

КРУПНОМАСШТАБНАЯ СЖИМАЕМОСТЬ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Д. А. Климачков^{a*}, А. С. Петросян^{a,b}

^a *Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^b *Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.

Предложены две системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды в качестве основы для исследований в области плазменной астрофизики: система уравнений с полным учетом силы Кориолиса и система уравнений на β -плоскости, в которой изменения параметра Кориолиса линейны по координате. Обе системы уравнений учитывают такие фундаментально важные явления в плазменной астрофизике, как эффекты сжимаемости и эффекты внешнего магнитного поля, что существенно повышает потенциальные возможности применения таких уравнений для изучения астрофизических объектов. Показано, что учет сжимаемости в плазменной астрофизике существенным образом изменяет законы дисперсии для волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Найдено, что в случае сжимаемой вращающейся плазмы реализуются те же самые нелинейные взаимодействия, как и при отсутствии сжимаемости. Методом многомасштабных разложений получены трехволновые уравнения в приближении слабой нелинейности, в которых коэффициенты взаимодействия зависят от характеристик крупномасштабной сжимаемости и термодинамических характеристик плазмы. Получены выражения для инкрементов параметрических неустойчивостей трехволновых взаимодействий с учетом крупномасштабной сжимаемости.

DOI: 10.1134/S0044451018120180

вые фундаментальные плазменные процессы возникают в различных астрофизических объектах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство наблюдаемых объектов во Вселенной находится в состоянии плазмы. Изучение плазменных сред и плазменных объектов вне земной атмосферы является предметом плазменной астрофизики. Такое определение охватывает область астрофизики (вне солнечной системы), а также область космической физики (Солнце). В широком смысле целью плазменной астрофизики является изучение и описание поведения плазмы для того, чтобы понять детальную эволюцию различных объектов, наблюдаемых во Вселенной: от звезд и планетных систем до галактик и скоплений галактик. Сила и потенциальное преимущество плазменной астрофизики как области знаний состоят в том, что одинако-

В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений астрофизической плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные объекты во Вселенной. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных различий в поведении плазменных течений вследствие присутствия магнитных полей. Другим важным принципиальным отличием плазменной астрофизики является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Именно исследованию фундаментальной роли сжимаемости в крупномасштабных течениях астрофизической плазмы и посвящена данная работа.

* E-mail: klimachkov@gmail.com

Отметим прежде всего, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных плазменных течений (например, на Солнце [1, 2]) выполнены на основе изучения магнитных полей или с помощью методов астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей. Учет сжимаемости в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы существенно повышает потенциальную возможность интерпретации астросейсмологических данных, в частности, данных о широтной зависимости собственных мод солнечных осцилляций [2]. Заметим, что полная система уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы достаточно сложна как для теоретического анализа, так и для численного моделирования, поэтому в работе мы предлагаем магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости плазмы. Выведенные ранее [3] уравнения обобщаются в настоящей работе на случай тонкого вращающегося слоя сжимаемой плазмы со свободной границей в поле силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле. Предложены две системы уравнений: уравнения с полным учетом силы Кориолиса и уравнения на β -плоскости. Таким образом, полученные в данной работе упрощенные двумерные магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды, принципиальные для описания течений в плазменной астрофизике, представляют собой единственную самосогласованную возможность учета внешнего вертикального магнитного поля и сжимаемости, в отличие от традиционных двумерных магнитогидродинамических уравнений на плоскости [4, 5].

Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Приближение мелкой воды в магнитной гидродинамике применяется для изучения солнечного тахоклина [6–10], растекания материи при дисковой аккреции в нейтронных звездах [11, 12], динамики атмосфер нейтронных звезд [13, 14], атмосфер внесолнечных планет [15]. Отметим важные работы, посвященные развитию теории волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн в слоях астрофизической и космической плазмы в приближении мелкой воды. В работе [16] развита слабонелинейная теория волновых взаимодействий в крупномасштабных течениях вращающегося слоя плазмы со свободной поверхностью в

поле силы тяжести на ровной границе в вертикальном внешнем магнитном поле.

