

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ГЕНЕРАЦИИ ИМПУЛЬСОВ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

А. А. Ростунцова^{a}, Н. М. Рыскин^{a,b**}*

^a *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

^b *Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова
Российской академии наук
410019, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2018 г.

Явление сверхизлучения электронных сгустков является перспективным методом генерации мощных ультракоротких электромагнитных импульсов. В настоящей работе показано, что уравнения, описывающие взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной в генераторе типа лампы обратной волны, допускают автомодельное решение, описывающее усиливающийся и сжимающийся импульс. Путем численного моделирования продемонстрировано, что процесс генерации коротких импульсов сверхизлучения на начальной стадии переходного процесса носит автомодельный характер. Исследованы особенности зависимостей основных характеристик таких импульсов (амплитуды и ширины импульса, координаты максимума) от времени и управляющих параметров. Показано, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию, когда амплитуда импульса и величина, обратная квадрату его ширины, растут линейно с течением времени.

DOI: 10.1134/S0044451018100012

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о взаимодействии мощных ультракоротких электромагнитных импульсов с электронными потоками в последние годы привлекли большое внимание. В основе методов генерации подобных импульсов лежит эффект сверхизлучения электронных сгустков [1, 2]. На возможность получения в релятивистской лампе обратной волны (ЛОВ) резкого начального всплеска амплитуды поля с мощностью, значительно превышающей среднюю мощность в стационарном режиме генерации, было впервые обращено внимание в работе [3]. Впоследствии были созданы источники ультракоротких электромагнитных импульсов с высокой пиковой мощностью, превышающей среднюю мощность электронного потока [4]. Генерация подобных импульсов важна для таких направлений, как создание радиолокации большой дальности, изучение физики элект-

тровзрывов проводников и детонационных процессов, различные биофизические исследования, диагностика плазмы [5]. К числу других актуальных задач можно отнести изучение самоиндуцированной прозрачности, нелинейной самокомпрессии импульсов, образования электромагнитных солитонов и т. д. [1, 2, 6, 7]. В связи с этим большой интерес представляет разработка способов увеличения пиковой мощности импульсов, а также сокращения их эффективной длительности.

Результаты исследования усиления и компрессии коротких электромагнитных импульсов, распространяющихся вдоль квазистационарных прямолинейных электронных потоков, показывают, что эти процессы носят явно выраженный автомодельный характер [1, 8–10], причем такое поведение типично для многих механизмов взаимодействия, включая черенковский, циклотронный (мазеры на циклотронном резонансе), ондуляторный (лазеры на свободных электронах), а также нормальный и аномальный эффекты Доплера. В данной работе анализируется автомодельный характер генерации коротких импульсов сверхизлучения в ЛОВ. Автомо-

* E-mail: rostuncova@mail.ru

** E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

дельные решения, описывающие усиление импульсов попутной волной [1, 8], адаптированы для случая, когда электронный поток взаимодействует с обратной волной. Показано, что они хорошо согласуются с результатами численного моделирования импульса, генерируемого на начальной стадии переходного процесса в ЛОВ.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛОВ И ИХ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Принцип работы ЛОВ основан на взаимодействии прямолинейного электронного потока, движущегося сквозь волноведущую систему, с обратной пространственной гармоникой поля замедленной электромагнитной волны. Фазовая скорость волны равна скорости электронного потока, а групповая скорость направлена навстречу, что создает внутреннюю положительную обратную связь, причем эта связь распределена во всем пространстве взаимодействия.

Будем использовать известные уравнения нелинейной нестационарной теории ЛОВ [3, 11, 12]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -\operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -I, \quad (2)$$

где θ — фаза электрона относительно фазы волны, F — безразмерная амплитуда поля, ξ и τ — безразмерные соответственно координата и время,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0 \quad (3)$$

— нормированная амплитуда гармоники высокочастотного тока, θ_0 — начальная фаза электрона.

Уравнения (1)–(3) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Если на вход пространства взаимодействия поступает пучок электронов, не модулированный ни по скорости, ни по плотности, то граничные условия для электронов имеют вид

$$\theta(\xi = 0) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi = 0) = 0. \quad (4)$$

Еще одно граничное условие отражает отсутствие поля на правой границе системы:

$$F(\xi = L) = 0, \quad (5)$$

где L — безразмерная длина системы.

