

О РАВНОВЕСНОМ СОСТОЯНИИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

*Б. Э. Мейерович**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 января 2018 г.

Обсуждаются свойства скалярного поля, находящегося в состоянии равновесия со своим собственным гравитационным полем. Скалярное поле служит волновой функцией конденсата Бозе – Эйнштейна, находящегося в состоянии равновесия при температуре, близкой к абсолютному нулю. Волновая функция лабораторного конденсата Бозе – Эйнштейна удовлетворяет уравнению Гросса – Питаевского. Предметом применения теории гравитирующих скоплений фермионов и бозонов являются сверхтяжелые объекты (наиболее вероятно — черные дыры), находящиеся в центрах галактик. В отличие от лабораторного эксперимента, энергетический спектр гравитирующих бозонов является функционалом волновой функции всего конденсата в целом. Само наличие уровня зависит от его заселенности. В частности, при нулевой температуре для каждого уровня существует предельное значение полной массы M_{cr} , с превышением которого равновесной конфигурации (а значит, и данного уровня) не существует. Критическая масса M_{cr} растет пропорционально номеру уровня. При $M > M_{cr}$ роль основного состояния играет следующий уровень. Видоизменяется само понятие об основном состоянии системы бозонов. Радиус сферы, занимаемой конденсатом, тоже увеличивается пропорционально номеру уровня, поэтому с увеличением массы конденсата плотность не растет. Покуда расстояние между соседними энергетическими уровнями велико по сравнению с температурой, ограничений на полную массу не возникает. С энергетической точки зрения один сгусток бозонов на высоком квантовом уровне с большой массой является менее выгодным, чем несколько изолированных центров, в каждом по конденсату на нулевом квантовом уровне.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. П. Питаевского

DOI: 10.1134/S004445101811010X

1. ВВЕДЕНИЕ

В основополагающих работах Чандрасекара [1], Ландау [2], Оппенгеймера и Волкова [3] было установлено существование предельной массы гравитирующих центрально-симметричных ферми-систем. Сверх предельной массы статическое равновесное состояние невозможно. Преобладающие силы гравитационного притяжения делают сжатие материи неограниченным. Для вырожденного ферми-газа нейтронов предельная масса порядка массы Солнца M_{\odot} .

Астрофизические наблюдения указывают на существование сверхмассивных объектов в центрах галактик. В нашем Млечном Пути существует невидимый объект, расположенный в том же месте, где

и радиоисточник «Стрелец А». По орбитальному движению звезд астрономы оценивают его массу до $4.3 \cdot 10^6 M_{\odot}$, и его радиус менее 0.002 светового года [4]. Поскольку масса объекта в центре галактики на шесть порядков превышает предельную равновесную массу нейтронной звезды, в качестве наиболее вероятных кандидатов на сверхмассивные объекты в центрах галактик рассматриваются черные дыры.

Черная дыра — это процесс неограниченного сжатия (коллапса) материи под действием доминирующих сил со стороны собственного гравитационного поля. И хотя у нас нет прямой возможности наблюдать, что делается за горизонтом, естественно считать, что при сжатии давление неограниченно растет, и энергия в расчете на частицу неизбежно достигнет энергии связи «элементарных частиц» в нейтронах, или в их составных компонентах. Согласно «Стандартной модели» [5] (рис. 1), среди «эле-

* E-mail: meierovich@mail.ru

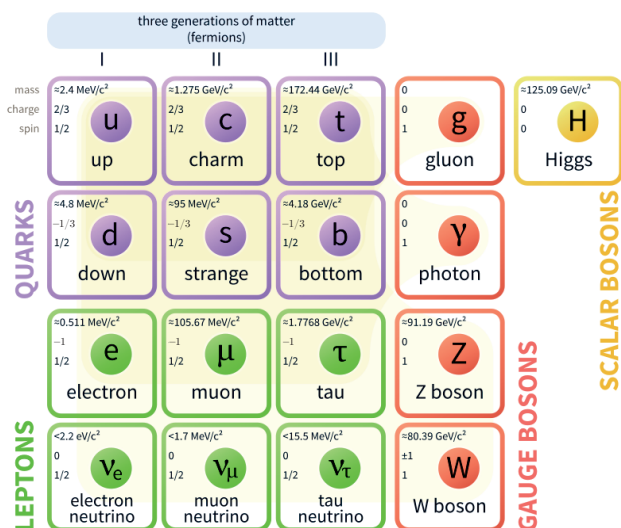


Рис. 1. Стандартная модель элементарных частиц [5]

ментарных частиц» есть как фермионы, так и бозоны.

В то же время, время существования галактик (стало быть и черных дыр в их центрах) порядка времени существования Вселенной. При относительно медленной эволюции черной дыры локально равновесные концентрации частиц, вступающих в «химические реакции» превращения одних в другие, зависят от температуры и давления, и не зависят от конкретных каналов реакции.

Один из важнейших не выясненных до сих пор вопросов — это обратное влияние превращения одних частиц в другие на процесс гравитационного самосжатия. То что время жизни галактики с коллапсаром в центре порядка времени существования Вселенной, наводит на мысль, что превращения одних частиц в другие могут замедлить процесс сжатия, а то и вовсе остановить его. В этом состоит смысл поиска и анализа статических конфигураций гравитирующих объектов в общей теории относительности.

В качестве объектов, структура которых определяется состоянием равновесия в собственном гравитационном поле, рассматриваются черные дыры, нейтронные звезды, а также такие экзотические объекты, как кварковые [6, 7] и бозонные [8–11] звезды. Ферми-системы, обладающие дополнительной упругостью в силу принципа Паули, способны противостоять гравитационному сжатию. Давление, связанное со слабой неидеальностью бозе-газа, пренебрежимо мало по сравнению с давлением вырожденного ферми-газа.

В теории равновесия кварковых звезд узким местом является отсутствие уравнения состояния смеси нейтронов и кварков, выведенного *ab initio* [7]. При равновесии гравитирующих скоплений бозонных частиц эта проблема не возникает. При температуре близкой к абсолютному нулю большинство бозонов в состоянии равновесия находятся в основном состоянии, т. е. на квантовом уровне с наименьшей энергией. Скопление бозонов на квантовом уровне минимально возможной энергии называют конденсатом Бозе–Эйнштейна. Природа сделала физикам замечательный подарок: при абсолютном нуле волновой функцией ультраквантового конденсата нейтральных бозонов является классическое скалярное поле (см. [12], § 30). Тензор энергии-импульса скалярного поля хорошо известен, и, в отличие от смеси фермионов, проблем с уравнением состояния не возникает. Гравитационные свойства конденсата Бозе–Эйнштейна представляют самостоятельный интерес. Модельных предположений, не следующих из теории, не требуется.

В настоящей работе рассматриваются равновесные конфигурации гравитирующего нейтрального бозе-конденсата при нулевой температуре. Точнее, при температуре малой по сравнению с расстоянием между основным и соседним энергетическими уровнями. Для полноты картины в разд. 2 кратко обсуждаются свойства конденсата в лабораторном эксперименте. Детальный анализ лабораторных наблюдений конденсата Бозе–Эйнштейна в теоретическом аспекте приведен в обзорной статье [13]. Специфические отличия гравитирующего конденсата от лабораторного обсуждаются в разд. 3. В разд. 4 упоминается общий подход к описанию состояния равновесия центрально-симметричных гравитирующих систем, как фермионов, так и бозонов. Для сравнения вырожденных бозе- и ферми-систем в разд. 5 кратко изложен анализ состояния равновесия гравитирующих ферми-частиц. Подробный анализ равновесной структуры гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна содержится в разд. 6.

2. КОНДЕНСАТ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА В ЛАБОРАТОРИИ

Первые лабораторные наблюдения конденсата Бозе–Эйнштейна в парах рубидия [14] и в парах натрия [15] в охлажденных до крайне низких температур магнитных ловушках оживили теоретические исследования этого квантового макроскопического явления.

В приложениях к бозе-системам центральное место в задачах на собственные значения занимает нелинейное уравнение Гросса–Питаевского. Нелинейные уравнения на собственные значения исследовались Гинзбургом и Питаевским в теории сверхтекучести [16] и Питаевским при макроскопическом описании вихревой нити [17].

В лабораторных экспериментах газ бозонов удерживается от разлета внешним магнитным полем. В приближении идеального бозе-газа спектр финитного движения частиц внутри сосуда задается внешними полями и не зависит от числа частиц. При макроскопически большом числе частиц N , когда расстояние между энергетическими уровнями мало по сравнению с температурой, заселенность близких уровней почти одинакова. С понижением температуры заселенность низких уровней растет. В пределе $T = 0$ все бозоны оказываются в основном состоянии. При макроскопически большом, но конечном N конденсация частиц в основном состоянии при понижении температуры носит характер фазового перехода второго рода. Параметром порядка является волновая функция конгломерата бозонов в основном состоянии, т. е. конденсата Бозе–Эйнштейна. Наблюдаемая экспериментально температура перехода T_c выражена тем резче, чем больше полное число частиц N .