В работе [16] мы использовали приближение мелкой воды магнитной гидродинамики для получения уравнений взаимодействия волновых пакетов волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Показано, что наличие вертикального магнитного поля обеспечивает выполнение условий синхронизма для следующих конфигураций трех волн: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофические волны, а также две магнитострофические волны и одна волна магнито-Пуанкаре и две волны магнито-Пуанкаре и одна магнитострофическая волна. Для каждого из обнаруженных видов взаимодействий получены системы нелинейных уравнений для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн асимптотическим методом многомасштабных разложений. Показано, что в слабонелинейном приближении реализуются распадные неустойчивости, и найдены их инкременты.

В данной работе развитая ранее [14, 16] теория линейных волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн и их нелинейных взаимодействий обобщается на случай сжимаемых течений вращающейся астрофизической плазмы. Для этого мы используем предложенную систему уравнений в приближении мелкой воды и получаем зависимость дисперсионных уравнений, коэффициентов взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности и инкрементов параметрических неустойчивостей от характеристик сжимаемости среды и термодинамических характеристик вращающейся плазмы.

Другим типом волн, определяющим крупномасштабную динамику астрофизической плазмы, являются волны Россби. Волнами Россби здесь мы называем крупномасштабные волны, возникающие вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме и распространяющиеся вследствие широтных неоднородностей силы Кориолиса для сферического случая, по аналогии с нейтральной жидкостью. Волны Россби определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [5, 17–20], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [15], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [12]. Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер. Изучение таких волн является предметом многочисленных исследований в геофизической гидродинамике [21, 22]. В случае же течений астрофизической плазмы теория волн Россби существенно усложняется из-за наличия магнитно-

го поля, поэтому основные результаты относительно магнитных волн Россби получены в линейном приближении [8, 14, 18, 19] с использованием магнитогидродинамической теории мелкой воды. Отметим важные работы по развитию нелинейной теории магнитных волн Россби [20, 23], а также первые экспериментальные результаты по обнаружению волн Россби на Солнце [1, 2]. Все перечисленные явления в плазменной астрофизике получены на основе магнитогидродинамического приближения мелкой воды в несжимаемой плазме.

В настоящей работе мы развиваем теорию линейных волн и нелинейных взаимодействий в течениях астрофизической плазмы при учете сжимаемости. Для этого мы используем предложенную систему уравнений в приближении мелкой воды на β -плоскости, в котором параметр Кориолиса линейно зависит от широты, и получаем зависимость дисперсионных уравнений, коэффициентов взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности и инкрементов параметрических неустойчивостей от характеристик сжимаемости среды и термодинамических характеристик вращающейся плазмы.

Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, используемая в настоящей работе, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи [3] и является обобщением уравнений, полученных в работах [6, 16, 24–28]. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости по сравнению со случаем несжимаемой плазмы [3, 29, 30]. Полученная система нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты столба. Полученная система имеет широкий спектр применения для описания астрофизической плазмы, поэтому в работе приведен анализ пределов применимости данного приближения. Динамика течений,

описываемых полученной системой в случаях, когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая, описываемого системой магнитогидродинамических уравнений несжимаемой жидкости мелкой воды, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве эквивалента массы в полных магнитогидродинамических уравнениях используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры систем уравнений для обеих моделей.

Отметим также существенное различие магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы и нейтральной жидкости, заключающееся в наличии условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно. Отсюда следует, что для приближенных уравнений мелкой воды должно присутствовать следствие условия бездивергентности в исходной системе магнитогидродинамических уравнений, которое также должно выполняться тождественно для полученной упрощенной системы. В результате уравнения мелкой воды при наличии внешнего вертикального магнитного поля [31] отличаются от традиционных. Усреднение по глубине уравнений магнитной гидродинамики при наличии внешнего магнитного поля показывает принципиальную трехкомпонентность магнитного поля вместе с двухкомпонентностью поля скоростей, как и в случае несжимаемой плазмы [31].

