскости дефекта при $x > 0$.

Подстановка решения (8) в уравнение (5) позволяет получить выражения для волновых чисел и амплитуд в виде

$$q_{cj}^2 = \frac{2m(\Omega_j - E)}{2k^2 - 1}, \tag{9}$$

$$A_{cj}^2 = \frac{k^2 q_{cj}^2}{m\gamma_j}. \tag{10}$$

Подстановка решения (8) в условие непрерывности (6) приводит к выражению

$$\eta q_{c1}\,\mathrm{cn}(q_{c1}x_{c1}, k) = q_{c2}\,\mathrm{cn}(q_{c2}x_{c2}, k), \tag{11}$$

где $\eta = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2}$.

Подстановка решения (8) в нелинейное граничное условие (7) приводит к выражению

$$D_{c2} - D_{c1} = mU_0 + W_0 k^2 q_{c1}^2 \frac{\mathrm{cn}^2(q_{c1}x_{c1}, k)}{\gamma_1}, \tag{12}$$

где

$$D_{cj} = \frac{1}{2}\,\frac{q_{cj}\,\mathrm{sn}(q_{cj}x_{cj}, k)}{\mathrm{sn}(q_{cj}x_{cj} + K(k), k)},$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Пару соотношений (11) и (12) далее будем называть дисперсионными. К примеру, из (11) можно определить, например, x_{c2} и подставить в (12), тем самым исключив его. Тогда из (12) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{c1}, k)$. В результате после нахождения E из (11) определяется x_{c2} как функция параметров системы: $x_{c2} = x_{c2}(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{c1}, k)$. Поэтому (8) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_{c1}.

3.2. Периодические состояния второго типа в кристалле с самофокусировкой

В случае, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1,\ \Omega_2\}$ НУШ (5) имеет другое пространственно-периодическое решение:

$$\psi_j(x) = A_{dj}\,\mathrm{dn}\left(q_{dj}(x - x_{dj}), k\right), \tag{13}$$

которое выражается через эллиптическую функцию dn.

Подстановка решения (13) в уравнение (5) позволяет получить выражения для волновых чисел и амплитуд в виде

$$q_{dj}^2 = \frac{2m(\Omega_j - E)}{2 - k^2}, \tag{14}$$

$$A_{dj}^2 = \frac{q_{dj}^2}{m\gamma_j}. \tag{15}$$

Подстановка решения (13) в условие непрерывности (6) приводит к выражению

$$\eta q_{d1}\,\mathrm{dn}(q_{d1}x_{d1}, k) = q_{d2}\,\mathrm{dn}(q_{d2}x_{d2}, k). \tag{16}$$

Подстановка решения (13) в нелинейное граничное условие (7) приводит к выражению

$$D_{d2} - D_{d1} = mU_0 + W_0 q_{d1}^2 \frac{\mathrm{dn}^2(q_{d1}x_{d1}, k)}{\gamma_1}, \tag{17}$$

где

$$D_{dj} = \frac{1}{2}\,k^2 q_{dj}\,\mathrm{sn}(q_{dj}x_{dj}, k)\,\mathrm{sn}\left(q_{dj}x_{dj} + K(k), k\right).$$

Соотношения (16) и (17) будем называть дисперсионными. Из (16) можно выразить, например, x_{d2} и подставить в (17), тем самым исключив его. Тогда из (17) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{d1}, k)$. В результате после нахождения E из (16) определяется x_{d2} как функция параметров системы: $x_{d2} = x_{d2}(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{d1}, k)$. Тогда функция (13) будет являться двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_{d1}.

Состояния в кристалле с самофокусировкой, описываемые функциями (8) и (13), были рассмотрены в работе [28].

3.3. Периодические состояния в кристалле с дефокусировкой

В случае кристалла с дефокусировкой, что отвечает отрицательной нелинейности ($\gamma < 0$) в (5), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E > \max\{\Omega_1,\ \Omega_2\}$, НУШ (5) имеет пространственно-периодическое решение

$$\psi_j(x) = A_{sj}\,\mathrm{sn}\left(q_{sj}(x - x_{sj}), k\right), \tag{18}$$

выражаемое через эллиптический синус sn с модулем $0 < k < 1$.

Подстановка решения (18) в уравнение (5) позволяет получить выражения для волновых чисел и амплитуд в виде

$$q_{sj}^2 = \frac{2m(E - \Omega_j)}{1 + k^2}, \tag{19}$$

$$A_{sj}^2 = \frac{q_{sj}^2}{mg_j}, \tag{20}$$

где для удобства обозначили параметры нелинейности дефокусирующей среды: $g_j = -\gamma_j > 0$.

Подстановка решения (18) в условие непрерывности (6) приводит к выражению

$$\eta q_{s1} \operatorname{sn}(q_{s1}x_{s1}, k) = q_{s2} \operatorname{sn}(q_{s2}x_{s2}, k). \tag{21}$$

Подстановка решения (18) в нелинейное граничное условие (7) приводит к выражению

$$D_{s2} - D_{s1} = mU_0 + W_0 q_{s1}^2 \frac{\operatorname{sn}^2(q_{s1}x_{s1}, k)}{g_1}, \tag{22}$$

где

$$D_{sj} = \frac{1}{2} \frac{k_1 q_{sj} \operatorname{cn}(q_{sj}x_{sj}, k)}{\operatorname{cn}(q_{sj}x_{sj} + K(k), k)},$$

$k_1^2 = 1 - k^2$ — дополнительный модуль эллиптических функций.