Без учета парных столкновений частиц размер области пространства, занимаемой конденсатом, ограничивается областью финитного движения бозонов в основном состоянии. В лаборатории основной уровень и область пространственной локализации определяются удерживающим частицы внешним полем, и не зависят от числа невзаимодействующих друг с другом бозонов. С учетом неидеальности газа бозонов размер конденсата либо увеличивается (при слабом отталкивании частиц), либо уменьшается (при притяжении). Если парное взаимодействие носит характер притяжения, то с увеличением числа частиц концентрация растет, а область локализации сужается к центру. Когда число частиц N превысит критическое значение N_{cr} (свое для данного вида атомов и свойств ловушки), произойдет коллапс. Приближение почти идеального газа бозонов применимо, если длина s -рассеяния при парных столкновениях частиц мала по сравнению со средним расстоянием между ними. Оно неприменимо для описания конденсата при $N > N_{cr}$.

ψ -функцией конденсата Бозе–Эйнштейна при абсолютном нуле является классическое поле. В приближении почти идеального бозе-газа нейтральных частиц без спина волновая функция конденса-

та $\psi(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_b} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi|^2 \right) \psi. \quad (1)$$

Здесь $V_{ext}(\mathbf{r})$ — потенциал внешнего поля, удерживающего атомы от разлета, g — константа связи, выраженная через амплитуду (длину) s -рассеяния a бозонов друг на друге: $g = 4\pi\hbar^2 a/m_b$.

Уравнение Гросса–Питаевского (1) было выведено независимо Питаевским [17] и Гроссом [18] в 1961 г. Оно применимо, если длина s -рассеяния a много меньше среднего расстояния между бозонами, а число бозонов в конденсате $N \gg 1$. Если слабое парное взаимодействие атомов носит характер притяжения, то при $N > N_{cr}$ уравнение Гросса–Питаевского не имеет такого статического решения, в котором все бозоны находились бы в основном состоянии потенциала $V_{ext}(\mathbf{r})$. Без внешнего удержания, т. е. в однородном неидеальном газе с притяжением, конденсат вообще неустойчив.

3. СПЕЦИФИКА ГРАВИТИРУЮЩЕГО КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Вопрос о равновесной структуре гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна — это та же нелинейная задача на собственные значения, что и в случае слабонеидеального бозе-газа с притяжением в лаборатории. Разница в том, что нелинейность связана не с неидеальностью газа бозонов, а с удержанием частиц от разлета их же собственным гравитационным полем. Разумеется, собственное гравитационное поле, самостоятельно удерживающее бозоны от разлета, предполагается доминирующим.

В лабораторном эксперименте в приближении слабонеидеального газа спектр задается внешним полем и строением ловушки. Энергетический спектр не зависит ни от числа частиц, ни от заселенности уровней. А при удержании только собственным гравитационным полем даже само наличие равновесного уровня зависит от его заселенности. При нулевой температуре уровень минимально возможной энергии определяется согласованно с ψ -функцией сразу всего конденсата.

Собственное гравитационное поле зависит от числа создающих его частиц, а значит, и от полной массы M . Поэтому спектр равновесных состояний тоже зависит от полной массы. Как и в линейной задаче, имеется дискретный набор уровней. На нулевом уровне волновая функция не меняет знак.

На первом уровне меняет знак один раз. На втором — два раза, и т. д. Нелинейность приводит к тому, что для n -го уровня существует критическая масса $M_{cr\ n}$, сверх которой равновесное состояние всех бозонов на уровне n невозможно. Если полная масса порядка критической, то гравитационное поле не является слабым. Необходимо в полной мере использовать аппарат общей теории относительности. Ниже, в разд. 6.6 показано, что $M_{cr\ n+1} > M_{cr\ n}$, причем критическая масса $M_{cr\ n}$ линейно растет с номером уровня при $n \gg 1$.

При абсолютном нуле все бозоны в равновесном состоянии располагаются в основном состоянии, т. е. на минимально возможном энергетическом уровне. В интервале масс $0 < M < M_{cr\ 0}$ основным состоянием является нулевой уровень, волновая функция которого не меняет знак. Если $M > M_{cr\ 0}$, то на нулевом уровне состояние равновесия невозможно. Зато при $M < M_{cr\ 1}$ равновесное состояние возможно на первом уровне, поэтому в интервале масс $M_{cr\ 0} < M < M_{cr\ 1}$ равновесным состоянием с минимальной энергией является первый уровень. Это значит, что в интервале масс $M_{cr\ 0} < M < M_{cr\ 1}$ не нулевой, а первый уровень, волновая функция которого меняет знак один раз, фактически играет роль основного состояния и т. д.

По сути дела, невозможность состояния равновесия на нулевом уровне (с волновой функцией без узлов) не означает, что при $M > M_{cr\ 0}$ равновесного состояния вообще не может быть. С ростом массы сверх критического значения $M_{cr\ n}$ осуществимым равновесным состоянием с минимумом энергии становится следующий уровень $n + 1$.

Не следует путать спектр макроскопических равновесных конфигураций гравитирующего конденсата бозонов со спектром элементарных возбуждений при микроскопическом описании лабораторного конденсата Бозе – Эйнштейна.

4. СТАНДАРТНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ МАТЕРИИ

В рамках стандартного подхода рассматривается статическая метрика пространства-времени с центрально-симметричным распределением материи:

$$ds^2 = g_{IK} dx^I dx^K = e^{\nu(r)} dx^{02} - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

Определитель метрического тензора $g = -e^{\nu+\lambda} r^4 \times \sin^2 \theta$.

Статическое гравитационное поле, создаваемое центрально-симметричной материей, определяется уравнениями Эйнштейна (см. (100.4) и (100.6) в работе [19]):

$$g^{rr} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \kappa T_0^0, \quad (3)$$

$$g^{rr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \kappa T_r^r. \quad (4)$$

Здесь $\kappa = 8\pi k/c^4 = 2 \cdot 10^{-48} \text{ см}^2/\text{г} \cdot \text{с}$, $k = 6.67 \times 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$ — гравитационная постоянная; $T_0^0 = \varepsilon$ и $T_r^r = -p$ — это компоненты тензора энергии-импульса $T_{IK} = (\varepsilon + p)u_I u_K - p g_{IK}$ макроскопического тела в состоянии статического равновесия, ε — плотность энергии, а p — давление. Соотношение

$$\nu' + \lambda' = -\frac{\kappa r}{g^{rr}} (T_0^0 - T_r^r) \quad (5)$$

следует из (3) и (4). В термодинамике

$$T_0^0 - T_r^r = \varepsilon + p \quad (6)$$

— тепловая функция (энтальпия) на единицу объема. При нулевой температуре ε и p связаны уравнением состояния рассматриваемой материи. Уравнения Эйнштейна (3) и (4) совместно с уравнением состояния определяют радиальное распределение материи и гравитационного поля по радиусу в состоянии статического равновесия. В статике временная координата x^0 является циклической переменной. Метрическая функция $\nu(r)$ входит в тензор Риччи только через производную $\nu' = g'_{00}/g_{00}$. Инвариантность относительно добавления к ν произвольной константы отражает независимость от выбора единицы измерения времени.

Переходом к мировому времени τ , $d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0$, преобразуем метрику (2) к синхронной системе отсчета:

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

В синхронной системе отсчета $\sqrt{-g_c} = e^{\lambda/2} r^2 \sin \theta$. Мировое время τ остается циклической переменной, поскольку метрика (2) статическая. Поэтому если интеграл по гиперповерхности $\tau = \tau_0$

$$\int \delta(\tau - \tau_0) F(r) \sqrt{-g_c} d\tau dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^\infty F(r) e^{\lambda/2} r^2 dr$$

сходится, то он остается одним и тем же при любом τ_0 .