В разд. 2 получены две системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом сжимаемости: система уравнений с полным учетом силы Кориолиса (приближение f -плоскости) и система уравнений, в которой параметр Кориолиса линейно зависит от широты (приближение β -плоскости). В разд. 3 получены дисперсионные соотношения для линейных волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн, волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и волн Россби в горизонтальном магнитном поле с учетом сжимаемости плазмы. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений линейных волн и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для каждого типа волн в сжимаемой плазме. В разд. 4 методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий для всех случаев волнового синхронизма. Для каждого случая исследованы параметрические неустойчивости, проведено сравнение с несжимаемой плаз-

мой. В Заключении приведены основные результаты работы.

2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ПЛАЗМЫ В ВЕРТИКАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В данном разделе получим важную для плазменной астрофизики систему уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом эффектов сжимаемости, используя усреднение по высоте слоя трехмерной системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой плазмы. Мы используем вывод системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости [3], который мы обобщим для описания течений слоя плазмы со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле \mathbf{B}'_0 в поле силы тяжести при наличии вращения. Рассмотрим тонкий слой вращающейся сжимаемой плазмы при наличии силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 1). В качестве исходной используем следующую систему:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} = -\frac{\nabla p}{\rho} - f [\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] - \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad (2.4)$$

$$p = \rho RT, \quad (2.5)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

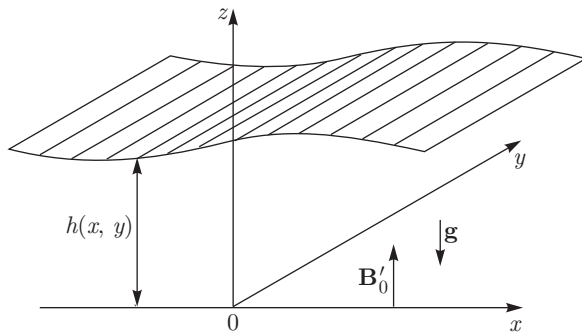


Рис. 1. Геометрия задачи

В уравнениях (2.1)–(2.6) $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ — скорость, $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3) = \mathbf{B}/2\sqrt{\pi}$ — величина, пропорциональная магнитному полю $\tilde{\mathbf{B}}$, ρ — плотность плазмы, p — полное (магнитное и гидродинамическое) давление плазмы, $f = 2\Omega$ — параметр Кориолиса, γ — показатель адиабаты, T — температура плазмы, R — универсальная газовая постоянная, g — ускорение свободного падения, g и f считаем постоянными.

В рассматриваемой системе уравнение (2.1) — уравнение движения, (2.2) — уравнение переноса магнитного поля, (2.3) — закон сохранения массы, (2.4) — уравнение адиабаты идеального газа, (2.5) — уравнение Клапейрона, которое используется для нахождения граничных условий, (2.6) — условие бездивергентности магнитного поля, которое автоматически удовлетворяется при задании корректных начальных условий.

Уравнения (2.1)–(2.6) записаны в неинерциальной системе координат, вращающейся вместе со слоем плазмы. При переходе в эту систему отсчета в уравнении для изменения скорости возникают дополнительные силы — центробежная и Кориолиса. В уравнении (2.1) пренебрегается влиянием центробежной силы по сравнению с силой тяжести [32]. Уравнение индукции магнитного поля при этом сохраняет прежний вид, так как при переходе во вращающуюся систему в нерелятивистском случае ($v \ll c$) и при условии вмороженности магнитного поля ($E < (v/c)B$) изменением магнитного поля можно пренебречь. Оператор ротора при этом инвариантен относительно преобразования скорости при переходе во вращающуюся систему координат.