Соотношения (21) и (22) будем называть дисперсионными. Из (21) можно выразить, например, x_{s2} и подставить в (22), тем самым исключив его. Тогда из (22) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{s1}, k)$. В результате после нахождения E из (21) определяется x_{s2} как функция параметров системы: $x_{s2} = x_{s2}(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{s1}, k)$. Тогда функция (18) будет являться двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_{s1}.

3.4. Периодические состояния первого типа при контакте самофокусирующего и дефокусирующего кристаллов

Рассмотрим теперь контакт двух полуограниченных кристаллов с противоположными знаками нелинейности. Пусть полупространство слева от границы раздела (плоского дефекта) при $x < 0$ занимает кристалл с самофокусировкой (где $\gamma_1 > 0$), а полупространство справа от границы раздела при $x > 0$ занимает кристалл с дефокусировкой (где $\gamma_2 < 0$).

В таком случае, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, НУШ (5) имеет пространственно-периодическое решение, описываемое функциями вида (8) для $j = 1$ и (18) для $j = 2$:

$$\begin{gathered} \psi_1(x) = A_{c1} \operatorname{cn}\left(q_{c1}(x - x_{c1}), k\right), \\ \psi_2(x) = A_{s2} \operatorname{sn}\left(q_{s2}(x - x_{s2}), k\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Выражения для волновых чисел и амплитуд этих решений задаются формулами (9) и (10) для $j = 1$ и (19) и (20) для $j = 2$ соответственно.

Подстановка функций (23) в условие непрерывности (6) приводит к выражению

$$\tilde{\eta} k q_{c1} \operatorname{cn}(q_{c1}x_{c1}, k) = -q_{s2} \operatorname{sn}(q_{s2}x_{s2}, k) \tag{24}$$

где $\tilde{\eta} = (g_2/\gamma_1)^{1/2}$.

Подстановка функций (23) в нелинейное граничное условие (7) приводит к выражению

$$D_{s2} - D_{c1} = mU_0 + W_0 k^2 q_{c1}^2 \frac{\operatorname{cn}^2(q_{c1}x_{c1}, k)}{\gamma_1}. \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) будем называть дисперсионными. Из (24) можно выразить, например, x_{s2} и подставить в (25), тем самым исключив его. Тогда из (25) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{c1}, k)$. В результате после нахождения E из (25) определяется x_{s2} как функция параметров системы: $x_{s2} = x_{s2}(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{c1}, k)$. Тогда (23) будет определять двухпараметрическое решение НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_{c1}.

3.5. Периодические состояния второго типа на границе раздела самофокусирующего и дефокусирующего кристаллов

В случае контакта самофокусирующего (в области $x < 0$) и дефокусирующего (в области $x > 0$) кристаллов, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, НУШ (5) имеет другое пространственно-периодическое решение, описываемое функциями вида (13) для $j = 1$ и (18) для $j = 2$:

$$\begin{gathered} \psi_1(x) = A_{d1} \operatorname{dn}\left(q_{d1}(x - x_{d1}), k\right), \\ \psi_2(x) = A_{s2} \operatorname{sn}\left(q_{s2}(x - x_{s2}), k\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Выражения для волновых чисел и амплитуд этих решений задаются формулами (14) и (15) для $j = 1$ и (19) и (20) для $j = 2$ соответственно.

Подстановка функций (26) в условие непрерывности (6) приводит к выражению

$$\tilde{\eta} q_{d1} \operatorname{dn}(q_{d1}x_{d1}, k) = -q_{s2} \operatorname{sn}(q_{s2}x_{s2}, k). \tag{27}$$

Подстановка функций (26) в нелинейное граничное условие (7) приводит к выражению

$$D_{s2} - D_{d1} = mU_0 + W_0 q_{d1}^2 \frac{\operatorname{dn}^2(q_{d1}x_{d1}, k)}{\gamma_1}. \tag{28}$$

Соотношения (27) и (28) будем называть дисперсионными. Из (27) можно выразить, например, x_{s2}

и подставить в (28), тем самым исключив его. Тогда из (28) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{d1}, k)$. В результате после нахождения E из (27) определяется x_{s2} как функция параметров системы: $x_{s2} = x_{s2}(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_{d1}, k)$. Тогда (26) будет определять двухпараметрическое решение НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_{d1}.

4. ЭНЕРГИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

4.1. Энергия периодического состояния первого типа в кристалле с самофокусировкой

Рассмотрим случай, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, периодическое состояние описывается формулой (8), а его энергия находится из дисперсионных соотношений (11) и (12). Их анализ можно провести в явном аналитическом виде в различных частных случаях.