Энергия материи, определенная как производная от действия по мировому времени, сохраняется. Полная энергия \mathcal{E} есть временная компонента ковариантного 4-вектора полного импульса p_K , т. е. интеграл по гиперповерхности $\tau = \tau_0$ от компоненты T_{00} тензора энергии-импульса в произвольно выбранный момент мирового времени τ_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = p_0 &= \int \delta(\tau - \tau_0) T_{00} \sqrt{-g_c} d\tau dr d\theta d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^\infty T_{00} \sqrt{-g_{rr}} r^2 dr. \end{aligned} \quad (7)$$

С квантово-механической точки зрения, каждой частице отвечает некоторое поле. И наоборот, каждое поле описывает соответствующий набор частиц. В частности, монохроматическое поле частоты ω описывает ансамбль квантовых частиц в состоянии с определенной энергией $\hbar\omega$ каждая. Из формулы (7) находим полное число квантов:

$$N = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega} = \frac{4\pi}{\hbar\omega} \int_0^\infty T_{00} \sqrt{-g_{rr}} r^2 dr. \quad (8)$$

В регулярных решениях уравнений Эйнштейна все инварианты тензора кривизны Римана являются конечными. В силу самих уравнений все инварианты тензора энергии-импульса также конечны. Вне гравитирующего тела $T_0^0 = 0$. Решение уравнения (3) в пустоте

$$g^{rr}(r) = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad r_g = \frac{2kM}{c^2} \quad (9)$$

принадлежит Шварцшильду; M — гравитационная масса тела, r_g — гравитационный радиус. Учитывая конечность T_0^0 , из уравнения (3) находим $g^{rr} = -1 + O(r^2)$ при $r \rightarrow 0$. Давление вне материи отсутствует: $p = T_r^r = 0$ и из (5) следует, что $\nu' + \lambda' = 0$. Ввиду произвола в выборе единицы измерения времени можно положить $\nu + \lambda = 0$ вне гравитирующего тела, поэтому в качестве граничных условий для получения регулярных решений уравнений Эйнштейна (3), (4) обычно выбирают

$$g^{rr}(0) = -1, \quad g^{00}(\infty) = 1. \quad (10)$$

5. РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ГРАВИТИРУЮЩИХ ФЕРМИ-ЧАСТИЦ

При абсолютном нуле ферми-частицы заполняют подряд все квантовые уровни, начиная с основного и кончая последней частицей. Энергия частицы

на верхнем заселенном уровне E_F (энергия Ферми) совпадает с химическим потенциалом. Энергетические уровни, дающие основной вклад в термодинамические свойства, сильно сгущаются при подходе к верхней границе дискретного спектра. Квазиклассическое уравнение состояния вырожденного релятивистского ферми-газа удобно использовать в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} T_0^0 = \varepsilon(\mu) &= \frac{m_f^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \times \\ &\times \left[\mu \sqrt{\mu^2 - 1} (2\mu^2 - 1) - \operatorname{arcsch} \mu \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -T_r^r = p(\mu) &= \frac{m_f^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \times \\ &\times \left[\frac{1}{3} \mu \sqrt{\mu^2 - 1} (2\mu^2 - 5) + \operatorname{arcsch} \mu \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Параметром служит химический потенциал μ в единицах $m_f c^2$, m_f — масса фермиона. Для нейтронов $m_f = m_n = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г. Комбинация $\kappa m_n^4 c^5 / 8\pi^2 \hbar^3 = 4.8 \cdot 10^{-12}$ см⁻². По порядку величины размер нейтронной звезды

$$R \sim \left(\kappa \frac{m_n^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \right)^{-1/2} \sim 10 \text{ км}. \quad (13)$$

Для энтальпии единицы объема нейтронного газа (6) имеем

$$\begin{aligned} \kappa(T_0^0 - T_r^r) = \kappa(\varepsilon + p) &= \\ &= 1.28 \cdot 10^{-11} \mu(\mu^2 - 1)^{3/2} \text{ см}^{-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу тождества Бианки из уравнений Эйнштейна следует, что $T_{I;K}^K = 0$. Для уравнения состояния (11), (12) в статическом центральном гравитационном поле ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса равна

$$T_{I;K}^K = \delta_{Ir} \left(-p' - \frac{1}{2} \nu'(\varepsilon + p) \right).$$

$T_{I;K}^K = 0$ является условием равновесного состояния ансамбля релятивистских ферми-частиц при нулевой температуре:

$$p' = -\frac{1}{2} \nu'(\varepsilon + p), \quad T = 0.$$

Штрих означает производную по r . Соотношение

$$\mu' + \mu \frac{\nu'}{2} = 0 \quad (15)$$

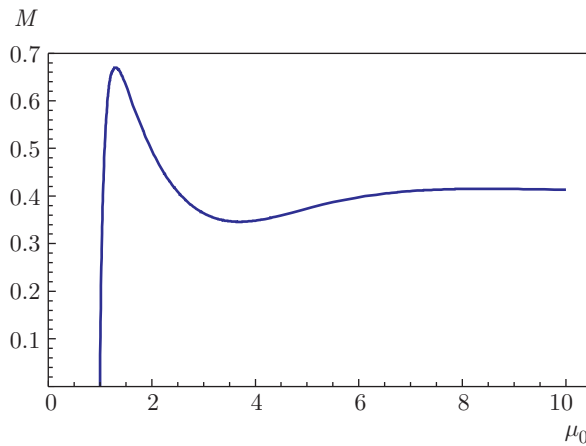


Рис. 2. Зависимость гравитационной массы M ансамбля фермионов (нейтронов) от химического потенциала μ_0 в центре. Максимум $M_{max} \approx 0.67M_\odot$ достигается при $\mu_0 \approx 1.3$, т. е. в слабoreлятивистской области

непосредственно вытекает из (12) и (14). Оно позволяет исключить $\nu' = -2\mu'/\mu$ из уравнений Эйнштейна (3), (4). В результате имеем систему двух уравнений первого порядка для двух неизвестных функций $\lambda(r)$ и $\mu(r)$:

$$\mu' = \frac{\mu}{2} \left(-\kappa r e^\lambda p(\mu) + \frac{1}{r} (1 - e^\lambda) \right), \quad (16)$$

$$\lambda' = \kappa r e^\lambda \varepsilon(\mu) + \frac{1}{r} (1 - e^\lambda). \quad (17)$$

Граничные условия

$$\mu(0) = \mu_0 > 1, \quad \lambda(r \rightarrow 0) = \frac{1}{3} \kappa \varepsilon(\mu_0) r^2 \quad (18)$$

следуют из условия регулярности в центре.

Химический потенциал в центре μ_0 , будучи в единицах $m_f c^2$, определяет степень релятивизма. С ростом r химический потенциал $\mu(r)$ убывает от μ_0 до $\mu(R) = 1$. При $r = R$ плотность энергии (11) обращается в нуль: $\varepsilon(1) = 0$, R — радиус гравитирующего объекта. Ансамбль фермионов при абсолютном нуле в квазиклассическом приближении имеет резкую границу.

Впервые этот вопрос был рассмотрен в общей теории относительности Оппенгеймером и Волковым [3] в 1939 г. применительно к нейтронному ядру в центре звезды. Их анализ имеет продолжение, см., например, [20, 21]. Результат Оппенгеймера и Волкова занимает достойное место в лучших монографиях [22, 23].

Численное интегрирование уравнений (16), (17) с граничными условиями (18) подтверждает существование предельного значения полной массы,

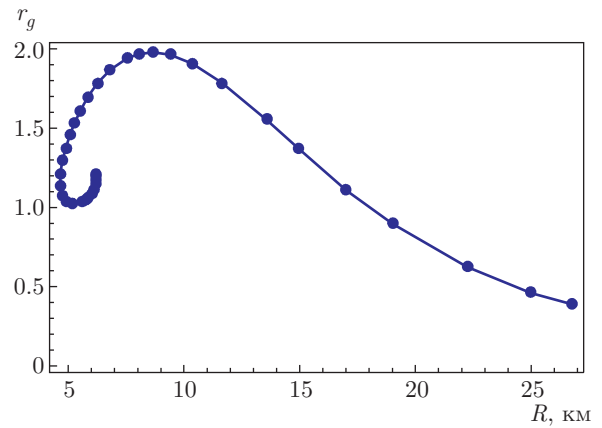


Рис. 3. Зависимость гравитационного радиуса r_g нейтронной сферы от граничного радиуса R

сверх которого статическое состояние равновесия невозможно. Зависимость полной массы от химического потенциала в центре, $M(\mu_0)$, представлена на рис. 2. Максимальная масса $M_{max} \approx 0.67M_\odot$ ($M_\odot = 1.989 \cdot 10^{33}$ г — масса Солнца) достигается при $\mu_0 \approx 1.3$. С дальнейшим ростом μ_0 предельная масса уменьшается. Это происходит потому, что с ростом μ_0 пик функции $\mu(r)$ сужается и при интегрировании с весом r^2 его вклад в полную массу падает. В ультрарелятивистском пределе масса стремится к постоянному значению.

При $T = 0$ нейтронная сфера имеет резкую границу при $r = R$, где $\mu(R) = 1$. Гравитационный радиус r_g (9) как функция граничного радиуса R представлен на рис. 3.

Убывающая часть кривой справа от максимума приведена в курсе теоретической физики Ландау и Лифшица [23]. Решение, описываемое левой частью кривой, имеющей вид скручивающейся к центру спирали, считается неустойчивым [20, 24].

Истинное уравнение состояния отличается от (11), (12) при малых радиусах из-за ядерных реакций при большой плотности, а также и при больших радиусах из-за перехода материи в состояние обычных атомов при малой плотности. Ядерные реакции и атомная оболочка сдвигают границу коллапса. Большинство нейтронных звезд с надежно измеренными массами оказались в интервале от 1.3 до $1.5M_\odot$.

6. ГРАВИТИРУЮЩИЙ КОНДЕНСАТ БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

Согласно современным представлениям, в центрах галактик находятся сверхтяжелые объекты

(предположительно — черные дыры) с массами, на много порядков превышающими предельную массу в состоянии равновесия. Со времени публикации фундаментальной работы Оппенгеймера и Снайдера [25] вплоть до наших дней считается, что гравитационный коллапс сверхмассивных объектов неограничен. В то же время, время существования галактик того же порядка, что и время существования Вселенной. Такой вывод можно сделать из наблюдений за удаленными галактиками, которые мало отличаются от близких к нам. Общий вид галактик остается неизменным, несмотря на наличие коллапсирующей черной дыры в центре.