Также необходимо задать начальное распределение поля вдоль системы. Следуя работе [3], будем выбирать его в виде

$$F(\xi, \tau = 0) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq \xi \leq 0.9L, \\ F_0 \sin^2 \left[\frac{5\pi}{L}(L - \xi) \right], & 0.9L \leq \xi \leq L, \end{cases} \quad (6)$$

где $F_0 = \text{const}$.

Под автомодельными понимают решения, зависящие от переменных ξ и τ в определенной комбинации, $\eta = \eta(\xi, \tau)$ [13, 14]. Получить нужную комбинацию переменных проще всего, находя масштабно-инвариантные преобразования, которые оставляют исходные уравнения неизменными. Введем новые переменные

$$Z = e^{i\theta}, \quad V = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= iZV, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\operatorname{Re}(FZ) = \\ &= -\frac{1}{2}(FZ + F^*Z^*). \end{aligned} \quad (8)$$

Введем вместо ξ и τ новые переменные $\xi' = \xi + \tau$, $\tau' = \tau$, что позволяет переписать уравнение возбуждения (2) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \tau'} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z^* d\theta_0. \quad (9)$$

Уравнения (8) своего вида не изменят.

Применяя к уравнениям (8), (9) преобразование растяжения

$$F \rightarrow \mu^a F, \quad V \rightarrow \mu^b V, \quad \xi' \rightarrow \mu^c \xi', \quad \tau' \rightarrow \mu \tau', \quad (10)$$

где μ — свободный параметр, a, b, c — некоторые константы, получим

$$\begin{aligned} \mu^{b-c} \frac{\partial V}{\partial \xi'} &= -\frac{1}{2} \mu^a (FZ + F^*Z^*), \\ \mu^{-c} \frac{\partial Z}{\partial \xi'} &= i\mu^b ZV, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mu^{a-1} \frac{\partial F}{\partial \tau'} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z^* d\theta_0.$$

Нетрудно видеть, что при выборе $a = 1, b = 1/2, c = -1/2$ члены, содержащие параметр μ , сокращаются, т. е. уравнения (8), (9) будут инвариантными относительно преобразования (10),

$$F \rightarrow \mu F, \quad V \rightarrow \mu^{1/2} V, \quad \xi' \rightarrow \mu^{-1/2} \xi', \quad \tau' \rightarrow \mu \tau'. \quad (12)$$

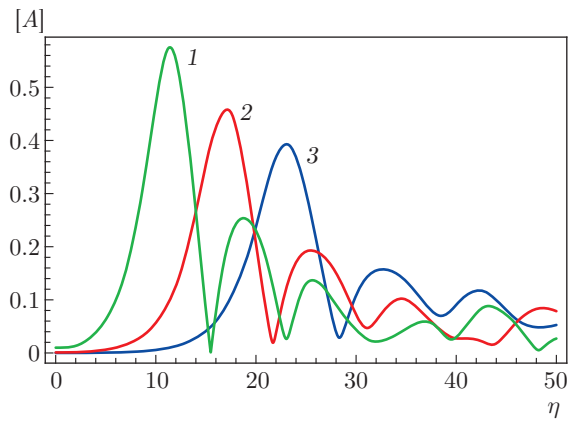


Рис. 1. (В цвете онлайн) Вид автомодельного решения для $A_0 = 10^{-2}$ (кривая 1), 10^{-3} (кривая 2) и 10^{-4} (кривая 3)

Отсюда следует, что уравнения (1), (2) допускают автомодельную подстановку вида

$$\eta = \sqrt{\tau}(\xi + \tau), \quad F(\xi, \tau) = \tau A(\eta), \quad \theta(\xi, \tau) = \vartheta(\eta). \quad (13)$$

Действительно, подставляя (13) в уравнения (1), (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} &= -\operatorname{Re}(Ae^{i\vartheta}), \\ \frac{dA}{d\eta} &= -\frac{2}{\eta} \left(A + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} d\vartheta_0 \right), \end{aligned} \quad (14)$$

которая описывает автомодельные решения исходных уравнений. Ее необходимо дополнить граничным условием, которое ставится исходя из требования устранения сингулярности при $\eta = 0$ [8, 10]:

$$A(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta(0)} d\vartheta_0. \quad (15)$$

Если задать начальное возмущение в виде модуляции по фазам электронов,

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 + A_0 \sin(\vartheta_0), \quad (16)$$

то из уравнения (15) получим

$$A(0) = -2J_1(A_0), \quad (17)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка. Естественно считать начальное возмущение малым, $A_0 \ll 1$; тогда из (17) следует, что $A(0) \approx -A_0$.