Запишем граничные условия для рассматриваемой геометрии течения (рис. 1):

$$u_3|_{z=0} = 0, \quad (2.7)$$

$$u_3|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$B_3|_{z=0} = B'_0, \quad (2.9)$$

$$B_3|_{z=h} = B_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + B_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$p|_{z=h} = p_h = \text{const} \quad T|_{z=h} = T_h = \text{const}. \quad (2.11)$$

Выражения (2.7) и (2.8) — условия непротекания соответственно на дне $z = 0$ и на свободной границе $z = h(x, y, t)$, означающие равенство нулю нормальной к поверхности составляющей скорости жидкости. Условия (2.9), (2.10) означают, что магнитное поле на дне вертикально и равно $B'_0 = \text{const}$, а

на свободной границе параллельно поверхности. Последние два условия (2.11) задают постоянные значения давления и температуры на свободной границе. Заметим, что если один из параметров p, ρ, T постоянен на свободной границе, то остальные два параметра постоянны вследствие уравнения Клапейрона и адиабатичности рассматриваемых процессов. Используя уравнение Клапейрона, получим выражение для плотности на свободной границе:

$$\rho_h = \frac{p_h}{RT_h} = \text{const}.$$

Таким образом, течение вращающегося слоя магнитной жидкости со свободной границей $z = h(x, y, t)$ на ровной поверхности полностью описывается системой уравнений (2.1)–(2.6) и граничными условиями (2.7)–(2.11).

Давление в слое плазмы полагаем гидростатическим, тогда вертикальная составляющая уравнения (2.1) записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) и уравнение (2.5) при этом становятся замкнутой системой и позволяют определить p, ρ . При этом уравнение адиабаты, применяя граничные условия (2.11), можем записать в следующем виде:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_h}{\rho_h^\gamma}. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) найдем величины p и ρ . Для этого выразим ρ через p из уравнения (2.13), подставим в уравнение (2.12) и проинтегрируем по вертикали от 0 до $h(x, y, t)$, используя граничное условие (2.11):

$$p(x, y, z, t) = p_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{2.14}$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho} \right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{2.15}$$

где

$$H_\rho = \frac{c_p T_h}{g}, \tag{2.16}$$

$c_p = \gamma R / (\gamma - 1) = \text{const}$ — теплоемкость при постоянном давлении. Величина H_ρ называется характерной плотностной высотой и соответствует масштабу высоты, на котором вариация плотности по высоте становится существенной.

Усредним уравнения (2.1)–(2.3) по высоте слоя от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$. Интегрирование уравнения (2.3) после вынесения производной из-под знака интеграла и использования граничных условий (2.7)–(2.10) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_2 dz = 0. \tag{2.17}$$

Проинтегрируем теперь x -составляющую уравнения (2.1) по глубине слоя от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$, воспользовавшись формулой Лейбница и граничными условиями (2.7)–(2.10). Получим усредненное уравнение движения в проекции на ось x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u_1^2 - \rho B_1^2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \\ + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + B_0 u_x = f \int_0^h \rho u_2 dz, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $B_0 = \rho_0 B'_0$, а ρ_0 — постоянная плотность на нижней границе. Аналогично преобразуем и y -составляющую уравнения (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\rho u_2^2 - \rho B_2^2) dz + \\ + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial y} dz + B_0 u_y = -f \int_0^h \rho u_1 dz. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Усредним аналогично уравнение переноса магнитного поля. Тогда из (2.2) для горизонтальных составляющих получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (u_2 B_1 - u_1 B_2) dz - \\ - B_0 B_x = 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (u_1 B_2 - u_2 B_1) dz - \\ - B_0 B_y = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Усредняя также уравнение бездивергентности магнитного поля (2.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h B_2 dz + B_3 = 0. \tag{2.22}$$

Из уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_3 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_3 u_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h u_2 B_3 dz = 0. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) играет важную роль для понимания приближения мелкой воды во внешнем магнитном поле, так как уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля имеет ключевое значение для удовлетворения условия бездивергентности в усредненной по высоте системе уравнений.

Уравнения (2.23) и (2.22) являются важными в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали в процедуре вывода уравнений, но и обеспечивают выполнение условия бездивергентности магнитного поля при их усреднении в сжимаемой плазме. Кроме того, уравнение (2.23) демонстрирует существование z -компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном поле.