При неограниченном сжатии энергия в расчете на частицу непрерывно растет. Следовательно, неизбежна стадия распада нейтронов на составные части, среди которых, согласно «Стандартной модели» (см. рис. 1, скопированный из Википедии [5]), есть и фермионы, и бозоны.

По-видимому, идея существования «кварковой материи» в нейтронных звездах впервые высказана в работе [6]. Анализ гравитационных свойств смеси кварков и нейтронов затруднен из-за отсутствия уравнения состояния, выведенного *ab initio*. Обзорная статья о проблемах кварковой материи [7] содержит подробный список литературы.

Равновесное состояние гравитирующих тел обеспечивается квантовыми свойствами материи. В случае фермионов гравитационные силы сжатия уравновешиваются упругостью вырожденного ферми-газа в соответствии с принципом Паули. Для нейтронов радиус равновесной предельно сжатой конфигурации порядка $R_f \sim 10 \text{ км} = 10^6 \text{ см}$ (13).

В статье [11] в качестве кандидата на сверхмассивный объект в центре галактики рассматривается бозонная звезда. Обзор [26] приводит подробный список литературы и содержит как теоретические аспекты, так и описывает возможности обнаружения бозонных звезд.

Экзотические бозонные звезды макроскопического размера в небе могут состоять из гипотетических частиц типа аксионов. А из бозонов Стандартной модели вряд ли. В лабораторных коллайдерах время жизни массивных бозонов Стандартной модели ничтожно. Совсем другое дело в недрах коллапсирующей черной дыры. При неограниченном сжатии найдется диапазон давлений, в котором равновесная концентрация бозонов Стандартной модели не мала.

Для бозонов размер сгустка сверхсжатого квантового состояния можно оценить исходя из принципа неопределенности Гейзенберга. В статическом

состоянии с определенной (минимально возможной) энергией для частицы с массой m_b неопределенность времени $\delta t \sim \hbar/m_b c^2$. Соответственно, масштаб равновесной предельно сжатой конфигурации бозонов не меньше длины волны де Бройля: $R_b \sim \sim c \cdot \delta t \sim \hbar/m_b c$. Для бозона Стандартной модели с массой m_b порядка 100 ГэВ это меньше размера атомного ядра: $R_b \sim 10^{-13} \text{ см}$. Разница между R_f и R_b в 19 порядков означает, что по сравнению со сверхплотным сгустком бозонного конденсата фермионная материя представляет собой едва заметный практически однородный фон. При низкой температуре бозонные капли могут находиться в среде фермионной материи в виде точечных вкраплений. При анализе гравитационных свойств конденсата Бозе–Эйнштейна наличие фермионов большой роли не играет.

6.1. Скалярное поле в кривом пространстве

Рассмотрим равновесную конфигурацию бозонов (не имеющих спина, электрического заряда и цвета) в собственном гравитационном поле. При нулевой температуре в состоянии равновесия все бозоны конденсируются в самом низком возможном квантовом состоянии. ψ -функцией конденсата Бозе–Эйнштейна является классическое скалярное поле (см. [12], § 30). Стандартный лагранжиан комплексного скалярного поля ψ в искривленном пространстве-времени с метрическим тензором g_{IK} (2) имеет вид

$$L = g^{IK} \psi_{,I} \psi_{,K}^* - U(\psi \psi^*). \quad (19)$$

В соответствии с принципом наименьшего действия ψ и ψ^* удовлетворяют уравнению Клейна–Гордона

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{IK} \psi_{,I})_{;K} = -\frac{\partial U}{\partial |\psi|^2} \psi. \quad (20)$$

С точки зрения состояния равновесия в собственном гравитационном поле подразумевается, что число частиц велико и все взаимодействия, кроме гравитационного и обменного, несущественны. Основная характеристика, определяющая гравитационные свойства частицы, — это ее масса m_b . В разложении потенциала $U(|\psi|^2)$ по степеням $|\psi|^2$ члены $|\psi|^4$ и более высоких степеней — это поправки на столкновения частиц и/или на взаимодействия не гравитационной природы. Без учета этих поправок $\partial U/\partial |\psi|^2$ в (20) — это константа, имеющая размерность см^{-2} , связанная с массой бозона m_b :

$$\frac{\partial U}{\partial |\psi|^2} = \left(\frac{m_b c}{\hbar}\right)^2.$$

В статическом центральном поле время является циклической координатой. Энергия отдельной частицы E — интеграл движения. В плоском пространстве-времени уравнение Клейна–Гордона (20) линейное. Его решением является плоская волна

$$\psi(x^I) = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right),$$

описывающая движение частицы с релятивистским спектром $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_b^2 c^4$. В кривом пространстве-времени E — это сохраняющаяся энергия конденсата в расчете на одну частицу.

В кривом пространстве-времени с метрикой (2) центрально-симметричная волновая функция конденсата в квантовом состоянии с определенной энергией E имеет вид

$$\psi_E(x^I) = e^{iEx^0/\hbar c} \psi(r). \quad (21)$$

Радиальная функция $\psi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{rr} \psi')' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 - m_b^2 c^4) \psi, \quad (22)$$

где штрих означает производную по r . Удобно ввести функцию

$$\chi = g^{rr} \psi'$$

и представить волновое уравнение (20) в виде двух уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$\psi' = \frac{\chi}{g^{rr}}, \quad (23)$$

$$\chi' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 - m_b^2 c^4) \psi - \left(\frac{2}{r} + \frac{\lambda' + \nu'}{2}\right) \chi. \quad (24)$$

6.2. Тензор энергии-импульса скалярного поля

Лагранжиан скалярного поля (19) не зависит от производных метрического тензора, так что тензор энергии-импульса это просто

$$T_{IK} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{IK}} (\sqrt{-g} L). \quad (25)$$

Подстановкой (19) и (21) в (25) приводим ковариантный тензор энергии-импульса (25) к виду

$$T_{IK} = \frac{1}{\hbar^2 c^2} [(2\delta_{I0}\delta_{K0} - g_{IK}g^{00}) E^2 + g_{IK}m_b^2 c^4] |\psi|^2 + (2\delta_{Ir}\delta_{Kr} - g_{IK}g^{rr}) |\psi'|^2.$$

Для смешанного тензора энергии-импульса, используемого в уравнениях Эйнштейна (3) и (4), имеем

$$T_I^K = \delta_I^K \times \begin{cases} \frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 + m_b^2 c^4) |\psi|^2 - g^{rr} |\psi'|^2, & I = 0, \\ \frac{1}{\hbar^2 c^2} (-g^{00} E^2 + m_b^2 c^4) |\psi|^2 + g^{rr} |\psi'|^2, & I = r, \\ \frac{1}{\hbar^2 c^2} (-g^{00} E^2 + m_b^2 c^4) |\psi|^2 - g^{rr} |\psi'|^2, & I \neq 0, r. \end{cases} \quad (26)$$

Обратим внимание на анизотропию давления центрально-симметричного скалярного поля: $T_r^r \neq T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi$. Энтальпия (6) конденсата Бозе–Эйнштейна

$$T_0^0 - T_r^r = 2g^{00} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} |\psi|^2 - 2g^{rr} |\psi'|^2. \quad (27)$$

Убедимся, что $T_{I;K}^K = 0$. Дивергенция симметричного тензора T_{IK} равна

$$T_{I;K}^K = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_I^K)}{\partial x^K} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{KL}}{\partial x^I} T^{KL}. \quad (28)$$

Не циклическими являются две координаты, r и θ . Проверке подлежат $T_{r;K}^K$ и $T_{\theta;K}^K$. Компонента $T_{\theta;K}^K = (T_\theta^\theta - T_\varphi^\varphi) \text{ctg } \theta = 0$, потому что согласно (26) $T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi$. Компонента

$$T_{r;K}^K = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_r^r)}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\nu' T_0^0 + \lambda' T_r^r + \frac{2}{r} (T_\theta^\theta + T_\varphi^\varphi) \right)$$

сводится к

$$T_{r;K}^K = 2\psi' \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{rr} \psi')' - (g^{00} E^2 - m_b^2 c^4) \psi \right].$$

$T_{r;K}^K = 0$ в силу уравнения (22).