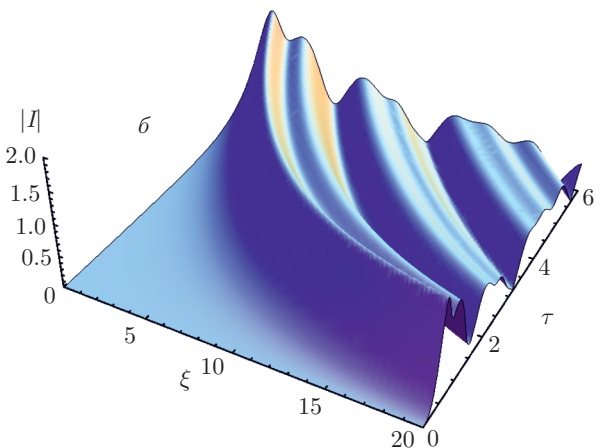
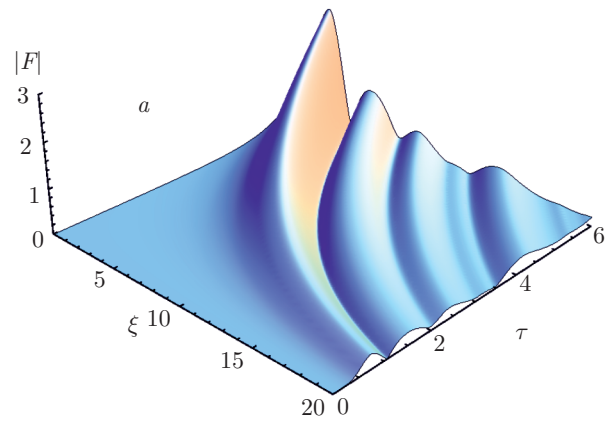


Рис. 2. (В цвете онлайн) Пространственно-временные распределения амплитуды поля (а) и гармоники тока (б) для автомодельного решения ($A_0 = 10^{-3}$)

Вид решения системы (14) с граничными условиями (16), (17) при различных значениях A_0 представлен на рис. 1. Решение представляет собой импульс, за которым тянется шлейф в виде затухающих осцилляций. С ростом амплитуды начального возмущения амплитуда импульса увеличивается.

На рис. 2а автомодельное решение перестроено в исходных переменных $F(\xi, \tau)$. В соответствии с видом автомодельной подстановки (13) амплитуда импульса линейно растет с увеличением τ , а его ширина уменьшается пропорционально $\tau^{-1/2}$. На рис. 2б приведена соответствующая картина для гармоники тока $I(\xi, \tau)$.

Очевидно, что аналогичные решения можно найти и для случая взаимодействия с попутной волной в усилителе типа лампы бегущей волны (ЛБВ). При этом автомодельная переменная вводится как $\eta = \sqrt{\tau}(\xi - \tau)$ (ср. [8, 9]). Однако в случае ЛБВ такое