В точной форме можно определить энергию состояния, для которого $x_{c2} = x_{c1} = 0$. Тогда из (11) следует связь $q_{c2} = \eta q_{c1}$, а из (12) вытекает соотношение $q_{c1}^2 = -\gamma_1 m U_0 / W_0 k^2$. Отсюда следует, что такое состояние возможно только при противоположных знаках параметров дефекта. С учетом (9) из этих выражений получается энергия вида

$$E = \Omega_1 + \frac{\gamma_1 U_0 (2k^2 - 1)}{2 W_0 k^2}, \qquad (29)$$

а также модуль эллиптической функции, который становится определенным через параметры кристалла и дефекта:

$$k^2 = \frac{U_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{2\{U_0(\gamma_2 - \gamma_1) + W_0(\Omega_2 - \Omega_1)\}}. \qquad (30)$$

Состояния такого вида с энергией (29) возможны, только когда плоский дефект разделяет кристаллы с различными по величине (но не по знаку) характеристиками нелинейности ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). Более того, их существование обусловлено исключительно тем, что дефект обладает нелинейными свойствами, поскольку при $W_0 = 0$ они не возникают.

Будем теперь считать, что характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта одинаковые, т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда из (9) следует, что $q_{c1} = q_{c2} = q_c$, а из (10) — амплитуда колебаний дефекта $A_{c1} = A_{c2} = \psi_{c0}$.

Сначала рассмотрим состояние, для которого $x_{c2} = -x_{c1} = x_{c0}$. Состояния при таких условиях характеризуются двумя свободными параметрами k и x_{c0}. В этом случае уравнение (11) удовлетворяется автоматически. В явном аналитическом виде энергию можно найти в «длинноволновом» приближении при $q_c x_{c0} \ll 1$. Следует отметить, что условие «длинноволнового» приближения $q_c x_{c0} \ll 1$ означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование $|\Omega - E| \ll (2k^2 - 1)/2 m x_{c0}^2$. В таком приближении из (12) находится энергия:

$$E = \Omega - \frac{(2k^2 - 1)\gamma U_0}{2(\gamma x_{c0} - W_0 k^2)}. \qquad (31)$$

Из (10) определяется амплитуда колебаний дефекта:

$$\psi_{c0} = k \left(\frac{U_0}{\gamma x_{c0} - W_0 k^2} \right)^{1/2}. \qquad (32)$$

Состояния такого типа с энергией (31) могут существовать при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > 0$ и $W_0 < \gamma x_{c0}/k^2$, 2) $U_0 < 0$ и $W_0 > \gamma x_{c0}/k^2$. Другими словами, состояние рассматриваемого типа с энергией (31) может существовать как для притягивающего тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, так и для отталкивающего. Для положения максимума амплитуды возмущения возникает дополнительное ограничение: $x_{c0} \neq W_0 k^2/\gamma$.

Теперь рассмотрим несимметричное состояние, для которого $x_{c2} \neq x_{c1}$. По-прежнему будем считать, что $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, характеристики нелинейности кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта различны, т. е. и $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тогда из (12) в «длинноволновом» приближении при $q_c x_{cj} \ll 1$ энергию можно получить в виде

$$E = \Omega - \frac{(2k^2 - 1)\gamma_1 U_0}{\gamma_1 (x_{c2} - x_{c1}) - 2 W_0 k^2}. \qquad (33)$$

Из (11) с учетом (33) в таком случае можно выразить параметр:

$$x_{c2} = \frac{(1 - \eta) F_c(x_{c1})}{2 m U_0}, \qquad (34)$$

где

$$F_c(x_{c1}) = 1 \pm \left[1 - \frac{4 m U_0}{\gamma_1 (1 - \eta)^2} \times \left((1 - \eta)(\gamma_1 x_{c1} + 2 W_0 k^2) - m U_0 \gamma_1 \eta x_{c1}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Для дальнейшего анализа с целью его упрощения будем рассматривать состояние с $x_{c1} = 0$. Выражение (34) в таком случае упрощается:

$$x_{c2} = \frac{(1-\eta)F_{c0}}{2mU_0}, \qquad (35)$$

где

$$F_{c0} = F_c(x_{c1} = 0) = 1 \pm \left[1 - \frac{8mU_0W_0k^2}{\gamma_1(1-\eta)}\right]^{1/2}.$$

Тогда из (33) с учетом (35) можно полностью определить энергию через параметры кристалла и дефекта:

$$E = \Omega - \Omega_{c0}F_{c0}^2,$$

где

$$\Omega_{c0} = \frac{\gamma_1^2(1-\eta)(2k^2-1)}{16mW_0^2k^4}.$$

Для существования такого локального состояния должно выполняться условие $U_0 < \gamma_1(1-\eta)/8mW_0k^2$.

4.2. Энергия периодического состояния второго типа в кристалле с самофокусировкой

Рассмотрим случай, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, периодическое состояние описывается формулой (13), а его энергия находится из дисперсионных соотношений (16) и (17).