6.3. Уравнения, определяющие равновесную структуру

С учетом (5) и (26) уравнения поля (23), (24),

$$\psi' = \frac{\chi}{g^{rr}}, \quad (29)$$

$$\chi' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 - m_b^2 c^4) \psi - \left(\frac{2}{r} - \kappa \frac{r}{g^{rr}} \left(\frac{1}{\hbar^2 c^2} g^{00} E^2 |\psi|^2 - \frac{|\chi|^2}{g^{rr}} \right) \right) \chi \quad (30)$$

и уравнения Эйнштейна (3), (4),

$$(g^{rr})' = \kappa r \left[\frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 + m_b^2 c^4) |\psi|^2 - \frac{|\chi|^2}{g^{rr}} \right] - \frac{1 + g^{rr}}{r}, \quad (31)$$

$$\frac{(g^{00})'}{g^{00}} = -\nu' = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{g^{rr}} \right) - \frac{\kappa r}{g^{rr}} \times \left[\frac{1}{\hbar^2 c^2} (-g^{00} E^2 + m_b^2 c^4) |\psi|^2 + \frac{|\chi|^2}{g^{rr}} \right] \quad (32)$$

составляют самосогласованную систему уравнений, описывающую равновесную структуру гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна в квантовом состоянии с определенной энергией E (на частицу). Такая постановка задачи предполагает, что полная гравитационная масса M конденсата конечна, что энергия E – минимально возможная при заданной полной массе и что температура мала по сравнению с расстоянием до следующего уровня.

Для численного анализа удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_b c}{\hbar} r, & u(x) &= \sqrt{\kappa} \psi(r), \\ w(x) &= \frac{\hbar \sqrt{\kappa}}{m_b c} \chi(r), & h(x) &= \frac{E^2}{m_b^2 c^4} g^{00}(r), \\ g(x) &= g^{rr}(r). \end{aligned} \quad (33)$$

При $r \rightarrow \infty$ волновая функция $\psi \rightarrow 0$, а метрика стремится к галилеевой: $g^{00} \rightarrow 1$, $g^{rr} \rightarrow -1$. Если функция $h(x)$ найдена, то из условия $g^{00}(\infty) = 1$, обеспечивающего конечность полной массы M конденсата, находим энергию:

$$E = m_b c^2 \sqrt{h(\infty)}. \quad (34)$$

E и g^{00} входят в уравнения в комбинации $g^{00} E^2$. (Заметим, что $(g^{00})'/g^{00} = (E^2 g^{00})'/E^2 g^{00}$ при постоянной E .) Система уравнений (29)–(32) инвариантна относительно замены $g^{00} \rightarrow \alpha g^{00}$, $E \rightarrow E/\sqrt{\alpha}$. Эта инвариантность позволяет численно интегрировать уравнения, задавая все граничные условия в центре.

В безразмерных переменных (33) уравнения (29)–(32) не содержат параметров:

$$u' = \frac{w}{g}, \quad (35)$$

$$w' = (h - 1)u - \frac{2}{x} w + \frac{x}{g} \left(u^2 h - \frac{w^2}{g} \right) w, \quad (36)$$

$$g' = x \left(u^2 h + u^2 - \frac{w^2}{g} \right) - \frac{1 + g}{x}, \quad (37)$$

$$h' = \frac{h}{x} \left(1 + \frac{1}{g} \right) - x \frac{h}{g} \left(-u^2 h + u^2 + \frac{w^2}{g} \right). \quad (38)$$

Регулярность в центре диктует следующие граничные условия при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \left[1 - \frac{1}{6} (h_0 - 1) x^2 \right], \\ w(x) &= \frac{1}{3} u_0 (h_0 - 1) x, \\ g(x) &= -1 + \frac{1}{3} |u_0|^2 (h_0 + 1) x^2, \\ h(x) &= h_0 \left(1 - \frac{1}{3} |u_0|^2 (2h_0 - 1) x^2 \right). \end{aligned}$$

Граничные условия содержат две константы, $h_0 = h(0)$ и $u_0 = u(0)$.

6.4. Нелинейная задача на собственные значения

Условие конечности полной массы M конденсата означает, что волновая функция $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поиск нетривиального решения системы однородных уравнений (35), (36) является нелинейной задачей на собственные значения.

Специфика нелинейной задачи на собственные значения для гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна заключается в том, что потенциальная яма, удерживающая частицы от разлета, фиксируется не внешними полями, а формируется собственным гравитационным полем самих бозонов. Потенциал, удерживающий бозоны от разлета, является функционалом волновой функции конденсата. В нелинейной задаче, как и в линейной, существует дискретный спектр собственных уровней энергии. Однако каждый энергетический уровень требует соответствующую только ему конфигурацию сразу всего конденсата. Более того, само существование уровня зависит от степени его заполнения.

В отличие от линейной задачи на собственные значения, в нелинейной задаче сумма двух решений не является решением тех же самых уравнений. Из-за отсутствия аддитивности собственная функция, канонически сопряженная с конкретным уровнем, является ψ -функцией всего конденсата в целом. Волновая функция конденсата и макроскопический спектр равновесных уровней не имеют отношения к элементарным квазичастичным возбуждениям.

При нулевой температуре конденсат Бозе–Эйнштейна в состоянии равновесия может находиться только в одном из дискретных квантовых состояний

своего спектра. Если конденсат находится в квантовом состоянии с определенной энергией, то других уровней попросту нет. Для разных уровней собственные функции конденсата как целого различны. Если с изменением массы M равновесное состояние на данном уровне становится невозможным, а на соседнем возможно, то может произойти перестройка одной равновесной конфигурации в другую.

Два свободных параметра u_0 и h_0 — это ровно столько, сколько нужно. С этими параметрами удобно численно интегрировать уравнения (35)–(38), а затем выразить результат через «наблюдаемые» величины — полную массу M и энергию E в расчете на частицу. Рассматривая амплитуду в центре u_0 как непрерывный параметр, можно численным интегрированием определить дискретный набор непрерывных функций $h_{0n}(u_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для которых $u_n(u_0, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Собственные функции $u_n(u_0, x)$, $w_n(u_0, x)$, $g_n(u_0, x)$, $h_n(u_0, x)$, отвечающие параметрам u_0 и $h_{0n}(u_0)$, позволяют определить дискретные наборы непрерывных функций $E_n(u_0)$ и $M_n(u_0)$.

Собственная функция $g_n(u_0, x)$ определяет безразмерный гравитационный радиус $x_{gn}(u_0)$ и полную массу $M_n(u_0)$:

$$x_{gn}(u_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} x (1 + g_n(u_0, x)), \quad (39)$$

$$M_n(u_0) = (c\hbar/2km_b)x_{gn}(u_0). \quad (40)$$

Дискретный энергетический спектр

$$E_n(u_0) = m_b c^2 \sqrt{h_n(u_0, \infty)} \quad (41)$$

следует из (34).

Зависимости

$$h_\infty(u_0) \equiv h_{n=0}(u_0, \infty) = \frac{E_0^2}{m_b^2 c^4},$$

$$x_{g0}(u_0) = \left(\frac{2km_b}{c\hbar} \right) M_0$$

для конденсата в основном состоянии $n = 0$ показаны на рис. 4 (соответственно красная и синяя кривые). Как и в случае ферми-частиц (см. рис. 1), максимальная общая масса достигается в еще не очень релятивистской области $u_0 \approx 0.3$. Убывание полной массы с дальнейшим ростом u_0 связано с сужением пика $u(x)$ в центре, в то время как интегрирование происходит с весом x^2 .

В равновесном состоянии частицы конденсата совершают финитное движение, и в этом смысле они

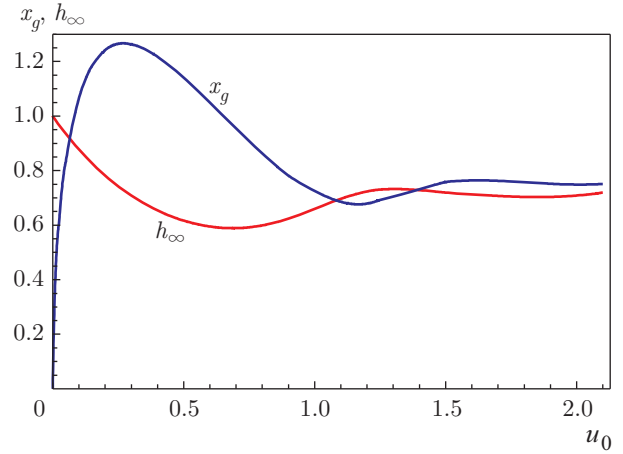


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости гравитационного радиуса $x_g \equiv x_{g0}(u_0) = (2km_b/c\hbar)M_0$ (синяя кривая) и квадрата энергии в единицах $m_b c^2$, $h_\infty \equiv h_{n=0}(u_0, \infty) = E_0^2/m_b^2 c^4$ (красная кривая), от амплитуды u_0 волновой функции в центре. Основное состояние $n = 0$

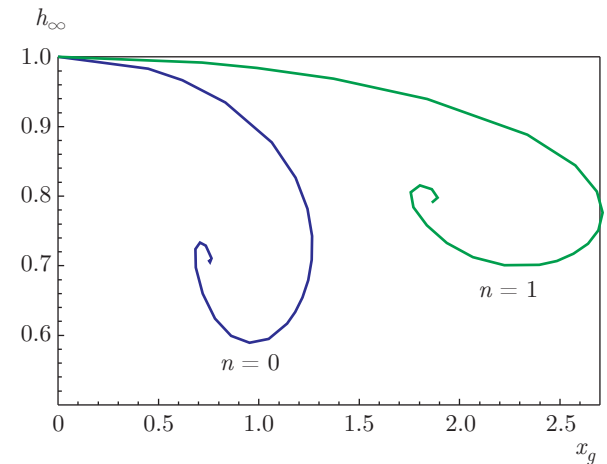


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимость квадрата энергии $h_\infty = E^2/m_b^2 c^4$ от общей массы $M \sim x_g$ для основного уровня $n = 0$ (синяя спираль) и следующего уровня $n = 1$ (зеленая спираль)

находятся в связанном состоянии. Энергия E меньше, чем $m_b c^2$ на величину энергии связи. Минимум энергии имеет место при $u_0 \approx 0.7$. Максимум массы $M_0(u_0)$ и минимум энергии $E_0(u_0)$ соответствуют разным значениям u_0 .