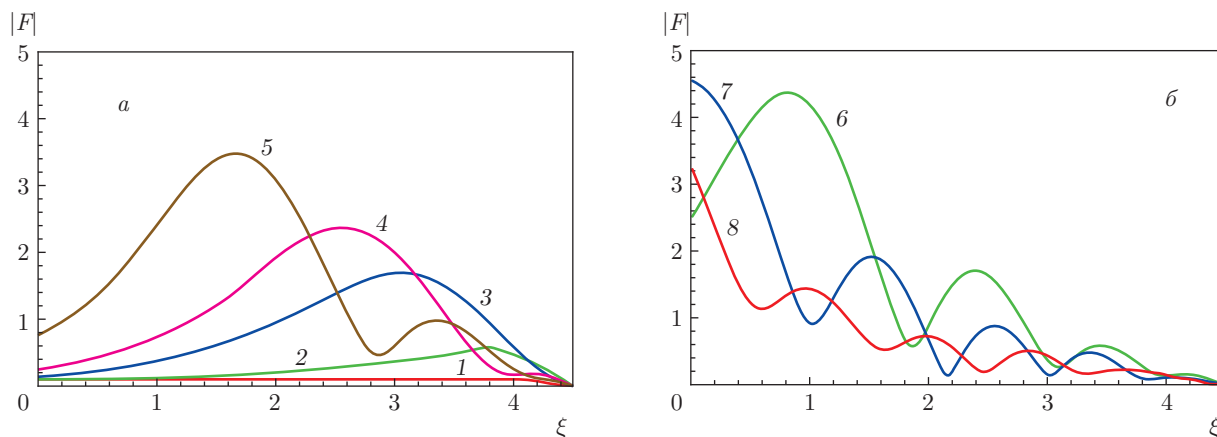


Рис. 3. (В цвете онлайн) Распределения амплитуды поля вдоль системы при $L = 4.5$, $F_0 = 0.1$ в различные моменты времени: *a* — $\tau = 0$ (кривая 1), 0.7 (кривая 2), 1.9 (кривая 3), 2.5 (кривая 4), 3.5 (кривая 5); *b* — $\tau = 4.5$ (кривая 6), 5.5 (кривая 7), 6 (кривая 8)

решение описывает усиление и компрессию импульса в полубезграничной среде, тогда как для ЛОВ ограниченность в пространстве является принципиальной (см. граничные условия (4), (5)). Поэтому физический смысл автомодельных решений нуждается в более глубоком исследовании.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

В данном разделе при помощи численного моделирования уравнений (1)–(3) с граничными и начальными условиями (4)–(6) подтвердим гипотезу о том, что процесс генерации импульса сверхизлучения в ЛОВ описывается найденным выше автомодельным решением. Рисунок 3 демонстрирует типичный пример процесса зарождения и распространения импульса на начальной стадии переходного процесса в ЛОВ. Кривая 1 отображает начальное распределение амплитуды поля вдоль системы. С течением времени после некоторого переходного процесса у правой границы системы зарождается импульс (кривые 2, 3), который начинает двигаться к ее левому концу (кривые 4–7). Видно, что в процессе распространения амплитуда импульса увеличивается, а ширина уменьшается. Дойдя до левой границы системы, импульс ее покидает (кривая 8). После этого вблизи правой границы начинается формирование нового импульса, и описанный выше процесс повторяется [3, 12].

На рис. 4 приведены зависимости амплитуды импульса от времени при различных значениях нормированной длины системы L ; начальная амплитуда

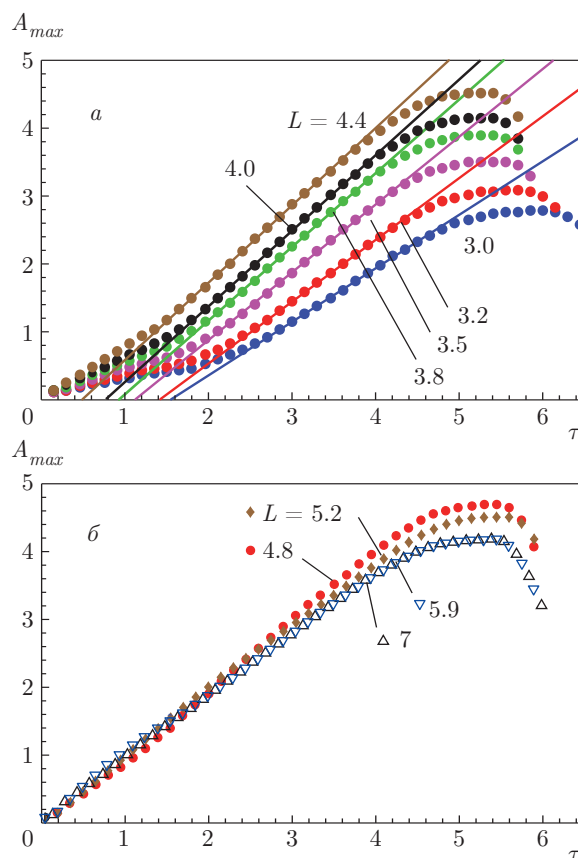


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости амплитуды импульса от времени для различных значений параметра L при $F_0 = 0.1$. Кружками показаны результаты численного моделирования, сплошными линиями — результаты аппроксимации линейных участков