В точной форме можно определить энергию состояния, для которого $x_{d2} = x_{d1} = 0$. Тогда из (16) следует связь $q_{d2} = \eta q_{d1}$, а из (17) вытекает соотношение $q_{d1}^2 = -\gamma_1 mU_0/W_0$. Отсюда следует, что, как и для состояний первого типа, такое состояние возможно только при противоположных знаках параметров дефекта. С учетом (14) из этих выражений получается энергия в виде

$$E = \Omega_1 + \frac{\gamma_1 U_0(2-k^2)}{2W_0}, \qquad (36)$$

а также модуль эллиптической функции:

$$k^2 = 2\frac{U_0(\gamma_1-\gamma_2) + W_0(\Omega_1-\Omega_2)}{U_0(\gamma_1-\gamma_2)}. \qquad (37)$$

Состояния такого вида, так же как и состояния первого типа, возможны, только когда плоский дефект разделяет кристаллы с различными характеристиками нелинейности, причем такой дефект должен обязательно обладать нелинейными свойствами ($W_0 \neq 0$).

Будем теперь считать, что характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта одинаковы, т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда из (14) следует, что $q_{d1} = q_{d2} = q_d$, а из (15) — амплитуда колебаний дефекта $A_{d1} = A_{d2} = \psi_{d0}$.

Сначала рассмотрим состояние, для которого $x_{d2} = -x_{d1} = x_{d0}$. Состояния при таких условиях характеризуются двумя свободными параметрами k и x_{d0}. В этом случае уравнение (16) удовлетворяется автоматически. В явном аналитическом виде энергию можно найти в «длинноволновом» приближении при $q_d x_{d0} \ll 1$. Следует отметить, что условие «длинноволнового» приближения $q_d x_{d0} \ll 1$ означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование $|\Omega - E| \ll (2-k^2)/2mx_{d0}^2$. В таком приближении из (17) находится энергия:

$$E = \Omega - \frac{(2-k^2)\gamma U_0}{2(\gamma x_{d0}k^2 - W_0)}. \qquad (38)$$

Из (15) определяется амплитуда колебаний дефекта:

$$\psi_{d0} = \left(\frac{U_0}{\gamma x_{d0}k^2 - W_0}\right)^{1/2}. \qquad (39)$$

Состояния такого типа с энергией (38) могут существовать при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > 0$ и $W_0 < \gamma x_{d0}k^2$, 2) $U_0 < 0$ и $W_0 > \gamma x_{d0}k^2$. Следовательно, состояние рассматриваемого типа с энергией (38) может существовать как для притягивающего тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, так и для отталкивающего.

Теперь рассмотрим несимметричное состояние, для которого $x_{d2} \neq x_{d1}$. По-прежнему будем считать, что $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, характеристики нелинейности кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта различные, т. е. $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тогда из (17) в «длинноволновом» приближении при $q_d x_{dj} \ll 1$ энергию можно получить в виде

$$E = \Omega - \frac{(2-k^2)\gamma_1 U_0}{\gamma_1 k^2(x_{d2} - x_{d1}) - 2W_0}. \qquad (40)$$

Из (16) с учетом (40) в таком случае можно выразить параметр:

$$x_{d2} = (1-\eta)F_d(x_{d1})/2mU_0, \qquad (41)$$

где

$$F_d(x_{d1}) = 1 \pm \left[1 - \frac{4mU_0}{\gamma_1 k^2(1-\eta)^2} \times \left((1-\eta)(\gamma_1 x_{d1}k^2 + 2W_0) - mU_0\gamma_1\eta x_{d1}^2k^2\right)\right]^{1/2}.$$

Для дальнейшего анализа с целью его упрощения будем рассматривать состояние с $x_{d1} = 0$. Выражение (34) в таком случае упрощается:

$$x_{d2} = \frac{(1-\eta)F_{d0}}{2mU_0}, \tag{42}$$

где

$$F_{d0} = F_d(x_{d1} = 0) = 1 \pm \left[1 - \frac{8mU_0W_0}{\gamma_1 k^2(1-\eta)}\right]^{1/2}.$$

Тогда из (40) с учетом (42) можно полностью определить энергию через параметры кристалла и дефекта:

$$E = \Omega - \Omega_{d0}F_{d0}^2, \tag{43}$$

где

$$\Omega_{d0} = \frac{\gamma_1^2 k^2(1-\eta)(2-k^2)}{16mW_0^2}.$$

Для существования такого локального состояния с энергией (43) должно выполняться условие $U_0 < \gamma_1 k^2(1-\eta)/8mW_0$.

4.3. Энергия периодического состояния в кристалле с дефокусировкой

Рассмотрим случай, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E > \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$, периодическое состояние описывается (18), а его энергия находится из дисперсионных соотношений (21) и (22).

Будем теперь считать, что характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта одинаковые, т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $g_1 = g_2 = g$. Тогда из (19) следует, что $q_{s1} = q_{s2} = q_s$, а из (20) — амплитуда колебаний дефекта $A_{s1} = A_{s2} = \psi_{s0}$.