Исключением u_0 определяется энергия $E_n(M)$ дискретного уровня n как непрерывная функция полной массы M . В координатах $h_\infty = E^2/m_b^2 c^4$ и $x_g \sim M$ зависимость энергии от полной массы, $h_{\infty n}(x_g)$, представляет собой последовательность спиралей, скручивающихся внутрь. В соответствии

с линейной зависимостью гравитационного радиуса от номера уровня (см. ниже (49)) спирали расположены эквидистантно. Первые две спирали (синяя — основное состояние $n = 0$; зеленая — первое возбужденное состояние $n = 1$) показаны на рис. 5. Другие уровни, $n = 2, 3, \dots$, также существуют, но на рис. 5 не показаны, n -я спираль соответствует n -му дискретному уровню. Непрерывный параметр u_0 монотонно растет вдоль кривых. Сплошные кривые построены интерполяцией по точкам, найденным численно.

Как и в линейной задаче на собственные значения, волновая функция основного состояния $u_{n=0}(u_0, x)$ не меняет знак, см. рис. 6, $n = 0$. Волновая функция первого возбужденного уровня меняет знак один раз (рис. 6, $n = 1$), второго — дважды, (рис. 6, $n = 2$) и т. д. Я выбрал для демонстрации амплитуду волновой функции в центре $u_0 = 0.3$. Это значение соответствует максимально возможной общей массе M_0 в основном состоянии ($n = 0$).

Для бозонов с массой $m_b = 100 \text{ ГэВ} = 1.78 \cdot 10^{-22} \text{ г}$ полная масса M_0 в состоянии $n = 0$ составляет

$$M_0(u_0) = \frac{c\hbar}{2km_b} x_g = 1.33 \cdot 10^{12} x_g(u_0) \text{ г.} \quad (42)$$

В основном состоянии $n = 0$ при $u_0 = 0.3$ (что соответствует максимально возможной полной массе при $n = 0$) гравитационный радиус (39) равен $x_{g0}(0.3) \approx 1.26$. Предельное значение массы M_{cr} конденсата Бозе–Эйнштейна для равновесия в основном состоянии $n = 0$ равно

$$M_{cr} = M_0(0.3) = 1.68 \cdot 10^{12} \text{ г.} \quad (43)$$

При $M > M_{cr}$ статического решения на уровне $n = 0$, а значит, и самого уровня $n = 0$ не существует.

Статьи [10] 1968 г. и [27] 1969 г. относятся к первым работам о гипотетических бозонных звездах, в которых рассматривалось равновесное состояние гравитирующего скалярного поля. В этих статьях приведена оценка максимального числа частиц $N_{cr} \sim M_0/m_b \sim (M_{Plank}/m_b)^2$, сверх которого не существует равновесной конфигурации бозонов, удерживающихся от разлета их собственным гравитационным полем. $M_{Plank} = \sqrt{c\hbar/k} = 2.177 \cdot 10^{-5} \text{ г}$ — масса Планка.

Конденсат в основном состоянии — это крошечная капля с диффузной границей и огромной массой $M_0 \sim 10^{12} \text{ г}$. Средний размер капли порядка длины волны де Бройля $r_0 \sim \hbar/m_b c \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}$. Таким образом, для максимально возможной плот-

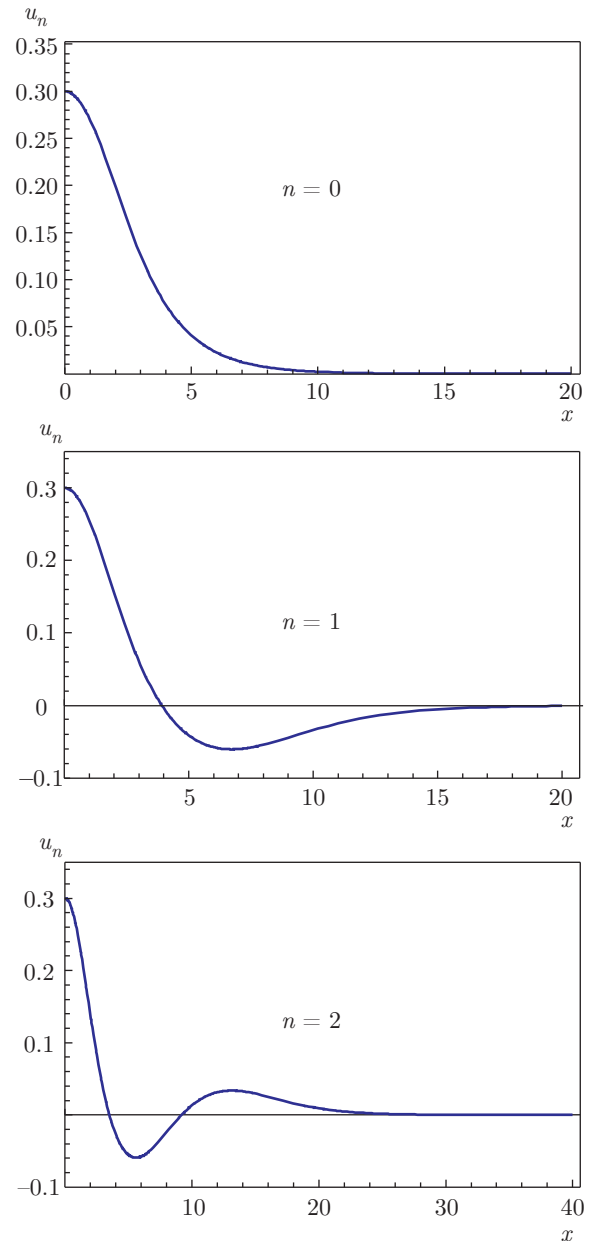


Рис. 6. Безразмерная волновая функция $u_n(u_0, x)$ основного ($n = 0$), первого возбужденного ($n = 1$) и второго возбужденного ($n = 2$) состояний. Амплитуда в центре $u_0 = 0.3$

ности капли бозонов с энергией 100 ГэВ в основном состоянии имеет место оценка:

$$\frac{M_0(0.3)}{(4/3)\pi r_0^3} \approx 5 \cdot 10^{58} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Это на четыре с лишним десятка порядков превышает плотность нейтронной материи (порядка 10^{15} г/см^3).

В настоящее время фермионы и бозоны Стандартной модели считаются элементарными частицами. Их внутреннее строение практически не обсуждается. Тем не менее, распады бозонов на составные части (если таковые имеются), или превращения в другие частицы, весьма вероятны даже при значительно меньшей плотности.

Если рассматриваемая система в целом электрически нейтральна, то отношение силы $\sim e^2/r^2$ электромагнитного взаимодействия пары заряженных бозонов к силе $\sim km_b M/r^2$ гравитационного притяжения частиц к центру порядка

$$\frac{e^2}{km_b M} \approx \alpha \frac{M_{cr}}{M}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Ввиду малости постоянной тонкой структуры α для «капли» с массой M порядка и больше M_{cr} электромагнитные флуктуации можно считать малыми возмущениями.

В отличие от электрослабого, сильное взаимодействие пары бозонов не содержит малости постоянной тонкой структуры. В отношении сильного взаимодействия теория возмущений требует как минимум $M \gg M_{cr}$. Равновесная центрально-симметричная конфигурация с такой большой массой возможна на высоком квантовом уровне $n \approx M/M_{cr} \gg 1$. Однако равновесное состояние на высоком уровне $n \gg 1$ является метастабильным. Его энергия в расчете на частицу больше, чем на уровне $n = 0$. Поэтому при $M \gg M_{cr}$ энергетически выгоднее не одна большая капля, а конфигурация из n независимых капель, каждая на уровне $n = 0$. Равновесная центрально-симметричная конфигурация на высоком квантовом уровне $n \gg 1$ возможна, но такое состояние является метастабильным.

В статье Копли, Шапиро и Вассермана [8] к лагранжиану (19) приписан член $(1/4)\lambda|\psi|^4$ для учета парного не гравитационного взаимодействия бозонов. Утверждается, что в этой модели равновесная конфигурация может заметно отличаться от случая невзаимодействующих бозонов, даже когда $\lambda \ll 1$.