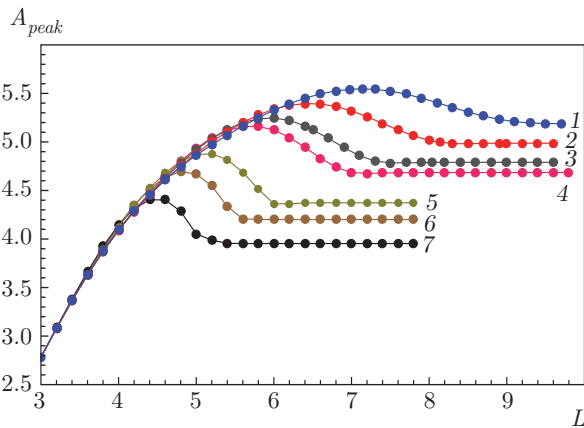


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости пикового значения выходного сигнала от длины системы при $F_0 = 10^{-4}$ (кривая 1), 10^{-3} (кривая 2), $5 \cdot 10^{-3}$ (кривая 3), 10^{-2} (кривая 4), $5 \cdot 10^{-2}$ (кривая 5), 10^{-1} (кривая 6), $2 \cdot 10^{-1}$ (кривая 7)

$F_0 = 0.1$. При каждом значении L можно выделить переходную стадию, затем участок линейного нарастания, который, согласно (13), соответствует автомодельному характеру распространения импульса, и, наконец, состояние «насыщения», когда импульс покидает систему через левую границу. На этой стадии амплитуда выходного сигнала достигает своего пикового значения A_{peak} . С увеличением параметра L угол наклона прямой, соответствующей автомодельной стадии, увеличивается, а значение A_{peak} растет (рис. 4а). Однако рост продолжается, только пока L не превысит некоторое критическое значение L_c (при данном F_0 имеем $L_c \approx 4.4-4.8$). При $L > L_c$ скорость роста и пиковое значение амплитуды, наоборот, несколько уменьшаются, а затем стремятся к постоянному значению (рис. 4б). После этого зависимость $A_{max}(\tau)$ начинает в точности повторяться за исключением начальной стадии переходного процесса. Аналогичный характер зависимостей $A_{max}(\tau)$ наблюдается и для других начальных амплитуд F_0 , вплоть до значений, приближающихся к единице, рассматривать которые, очевидно, уже не имеет смысла.

На рис. 5 приведены зависимости A_{peak} от длины системы L при различных значениях F_0 . С ростом F_0 насыщение этих зависимостей происходит при все меньших значениях L , а сами значения, к которым стремится пиковая амплитуда, также уменьшаются. Такое поведение обусловлено усложнением характера переходного процесса: при достаточно больших длинах системы формирование второго импульса начинается еще до того, как первый импульс покинет систему [15]. На рис. 6 представлены

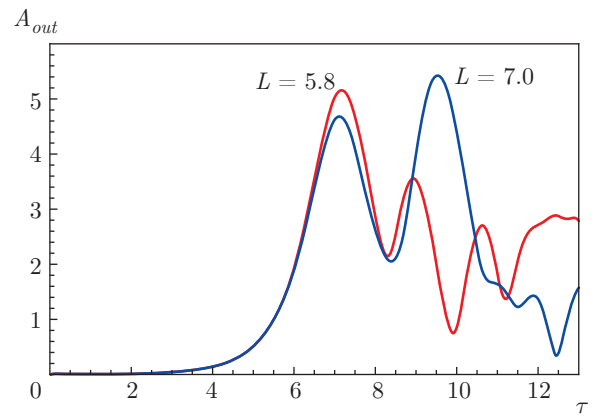


Рис. 6. (В цвете онлайн) Зависимости амплитуды выходного сигнала от времени при различных длинах системы ($F_0 = 0.01$)