Сначала рассмотрим состояние, для которого $x_{s2} = -x_{s1} = x_{s0}$. Состояния при таких условиях характеризуются двумя свободными параметрами k и x_{s0}. В явном аналитическом виде энергию можно найти в «длинноволновом» приближении при $q_s x_{s0} \ll 1$. Следует отметить, что условие «длинноволнового» приближения $q_s x_{s0} \ll 1$ означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование $|E - \Omega| \ll (1+k^2)/2mx_{s0}^2$. В таком приближении из (22) находится энергия:

$$E = \Omega + \frac{1+k^2}{2m}\left(-\frac{g(1+mU_0x_{s0})}{W_0x_{s0}^3}\right)^{1/2}. \tag{44}$$

Из (20) определяется амплитуда колебаний дефекта:

$$\psi_{s0} = \left(-\frac{1+mU_0x_{s0}}{mW_0x_{s0}}\right)^{1/2}. \tag{45}$$

Состояния такого типа с энергией (44) могут существовать при выполнении одного из наборов условий: 1) $U_0 > -1/mx_{s0}$, $W_0x_{s0} < 0$, 2) $U_0 < -1/mx_{s0}$, $W_0x_{s0} > 0$. Следовательно, состояние рассматриваемого типа с энергией (44) может существовать как для притягивающего тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, так и для отталкивающего, причем знаки обоих параметров дефекта должны быть одинаковыми.

Теперь рассмотрим несимметричное состояние, для которого $x_{s2} \neq x_{s1}$. По-прежнему будем считать, что $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, характеристики нелинейности кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта различные, т. е. $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тогда в «длинноволновом» приближении при $q_s x_{sj} \ll 1$ из (21) следует, что $x_{s2} = \eta x_{s1}$, а из (22) можно найти энергию:

$$E = \Omega + \frac{1+k^2}{2mx_{s1}}\left(g_1\frac{\eta(1-2mU_0x_{s1})-1}{2\eta W_0x_{s1}}\right)^{1/2}. \tag{46}$$

Состояния такого типа с энергией (46) могут существовать при выполнении одного из наборов условий: 1) $U_0 > (\eta-1)/2m\eta x_{s1}$, $W_0x_{s1} < 0$, 2) $U_0 < (\eta-1)/2m\eta x_{s1}$, $W_0x_{s1} > 0$. Как и в описанном выше случае, состояние рассматриваемого типа с энергией (46) может существовать как для притягивающего тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, так и для отталкивающего.

Наконец, рассмотрим несимметричное состояние, для которого $x_{s2} \neq x_{s1}$ и характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта различные, т. е. $\Omega_1 \neq \Omega_2$ и $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тогда в «длинноволновом» приближении при $q_s x_{sj} \ll 1$ из (22) можно найти энергию:

$$E = \Omega_1 + \Omega_{s0}\left\{1 \pm \left(1 - \frac{\Omega_{sa}}{\Omega_{s0}}\right)^{1/2}\right\}, \tag{47}$$

где

$$\Omega_{s0} = \frac{g_1(\eta-1)(1+k^2)}{4m\eta W_0 x_{s1}^3},$$

$$\Omega_{sa} = \frac{4\eta^2 x_{s1}}{\eta-1}\left\{U_0 + \frac{2\eta(\Omega_1-\Omega_2)}{1+k^2}\right\}.$$

С учетом (47) из (21) можно получить выражение

$$x_{s2} = \eta\frac{E-\Omega_1}{E-\Omega_2}. \tag{48}$$

Из (48) следует, что $x_{s2} > 0$. Состояния такого типа с энергией (47) могут существовать при выполнении условия

$$U_0 < \frac{g_1(\eta-1)^2}{16m\eta^2 W_0 x_{s1}^4} - \frac{2\eta(\Omega_1-\Omega_2)}{1+k^2}.$$

Знаки параметров дефекта могут быть противоположными.

Принципиальное отличие кристаллов с дефокусировкой от кристаллов с самофокусировкой состоит в том, что в них для пространственно-неоднородных периодических состояний не могут равняться нулю оба параметра x_{sj}, характеризующих распределения максимумов амплитуд возмущения в пространстве.

5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Хорошо известно, что эллиптические функции в пределе $k \to 1$ переходят в гиперболические. Данное обстоятельство позволяет описать в рамках предложенной модели помимо пространственно-периодических состояний также и локализованные вблизи границы раздела сред состояния.

5.1. Локализация состояний в кристалле с самофокусировкой

В случае $\gamma > 0$ и $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$ периодическое состояние, описываемое решением (8), при $k = 1$ переходит в локализованное состояние, описываемое убывающим при удалении от границы раздела на бесконечность решением:

$$\psi_j(x) = \frac{A_j}{\operatorname{ch}(q_j(x - x_j))}\,. \tag{49}$$

Здесь в пределе $k \to 1$ из (9) следует, что $q_{cj}^2 \to q_j^2 = 2m(\Omega_j - E)$ а из (10) — $A_{cj}^2 \to A_j^2 = q_j^2/(m\gamma_j)$. Соотношение (11) примет вид

$$\eta q_1 \operatorname{ch}(q_2 x_2) = q_2 \operatorname{ch}(q_1 x_1), \tag{50}$$

а дисперсионное соотношение (12) —

$$q_2 \operatorname{th}(q_2 x_2) - q_1 \operatorname{th}(q_1 x_1) = \\ = 2\left\{ mU_0 + \frac{W_0 q_1^2 \operatorname{ch}^{-2}(q_1 x_1)}{\gamma_1} \right\}. \tag{51}$$

Для случая, когда характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта одинаковы ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$), $q_1 = q_2 = q$ и $A_1 = A_2$, при $x_2 = x_1 = x_0$ из (51) получается дисперсионное соотношение, определяющее энергию таких локализованных состояний:

$$mU_0 \gamma \operatorname{ch}^2(q x_0) = -W_0 q_0^2. \tag{52}$$

Для локализованных состояний в «длинноволновом» приближении при $qx_0 \ll 1$ из (52) получается выражение $q^2 = -\gamma m U_0/W_0$, которое позволяет получить энергию локализации в виде

$$E = \Omega + \frac{\gamma U_0}{2W_0}. \tag{53}$$

Видно, что в согласии с результатами разд. 4.1 локализованное состояние рассматриваемого вида существует только при противоположных знаках параметров дефекта. Следует отметить, что выражение (53) также получается из (31) при $k = 1$ и $x_{c0} = 0$.