6.5. Ньютоновский предел

В нерелятивистском пределе $1 - E/m_b c^2 \ll 1$, когда энергия связи много меньше энергии покоя бозона, для анализа удобно ввести новые переменные следующим образом:

$$E = m_b c^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad x = \sqrt{\frac{m_b c^2}{2\varepsilon}} y,$$

$$u = \frac{2\varepsilon}{m_b c^2} U(y), \quad w = \left(\frac{2\varepsilon}{m_b c^2}\right)^{3/2} W(y),$$

$$\nu = \frac{2\varepsilon}{m_b c^2} H(y), \quad \lambda = \frac{2\varepsilon}{m_b c^2} G(y).$$

В этих переменных при малом дефекте массы, $\varepsilon \ll m_b c^2$, уравнения (35)–(38) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dy} &= -W, & \frac{dW}{dy} &= -(H+1)U - \frac{2}{y}W, \\ \frac{dG}{dy} &= 2yU^2 - \frac{G}{y}, & \frac{dH}{dy} &= \frac{G}{y}. \end{aligned} \quad (44)$$

Уравнения (44) не содержат параметров. Если функция $H(y)$ удовлетворяет уравнениям (44), то и $H(y) + C$, $C = \text{const}$, тоже является решением этой системы. Это свойство позволяет легко найти функцию

$$\nu(r) = \frac{2\varepsilon}{m_b c^2} H\left(\frac{\sqrt{2m_b \varepsilon}}{\hbar} r\right),$$

исчезающую при $r \rightarrow \infty$.

Система уравнений (44) эквивалентна интегродифференциальному нелинейному уравнению на собственные значения типа Гросса – Питаевского:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dU(x)}{dx} \right) &= \\ = \left(1 - 2x^2 \left[\int_0^1 y + \int_1^\infty \right] U^2(xy)y dy \right) U(x), & \varepsilon \ll m_b c^2. \end{aligned}$$

Это уравнение учитывает обменное и гравитационное взаимодействия бозонов при абсолютном нуле, но не учитывает взаимодействий другой физической природы.

Отклонение релятивистской зависимости $E(x_g)$ (сплошная кривая) от ньютоновской (штриховая линия) показано на рис. 7.

Характерный радиус R гравитирующего конденсата Бозе – Эйнштейна в нерелятивистской области растет с уменьшением ε : $R \sim \hbar(m_b \varepsilon)^{-1/2}$. В литературе [28] рассматриваются сверхлегкие скалярные частицы с энергией покоя порядка 10^{-22} эВ и длиной волны де Бройля порядка килопарсек в качестве вероятных кандидатов на темную материю.

В ньютоновском пределе гравитационное поле, как правило, не является доминирующим. В нелинейной задаче на собственные значения приходится учитывать взаимодействия частиц не только гравитационной природы. В работе [29] рассматривается

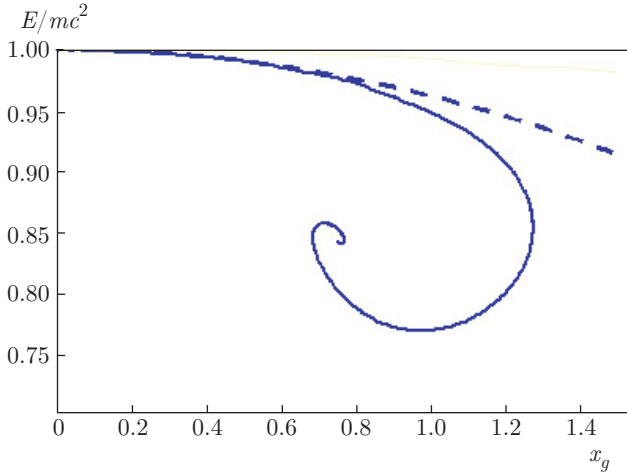


Рис. 7. Энергия как функция гравитационного радиуса. Основное состояние $n = 0$. Штриховая линия — нерелятивистское приближение, применимое при $1 - E/m_b c^2 \ll 1$

равновесие гипотетических аксионных звезд, обеспеченное балансом давления, гравитационного самосжатия, а также негравитационного взаимодействия частиц друг с другом. Любопытно, что существует динамическое равновесное состояние в режиме высокой плотности с мультичастотной зависимостью от времени. Но это не конденсат Бозе–Эйнштейна. В конденсате все бозоны находятся в квантовом состоянии с определенным значением (минимально возможной) энергии $E = \hbar\omega$.

6.6. Особенности спектра

Дискретные собственные значения $h_{0n} \equiv h_n(u_0 = 0.3, x = 0)$ (синие точки) и $h_n(\infty) \equiv h_n(u_0 = 0.3, x \rightarrow \infty)$ (красные точки) для отдельных уровней $n = 0, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 29, 45, 46, 47, 48, 49$ и 50 предьявлены на рис. 8. Штриховые кривые — интерполяция через эти избранные точки. Щель между зеленой и красной штриховыми линиями связана с энергией удержания (41) (гравитационный дефект массы). Значение $u_0 = 0.3$ отвечает максимально возможной полной массе M_{cr} (43) в основном состоянии $n = 0$. При $M > M_{cr}$ равновесная конфигурация с волновой функцией без узлов (рис. 6, верхний график) невозможна, а значит, уровня $n = 0$ не существует.

Из большинства статей на тему гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна у читателя может возникнуть впечатление, что при $M > M_{cr}$ (43) происходит коллапс, и равновесного состояния вообще не может быть. Отличные от основного квантовые уровни практически не упоминаются. Редким ис-

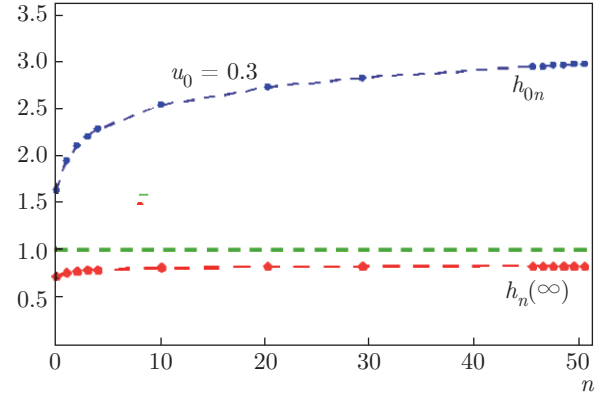


Рис. 8. (В цвете онлайн) Дискретные значения h_{0n} (синие точки) и $h_n(\infty)$ (красные точки) для некоторых уровней. Выбранное значение $u_0 = 0.3$ отвечает максимально возможной гравитационной массе на минимально возможном энергетическом уровне $n = 0$

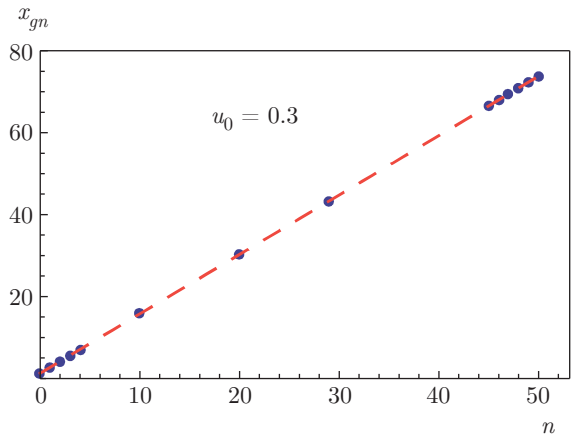


Рис. 9. (В цвете онлайн) Гравитационный радиус $x_{gn} \sim M_n$ для тех же n , что и на рис. 8, $u_0 = 0.3$

ключением является статья Фрейдберга, Ли и Панга [9].

Отсутствие уровня $n = 0$ (волновая функция которого не меняет знак) не означает, что при $M > M_{cr}$ равновесного состояния вообще не может быть. При $M > M_{cr}$ существуют равновесные конфигурации на уровнях $n > 0$, волновые функции которых меняют знак. Численный анализ показывает, что полная масса M_n бозонов, сконденсированных на n -м уровне, линейно растет с ростом n . На рис. 9 видно, что значения безразмерного гравитационного радиуса $x_{gn} \sim M_n$ (36) для тех же уровней n , что и на рис. 8, практически лежат на прямой линии.