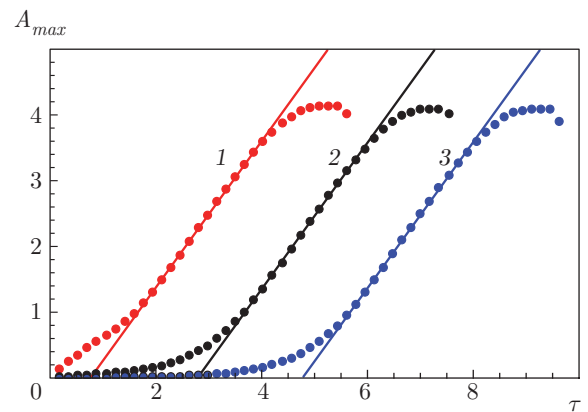


Рис. 7. (В цвете онлайн) Зависимости амплитуды импульса от времени при $L = 4.0$ и $F_0 = 10^{-1}$ (кривая 1), 10^{-2} (кривая 2), 10^{-3} (кривая 3)

осциллограммы выходного сигнала на стадии переходного процесса в ЛОВ, на которых видно, что при увеличении длины системы второй пик возрастает и начинает превосходить первый. Наличие второго пика приводит к тому, что характеристики первого импульса перестают зависеть от длины системы: при увеличении L продолжает возрастать только амплитуда второго пика.

Вообще говоря, начальные условия (16), (17) для автомодельного решения не согласуются с начальными и граничными условиями (4)–(6) исходной системы уравнений. Однако при произвольных начальных условиях по окончании переходного процесса решение системы (1)–(3) должно выходить на автомодельную стадию. Из рис. 7 видно, что с увеличением F_0 длительность переходного процесса сокращается.

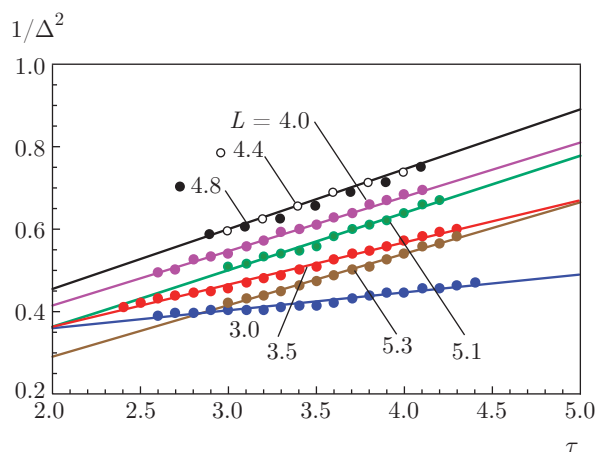


Рис. 8. (В цвете онлайн) Зависимости квадрата обратной ширины импульса от времени на автомодельной стадии при $F_0 = 0.1$

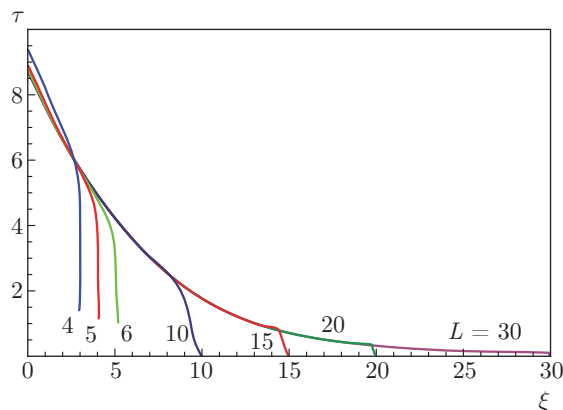


Рис. 9. (В цвете онлайн) Зависимости координаты максимума импульса от времени при $F_0 = 10^{-3}$

Зависимости от времени других характеристик импульса, таких как ширина Δ и координата максимума, также имеют выраженную автомодельную стадию. Действительно, согласно (13), ширина импульса зависит от времени как $\Delta \sim 1/\sqrt{\tau}$. На рис. 8 приведены зависимости от времени величины $1/\Delta^2$ на автомодельной стадии (ширина импульса определялась по уровню $|F|^2 = |F_{max}|^2/2$). Видно, что эти зависимости являются линейными. Как и в случае с амплитудой импульса (см. рис. 4), угол наклона прямой растет при увеличении длины системы до $L \approx 4.4-4.8$, т. е. при таких значениях L достигается минимальная ширина импульса. После этого угол наклона перестает меняться, а прямая в целом опускается вниз.