Теперь рассмотрим симметричное локализованное состояние, для которого $x_2 = -x_1 = x_0$. Тогда из (51) получается дисперсионное соотношение, определяющее энергию таких локализованных состояний:

$$q \operatorname{th}(q x_0) = mU_0 + \frac{W_0 q^2 \operatorname{ch}^{-2}(q x_0)}{\gamma}. \tag{54}$$

В «длинноволновом» приближении при $qx_0 \ll 1$ из (54) получается выражение $q^2 = \gamma m U_0/(\gamma x_0 - W_0)$, которое позволяет записать энергию локализации в виде

$$E = \Omega - \frac{\gamma U_0}{2(W_0 - \gamma x_0)}\,. \tag{55}$$

Локализованные состояния такого типа с энергией (55) могут существовать при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > 0$ и $W_0 < \gamma x_0$, 2) $U_0 < 0$ и $W_0 > \gamma x_0$, что согласуется с результатами разд. 4.1.

В случае, когда характеристики кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта различаются ($\Omega_1 \neq \Omega_2$ и $\gamma_1 \neq \gamma_2$), в разд. 4.1 указано существование состояния, для которого $x_2 = x_1 = 0$. Тогда из (50) следует $q_2 = \eta q_1$, а из (51) находится $q_1^2 = -\gamma_1 m U_0/W_0$. Локализованное состояние такого вида может существовать только при определенной связи между параметрами кристалла и дефекта, которая следует из (30) при $k = 1$ и определяет условие локализации: $U_0/W_0 = 2(\Omega_1 - \Omega_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)$.

Периодическое состояние второго типа в кристалле с самофокусировкой, описываемое функцией (13), в пределе $k \to 1$ переходит в такое же локализованное состояние, описываемое функцией (49), поскольку $\operatorname{dn} z \to 1/\operatorname{ch} z$ и из (14) следует $q_{dj}^2 \to q_j^2$, а из (15) следует $A_{dj}^2 \to A_j^2$. Таким образом, два периодических состояния вырождаются в одно локализованное в пределе $k \to 1$.

5.2. Локализация состояний в кристалле с дефокусировкой

В случае $\gamma < 0$ и $E > \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$ периодическое состояние, описываемое решением (18), при $k = 1$ переходит в локализованное состояние, описываемое решением НУШ типа кинк:

$$\psi_j(x) = A_{tj} \operatorname{th}(q_{tj}(x - x_j)). \tag{56}$$

Здесь в пределе $k \to 1$ из (19) следует $q_{sj}^2 \to q_{tj}^2 = m(\Omega_j - E)$, а из (20) — $A_{sj}^2 \to A_{tj}^2 = q_{tj}^2/(mg_j)$. Соотношение (21) примет вид

$$\eta q_{t1} \operatorname{th}(q_{t1}x_1) = \operatorname{th}(q_{t2}x_2), \tag{57}$$

а дисперсионное соотношение (22) —

$$\frac{q_{t1}}{\operatorname{sh}(2q_{t1}x_1)} - \frac{q_{t2}}{\operatorname{sh}(2q_{t2}x_2)} = mU_0 + \frac{W_0 q_{t1}^2 \operatorname{th}^2(q_{t1}x_1)}{g_1}. \tag{58}$$

Для случая, когда все параметры сред слева и справа от границы раздела одинаковы ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $g_1 = g_2 = g$), $q_{t1} = q_{t2} = q_t$ и $A_{t1} = A_{t2}$, при $x_2 = x_1 = x_0$ из (58) получается дисперсионное уравнение:

$$mgU_0 = -W_0 q_t^2 \operatorname{th}^2(q_t x_0). \tag{59}$$

Для локализованных состояний в «длинноволновом» приближении при $q_t x_0 \ll 1$ из (59) получается выражение $q_t = (-mgU_0/W_0 x_0^2)^{1/4}$, которое позволяет получить энергию локализации в виде

$$E = \Omega + \frac{1}{x_0}\left(-\frac{gU_0}{mW_0}\right)^{1/2}. \tag{60}$$

При одинаковых параметрах кристаллов по обе стороны от плоскости дефекта и при $A_{t1} = -A_{t2}$, $x_2 = x_1 = x_0$ из (58) получается дисперсионное уравнение:

$$-\frac{2q_t}{\operatorname{sh}(2q_t x_0)} = mU_0 + \frac{W_0 q_t^2 \operatorname{ch}^{-2}(q_t x_0)}{g}. \tag{61}$$

В «длинноволновом» приближении при $q_t x_0 \ll 1$ из (61) получается выражение $q_t = \{g(1 + mU_0 x_{s0})/W_0 x_{s0}^2\}^{1/4}$, которое позволяет записать энергию локализации в виде

$$E = \Omega + \frac{1}{m}\left(-\frac{g(1 + mU_0 x_{s0})}{W_0 x_{s0}^3}\right)^{1/2}. \tag{62}$$

Следует отметить, что (62) получается напрямую из (44) при $k = 1$. Соответственно, для существования такого локализованного состояния с энергией (62) требуется выполнение таких же условий, как и для существования периодического состояния с энергией (44).