Введем далее средние по высоте слоя плотность $\bar{\rho}$, давление \bar{p} , горизонтальные скорости \bar{u}_i и горизонтальные составляющие магнитного поля \bar{B}_i :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \int_0^h \rho dz, \quad \bar{p} = \frac{1}{h} \int_0^h p dz, \quad (2.24)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h} \int_0^h u_i dz, \quad \bar{B}_i = \frac{1}{h} \int_0^h B_i dz, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

Подставим в уравнения (2.24) выражения для ρ и p из (2.15) и (2.14) и получим

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \quad (2.26)$$

$$\bar{p} = \frac{p_h}{h} \frac{H_\rho}{\gamma/(\gamma-1)+1} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)+1} - 1 \right]. \quad (2.27)$$

Величины p, ρ, u_i, B_i представим в виде суммы средних значений и малых флуктуаций:

$$p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad B_i = \bar{B}_i + B'_i, \quad (2.28)$$

причем

$$\int_0^h \rho' dz = \int_0^h p' dz = \int_0^h u'_i dz = \int_0^h B'_i dz = 0. \quad (2.29)$$

Введем новую переменную l :

$$l = h\bar{\rho} = \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right]. \quad (2.30)$$

Тогда в уравнениях (2.18), (2.19), используя выражение (2.26), слагаемые с давлением запишем в следующем виде:

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = g\bar{\rho}h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a^2 g}{l} \frac{\partial l}{\partial x}, \quad (2.31)$$

где

$$a^2 = \frac{l}{\rho_h} \left(l \frac{g}{p_h} + 1 \right)^{-1/\gamma}. \quad (2.32)$$

Аналогично преобразуем слагаемое с давлением в уравнении (2.19). Подставляя в уравнения (2.17)–(2.22) средние значения $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{u}_i, \bar{B}_i$ и пренебрегая интегралами от произведений флуктуаций, получим усредненную по высоте слоя систему уравнений (см. рис. 1):

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l u_x}{\partial x} + \frac{\partial l u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial l u_x}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x^2 - l B_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} + B_0 B_x - f l u_y = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial l u_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial (l u_y^2 - l B_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + f l u_x = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial t} + \frac{\partial (l u_y B_x - l u_x B_y)}{\partial y} - B_0 u_x = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial l B_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x B_y - l u_y B_x)}{\partial x} - B_0 u_y = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial x} + \frac{\partial l B_y}{\partial y} + B_z = 0. \quad (2.39)$$

Система (2.33)–(2.39) является естественным обобщением магнитогидродинамических уравнений

мелкой воды, полученных в работах [3, 31]. Уравнение (2.33) — следствие закона сохранения массы. Уравнения (2.34), (2.35) получены интегрированием уравнений изменения импульса, а уравнения (2.36), (2.37) — интегрированием уравнений изменения магнитного поля, причем, вследствие наличия вертикального магнитного поля B'_0 в граничных условиях, эти уравнения содержат новые слагаемые по сравнению с работой [3]. Новое уравнение (2.38) для вертикальной составляющей B_z магнитного поля получено интегрированием уравнения для вертикального магнитного поля в трехмерной системе. При задании корректных начальных условий уравнение (2.39), получаемое из условия бездивергентности магнитного поля в трехмерной системе, выполняется тождественно как следствие из уравнений (2.36)–(2.38).

Система уравнений (2.33)–(2.39) записана относительно u_x, u_y — усредненных по высоте слоя горизонтальных скоростей трехмерного течения, B_x, B_y — средних по высоте горизонтальных магнитных полей, средней по высоте вертикальной составляющей B'_z магнитного поля, умноженной на плотность на нижней границе $\bar{\rho}$, $B_z = B'_z \bar{\rho}$, и переменной l , аналогичной высоте слоя для несжимаемой плазмы. Переменная l явным образом связана с высотой слоя h в соответствии с выражением (2.30).