Аналогичная динамика поведения с увеличением длины системы наблюдается и для зависимости ко-

ординаты максимума импульса от времени (рис. 9): при больших L кривые отличаются друг от друга только переходной стадией, после которой стремятся к асимптотической зависимости

$$\xi_{max} = \xi_0 - V\tau + \frac{\eta_0}{\sqrt{\tau}}, \quad (18)$$

где при выбранных значениях параметров $\xi_0 \approx 3.23$, $V \approx 0.8$, $\eta_0 \approx 0.07$. Малое значение начальной амплитуды $F_0 = 10^{-3}$ при построении рис. 9 выбрано для того, чтобы более наглядно пронаблюдать динамику импульса перед выходом на автомодельную стадию. Значение параметра V оказывается несколько меньше единицы, что обусловлено влиянием обсуждавшихся выше вторичных импульсов при больших значениях L .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что система уравнений, описывающая нестационарное взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной, допускает автомодельное решение, которое описывает генерацию мощного короткого импульса сверхизлучения. Согласно найденной автомодельной подстановке, амплитуда этого импульса линейно растет с увеличением времени τ , а его ширина сокращается пропорционально $\tau^{-1/2}$.

Проведено сопоставление с результатами численного моделирования, которое показало, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию. На этой стадии основные характеристики импульса ведут себя в соответствии с найденным автомодельным решением. Однако особенности системы (граничные условия для пучка и поля ставятся на разных границах, т. е. система принципиально ограничена в пространстве) накладывают определенную специфику на процесс распространения импульса при увеличении безразмерной длины L . Пока этот параметр не превышает некоторого критического значения L_c , рост длины системы сопровождается увеличением пикового значения выходного сигнала, а также возрастанием угла наклона прямой, соответствующей автомодельной стадии на графике зависимости амплитуды импульса от времени (т. е. увеличивается скорость ее роста). При $L > L_c$ эти характеристики перестают меняться, т. е. процесс автомодельного распространения импульса в системе перестает зависеть от ее длины (за исключением начальной переходной стадии). Последний эффект связан

с усложнением формы образующегося импульса сверхизлучения: импульс становится многопиковым за счет того, что происходит зарождение вторичных импульсов, прежде чем первый успевает покинуть систему. При этом с ростом начального возмущения F_0 значение L_c уменьшается и «насыщение» зависимостей наступает раньше, а сами значения, к которым стремится пиковая амплитуда, также уменьшаются.

Авторы благодарят Н. С. Гинзбурга и И. В. Зотову за внимание к работе и стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. С. Сергеев и др., Изв. вузов, радиофизика **54**, 588 (2011).
2. N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, A. W. Cross et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **41**, 646 (2013).
3. Н. С. Гинзбург, С. П. Кузнецов, Т. Н. Федосеева, Изв. вузов, радиофизика **21**, 1037 (1978).
4. А. А. Ельчанинов, С. Д. Коровин, В. В. Ростов и др., Письма в ЖЭТФ **77**, 314 (2003).
5. Г. А. Месяц, М. И. Яландин, УФН **175**, 211 (2005).
6. М. И. Яландин, А. Г. Реутова, М. Р. Ульмаскулов и др., Письма в ЖЭТФ **91**, 620 (2010).
7. Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. С. Сергеев, ЖЭТФ **140**, 890 (2011).
8. Н. М. Рыскин, Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, Письма в ЖТФ **39**(9), 86 (2013).
9. N. M. Ryskin, N. S. Ginzburg, and I. V. Zotova, in *Proc. 14th Internat. Vacuum Electronics Conf. IVEC 2013*, Paris, France (2013), No. 6570957.
10. N. M. Ryskin, Comm. Nonlinear Sci. Numerical Simulat. **19**, 2942 (2014).
11. Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков*, Физматлит, Москва (2003).
12. С. П. Кузнецов, Изв. вузов, прикладная нелинейная динамика **14**(4), 3 (2006).
13. Г. И. Баренблатт, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика (теория и приложения к геофизической гидродинамике)*, Гидрометеорологический издат, Ленинград (1982).
14. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, Физматлит, Москва (2005).
15. I. V. Bandurkin and A. V. Savilov, Appl. Phys. Lett. **99**, 193506 (2011).