Для случая кристаллов с различной нелинейностью по разные стороны от плоскости дефекта ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), но при $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, для различных $x_2 \neq x_1$ в «длинноволновом» приближении при $q_t x_j \ll 1$ из (57) следует, что $x_2 = \eta x_1$, а из (58) получается выражение

$$q_t = \left\{\frac{g[\eta(1 - 2mU_0 x_1) - 1]}{2\eta W_0 x_1^3}\right\}^{1/4},$$

которое позволяет получить энергию локализации в виде

$$E = \Omega + \frac{1}{2}\left(g_1 \frac{\eta(1 - 2mU_0 x_1) - 1}{2\eta W_0 x_1^3}\right)^{1/2}. \tag{63}$$

Следует отметить, что выражение (63) получается напрямую из (46) при $k = 1$.

Локальные состояния, описываемые функциями (49) и (56), для случая дефекта с $U_0 = 0$ были рассмотрены в работе [29].

5.3. Локализация состояний на границе раздела самофокусирующего и дефокусирующего кристаллов

Если плоский дефект разделяет самофокусирующий (в области $x < 0$) и дефокусирующий (в области $x > 0$) кристаллы, то при $\Omega_2 < E < \Omega_1$ периодическое состояние, описываемое (26), при $k = 1$ переходит в локализованное состояние, описываемое функциями вида (49) для $j = 1$ и (56) для $j = 2$:

$$\psi_1(x) = \frac{A_1}{\operatorname{ch}(q_1(x - x_1))}, \qquad \psi_2(x) = A_{t2} \operatorname{th}(q_{t2}(x - x_2)). \tag{64}$$

В пределе $k \to 1$ соотношение (27) примет вид

$$\tilde{\eta} q_1 = -q_{t2} \operatorname{th}(q_{t2}x_2) \operatorname{ch}(q_1 x_1), \tag{65}$$

а дисперсионное соотношение (28) —

$$\frac{2q_{t2}}{\operatorname{sh}(2q_{t2}x_2)} + q_1 \operatorname{th}(q_1 x_1) = -2\left\{mU_0 + \frac{W_0 q_1^2 \operatorname{ch}^{-2}(q_1 x_1)}{\gamma_1}\right\}. \tag{66}$$

Здесь можно отметить такое состояние, для которого $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$. В этом случае в результате комбинирования (65) и (66) получается кубическое относительно q_1 уравнение:

$$aq_1^3 + q_1^2 + bq_1 - c = 0, \tag{67}$$

где

$$a = \frac{2\eta W_0}{\gamma_1(\eta^2 + 1/2)}, \quad b = \frac{2\eta m U_0}{\eta^2 + 1/2},$$
$$c = \frac{m(\Omega_1 - \Omega_2)}{\eta^2 + 1/2} > 0.$$

Положительность коэффициента c гарантирует существование хотя бы одного действительного корня уравнения (67). Подстановка корней уравнения (67) в выражение

$$E = \Omega_1 - q_1^2/2m \tag{68}$$

позволяет определить энергию локализации состояний такого вида.

В явном виде энергию локализованных состояний из уравнения (67) можно получить в некоторых предельных случаях.

1. Если энергетическая полоса существования в спектре очень узкая, когда значение Ω_1 близко к Ω_2, то получается выражение

$$q_1 = -\frac{\gamma_1(\eta^2 + 1/2)}{4\eta W_0} \times \left\{1 \pm \left[1 - \frac{16\eta m U_0 W_0}{\gamma_1(\eta^2 + 1/2)^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{69}$$

2. Если дополнительно к предыдущему условию считать очень слабым взаимодействие возбуждения с дефектом, то из (67) получается величина

$$q_1 = -\frac{\gamma_1(\eta^2 + 1/2)}{4\eta W_0}.$$

3. Если энергетическая полоса существования локализованных состояний в спектре конечна, интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом конечна, а нелинейность дефекта очень мала, то из (67) получается величина

$$q_1 = -\frac{\eta m U_0}{\eta^2 + 1/2} \times \left\{1 \pm \left[1 + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(\eta^2 + 1/2)}{m U_0^2 \eta^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{70}$$

4. Если энергетическая полоса существования локализованных состояний в спектре конечна, но оба параметра дефекта малы (что соответствует непрерывности нормальной производной поля при переходе через границу раздела сред), то из (67) получается величина

$$q_1^2 = \frac{m(\Omega_1 - \Omega_2)}{\eta^2 + 1/2},$$

определяющая энергию локализации состояния, не взаимодействующего с дефектом.