Тот факт, что масса n -го уровня пропорциональна n при $n \gg 1$, следует из волнового уравнения

(22). Вне конденсата $\lambda' + \nu' = 0$. При $r \gg r_g$ пространство-время почти плоское:

$$g^{00} \approx 1 + \frac{r_g}{r}, \quad g^{rr} \approx -1 + \frac{r_g}{r}.$$

Волновое уравнение (22) сводится к

$$\psi'' + \frac{2}{r} \psi' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(m_b^2 c^4 - E^2 - (2E^2 - m_b^2 c^4) \frac{r_g}{r} \right) \psi, \quad r \gg r_g. \quad (45)$$

Если опустить члены, исчезающие при $r \rightarrow \infty$, то (45) примет вид

$$\psi'' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} (m_b^2 c^4 - E^2) \psi$$

и его регулярное решение экспоненциально убывает:

$$\psi = C \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar c} \sqrt{m_b^2 c^4 - E^2} r \right\}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Собственную функцию уравнения (45) ищем в виде

$$\psi(r) = F(y) e^{-y/2}, \quad y = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{m_b^2 c^4 - E^2} r.$$

Для функции $F(y)$ получается уравнение

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (\gamma - y) \frac{dF}{dy} - \alpha F = 0, \quad (46)$$

в котором

$$\gamma = 2, \quad \alpha = 1 - \frac{(2E^2 - m_b^2 c^4) r_g}{2\hbar c \sqrt{m_b^2 c^4 - E^2}}. \quad (47)$$

(46) — это уравнение вырожденной гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \gamma, y) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{y}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{y^2}{2!} + \dots \quad (48)$$

Если $\alpha = -n$ (нуль, или целое отрицательное число), то (48) — это полином. В этом случае в ряду (48) остается конечное число членов и волновая функция $\psi(r)$ исчезает при $r \rightarrow \infty$. В противном случае $\psi(r)$ экспоненциально растет с ростом r . Полагая в (47) $\alpha = -n$ и учитывая, что, согласно (41), $(E_n/m_b c^2)^2 = h_n \rightarrow h_\infty$ при $n \gg 1$, видим, что гравитационный радиус линейно растет с ростом n при $n \gg 1$:

$$x_{gn} = \frac{\sqrt{1 - h_\infty}}{h_\infty - 1/2} (1 + n), \quad n \gg 1. \quad (49)$$

Сравнивая с рис. 9, получаем оценку $h_\infty \approx 0.8$.

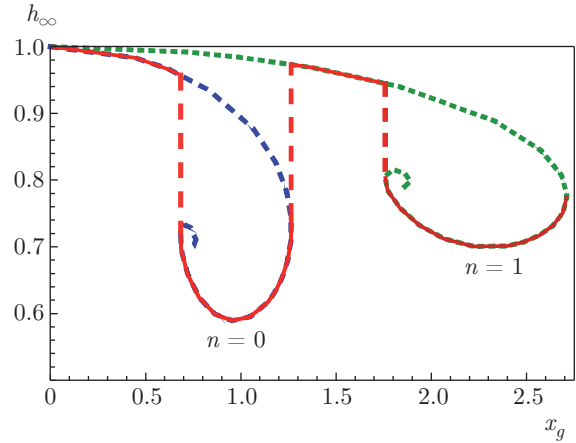


Рис. 10. (В цвете онлайн) Синяя и зеленая штриховые линии те же, что и на рис. 5. Красные сплошные линии — это состояния минимально возможной энергии. Именно они представляют собой основное состояние в равновесной конфигурации при абсолютном нуле

6.7. Основное состояние как функция полной массы

Рисунок 10 наглядно демонстрирует важные особенности нелинейной задачи на собственные значения. Само существование дискретного уровня зависит от его заполнения. При нулевой температуре уровень $n = 0$, собственная функция которого не меняет знак (см. рис. 6), является основным состоянием, только пока $0 < x_g < 1.2329$. С ростом массы M при $x_g > 1.2329$ уровня $n = 0$ не существует. В интервале $1.2329 < x_g < 2.712456$ уровень $n = 1$, собственная функция которого $u_1(x)$ меняет знак один раз (см. рис. 6), является основным состоянием. С дальнейшим ростом массы, когда уровень $n = 1$ исчезнет, роль основного состояния перейдет уровню $n = 2$, затем уровню $n = 3$ и т. д.

Функции $h_n(x_g)$ неоднозначны. Реальное основное состояние состоит из тех частей кривых, на которых энергия минимальна (красные линии на рис. 10). Синяя и зеленая пунктирные кривые на рис. 10 те же, что на рис. 5. Конденсат стабилен в состояниях с минимальной энергией. Состояния с той же массой, но с более высокой энергией могут быть только метастабильными (синие и зеленые штриховые линии на рис. 10).

С ростом полной массы M при $x_g \approx 0.68$ должен происходить переход из рыхлого состояния $u_0(0) \approx 0.04$ в плотное основное состояние $u_0(0) \approx 1$. На рис. 10 этому переходу отвечает левая вертикальная красная штриховая линия. В этом переходе выделение энергии в расчете на частицу около 20% от $m_b c^2$.

Линейная зависимость x_{gn} от n означает, что, в принципе, масса M_n (40) конденсата может быть сколь угодно большой при нулевой температуре. Область пространственной локализации конденсата расширяется с увеличением массы. Линейный размер «капли» растет пропорционально полной массе. При этом средняя плотность уменьшается. Поэтому равновесные конфигурации существуют при любой полной массе. При абсолютном нуле температуры с ростом массы M при прохождении очередного критического значения $M_{cr n}$ основным состоянием становится следующий квантовый уровень $n + 1$. Это обстоятельство свидетельствует в пользу предположения Бодмера–Виттена о том, что кварковая материя может оказаться стабильной при нулевой температуре [30].

Следует отметить, что среди возможных равновесных квантовых конфигураций абсолютный минимум энергии на частицу принадлежит основному уровню $n = 0$. На рис. 5 и 10 видно, что минимум энергии в возбужденном состоянии $n = 1$ выше, чем в основном состоянии $n = 0$. И хотя на рис. 5 и 10 другие уровни не показаны, минимум энергии на частицу у каждого последующего уровня больше, чем у предыдущего. По этой причине один огромный сгусток бозонов в квантовом состоянии с большим n является энергетически менее выгодным, чем n изолированных капель, каждая в основном состоянии $n = 0$.

Внутри черной дыры (или кварковой звезды) сверхтяжелые капли конденсата Бозе–Эйнштейна могут рассматриваться как точечные вкрапления в среду фермионной материи. Ввиду ничтожного размера капли по сравнению с радиусом звезды, фермионная материя является локально-однородным фоном, который вряд ли повлияет на структуру капли конденсата. Сами же капли, напротив, могут отразиться на уравнении состояния фермионной материи. Гравитационное поле в окрестности капли не малое. Это может сказаться и на спектре, и на радиальном распределении фермионов.

Следует иметь в виду, что промежутки между соседними уровнями уменьшаются с ростом n , и исчезают при $n \rightarrow \infty$. По этой причине в реальности при сколь угодно малом $T > 0$ условие малости температуры по сравнению с расстоянием между соседними уровнями нарушается при конечном n , сколь бы ни была мала температура. Вопрос о равновесной структуре центрально-симметричного гравитирующего конденсата Бозе–Эйнштейна при малой, но отличной от нуля температуре интересен. Хотя, возможно, и не столь актуален ввиду энергетичес-

кой невыгодности единого центра с большим сгустком в квантовом состоянии $n \gg 1$ по сравнению с n каплями в отдельных изолированных центрах, каждая в основном состоянии $n = 0$.

Я благодарю А. Ф. Андреева за критические замечания на семинаре ИФП и В. И. Марченко за интерес к работе и полезный обмен мнениями.

Это большая честь напечатать статью в номере ЖЭТФ, посвященном 85-летию Л. П. Питаевского. С начала 60-ых годов и по сегодняшний день для меня Лев Петрович — это учитель, руководитель, наставник и достойный пример преданности науке. С Днем Рождения Вас, Лев Петрович! Желаю Вам здоровья и продолжения активной научной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* **74**, 81 (1931).
2. L. D. Landau, *Phys. Zs. Sowjet.* **1**, 285 (1932).
3. J. R. Oppenheimer and G. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
4. S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe et al., *Astrophys. J.* **692**, 1075 (2009).
5. Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model.
6. D. D. Ivanenko and D. F. Kurdgelaidze, *Astrophys. J.* **1**, 251 (1965); *Lett. Nuovo Cimento* **2**, 13 (1969).
7. Gordon Baym, Tetsuo Hatsuda, Toru Kojo et al., arXiv:1707.04966v1 [astro-ph.HE].
8. M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2485 (1986).
9. R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, *Phys. Rev. D* **35**, 3640 (1987).
10. D. J. Kaup, *Phys. Rev.* **172**, 1331 (1968).
11. D. F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase, *Phys. Rev. D* **62**, 104012 (2000).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 2, Физматлит, Москва (2000).
13. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9806038v2>.
14. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).

15. K. V. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
16. В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **34**, 1240 (1958).
17. Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961).
18. E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
20. Н. А. Дмитриев, С. А. Холин, *Вопросы космогонии* **9**, 254 (1963).
21. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *УФН*, **84**, 377 (1964).
22. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco (1973).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
24. Б. К. Гариссон, К. С. Торн, М. Вакано, Дж. А. Уиллер, *Теория гравитации и гравитационный коллапс*, Мир, Москва (1967).
25. J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
26. Franz E Schunck and Eckehard W Mielke, *Class. Quant. Grav.* **20**, R301 (2003); <http://arxiv.org/abs/0801.0307v1>.
27. R. Ruffini and S. Bonazzola, *Phys. Rev.* **187**, 1767 (1969).
28. L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, *Phys. Rev. D* **95**, 043541 (2017).
29. L. Visinelli, S. Baum, J. Redondo, K. Freese, and F. Wilczek, *Phys. Lett. B* **777**, 64 (2018).
30. E. Witten, *Phys. Rev.* **30**, 272 (1984).