Подстановка приведенных выражений для q_1 в (68) позволят определить энергию локализованного состояния в соответствующем случае.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что вблизи тонкого плоского дефекта с нелинейными свойствами, разделяющего нелинейные кристаллы, могут существовать стационарные пространственно-неоднородные состояния нескольких типов. Такие состояния порождаются различными типами периодических решений НУШ.

Модель плоского дефекта с нелинейными свойствами включала применение потенциала с квадратичным относительно искомого поля слагаемым [24, 25]. Нахождение решений НУШ с нелинейным потенциалом сводится к решению контактной краевой задачи для НУШ без потенциала с нелинейными граничными условиями. В результате решения такой краевой задачи установлено, что граница раздела с нелинейными свойствами между нелинейными кристаллами может порождать различные типы стационарных пространственно-неоднородных периодических состояний, описывающих возбуждения сред, несимметричных относительно плоскости дефекта. Для каждого типа таких состояний получены пространственные распределения полей, амплитуда и форма которых определяется знаком нелинейности среды и диапазоном возможной энергии возбуждений.

Рассмотрение модели тонкого дефектного слоя с нелинейными свойствами, описываемого потенциалом (3), привносит новые особенности строения спектра пространственно-неоднородных периодических состояний, в отличие от модели простого дефекта, описываемого потенциалом (1). Основное различие заключается в дисперсионных уравнениях и, как следствие, в уровнях энергии и областях существования состояний. Кроме того, удалось обнаружить новые типы пространственно-неоднородных периодических состояний, существование которых обусловлено исключительно нелинейными свойствами дефекта. Полученные новые состояния возникают в случае сочетания дефокусирующей нелинейности дефекта с притяжением дефекта или в случае сочетания самофокусирующей нелинейности дефекта с отталкиванием дефекта. При этом дефект должен разделять самофокусирующие среды с различными по величине параметрами нелинейности.

Результаты, полученные в данной работе, могут служить продолжением исследований особенностей нелинейных возбуждений в средах с нелинейными дефектами, проведенных в работах [12–14,17,24–29], на случай пространственно-неоднородных периодических возмущений сред. В связи с широким применением слоистых структур, содержащих плоскопараллельные волноводы, в нелинейной оптике изучение особенностей распространения нелинейных поверхностных волн в системах с такими свойствами имеет большое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Паняев, Д. Г. Санников, Компьютерная оптика **41**, 183 (2017).
2. Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Ю. В. Кузьменко, ЖЭТФ **88**, 107 (1985).
3. Y. V. Bludov, D. A. Smirnova, Y. S. Kivshar, N. M. R. Peres, and M. I. Vasilevsky, Phys. Rev. B **89**, 035406 (2014).
4. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, ФНТ **23**, 197 (1997).
5. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. A. Zharov, A. D. Boardman, and P. Egan, Phys. Rev. E **69**, 016617 (2004).
6. В. И. Горенцвейг, Ю. С. Кившарь, А. М. Косевич, Е. С. Сыркин, ФНТ **16**, 1472 (1990).
7. С. Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **19**, 567 (2017).
8. Д. Михалаке, Р. Г. Назмитдинов, В. К. Федянин, ЭЧАЯ **20**, 198 (1989).
9. H. S. Ashour and A. I. Assa'd, Journal of Al Azhar University-Gaza (Natural Sciences) **13**, 93 (2011).
10. I. S. Panyaev, N. N. Dadoenkova, Yu. S. Dadoenkova, I. A. Rozhleys, M. Krawczyk, I. L. Lyubchanckii, and D. G. Sannikov, J. Phys. D: Appl. Phys. **49**, 435103 (2016).
11. F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, and B. A. Umarov, Opt. Comm. **156**, 341 (1998).
12. С. Е. Савотченко, Изв. вузов. Физика **47**, 79 (2004).
13. С. Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **19**, 291 (2017).
14. С. Е. Савотченко, ЖТФ **62**, 1776 (2017).
15. Y. S. Kivshar, A. M. Kosevich, and O. A. Chubykalo, Phys. Rev. A **41**, 1677 (1990).
16. И. В. Герасимчук, Ю. И. Горобец, В. С. Герасимчук, Ж. нано- и электрон. физ. **8**, 02020 (2016).
17. И. В. Герасимчук, Ж. нано- и электрон. физ. **4**, 04024 (2012).
18. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Physica D **3**, 363 (1981).
19. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наук. думка, Киев (1983).
20. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наук. думка, Киев (1989).
21. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 119 (1990).
22. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 1, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, УрО РАН, Екатеринбург (2009).
23. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Acad. Press, San Diego (2003).
24. I. V. Gerasimchuk, P. K. Gorbach, and P. P. Dovhopolyi, Ukr. J. Phys. **57**, 678 (2012).
25. И. В. Герасимчук, ЖЭТФ **121**, 596 (2015).
26. A. A. Sukhorukov and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **87**, 083901 (2001).
27. Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, Rev. Mod. Phys. **83**, 247 (2011).
28. С. Е. Савотченко, Письма в ЖЭТФ **107**, 481 (2018).
29. S. E. Savotchenko, Mod. Phys. Lett. B **32**, 1850120 (2018).