Система уравнений (2.33)–(2.39) записана для слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле, что приводит к существенным изменениям в структуре уравнений. Магнитное поле становится принципиально трехкомпонентным, причем вертикальная компонента магнитного поля зависит только от горизонтальных координат и времени, и ее изменение описывается уравнением (2.38). Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от полной системы, поэтому для дальнейшего исследования волновых процессов в сжимаемых магнитогиродинамических течениях в приближении мелкой воды мы будем решать замкнутую систему (2.33)–(2.37). В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля система переходит в уравнения магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости, полученные в работе [3]. Величина H_ρ определяется в (2.16) и характеризует масштаб глубины, на котором становятся существенными изменения плотности. Если характерная глубина h слоя много меньше характерной высоты H_ρ , то $\varepsilon = h/H_\rho \rightarrow 0$ и данное течение можно считать несжимаемым. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (2.33)–(2.39) переходит в классические

магнитогиродинамические уравнения вращающейся мелкой воды для несжимаемой плазмы.

Система уравнений (2.33)–(2.38) существенно отличается от классических магнитогиродинамических уравнений для несжимаемых течений. В классических магнитогиродинамических уравнениях мелкой воды высота, скорость и магнитное поле столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (2.33)–(2.38) это взаимодействие определяется не только высотой, скоростью и магнитным полем, но и средней плотностью столба жидкости, поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. Как следствие, в полученных в работе уравнениях появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности. Таким образом, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Кроме того, учет крупномасштабной сжимаемости существенно модернизирует уравнения изменения импульса.

Определяющим локальным параметром вращения для тонкого слоя плазмы на поверхности сферы является параметр Кориолиса $f = 2\Omega \sin \theta$, где θ — широта, а Ω — угловая скорость вращения сферы. Для учета эффектов сферичности тонкого слоя сжимаемой плазмы в декартовых координатах рассмотрим зависимость параметра Кориолиса от широты, $f(\theta)$. Для этого используем приближение β -плоскости, в котором изменение параметра Кориолиса f при малых изменениях широты θ считается линейным:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cos \theta_0 = f_0 + \beta y. \quad (2.40)$$

В выражении (2.40) Ω — угловая скорость вращения слоя, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, θ_0 — широта, на которой рассматривается течение, и $\beta = \partial f / \partial y$. В рассматриваемом приближении мы пренебрегаем сферичностью поверхности. Продифференцировав в исходной системе уравнение (2.34) для горизонтальной скорости u_x по y с учетом зависимости параметра Кориолиса от широты, получим следующую систему уравнений, которую будем использовать для исследования волн магнито-Россби:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l u_x}{\partial x} + \frac{\partial l u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l u_x}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 (l u_x^2 - l B_x^2)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial a^2 g}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} + a^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial y \partial x} + B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} - \\ - f_0 \frac{\partial l u_y}{\partial y} - \beta l u_y = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l u_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial (l u_y^2 - l B_y^2)}{\partial y} + \\ + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + f_0 l u_x = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial t} + \frac{\partial (l u_y B_x - l u_x B_y)}{\partial y} - B_0 u_x = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial l B_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x B_y - l u_y B_x)}{\partial x} - B_0 u_y = 0. \quad (2.45)$$

Полученная гиперболическая система уравнений (2.41)–(2.45) является обобщением магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды на β -плоскости, полученных в работе [23], в которой приведены технические детали вывода приближения β -плоскости. В приближении β -плоскости мы рассматриваем течения, в которых характерный горизонтальный масштаб L много больше радиуса сферичности, поэтому параметры f_0 и β можно считать постоянными, $f_0 = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Таким образом, задача исследования течений сжимаемого слоя плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды сводится к анализу квазилинейной системы (2.33)–(2.37) уравнений на f -плоскости и системы уравнений (2.41)–(2.45) на β -плоскости для учета эффектов сферичности в декартовых координатах. При этом решения однозначно определяют также высоту h свободной поверхности и величину вертикальной составляющей B_z переменного магнитного поля. И система уравнений на β -плоскости, и система уравнений на f -плоскости имеют стационарное решение в виде покоящегося слоя сжимаемой плазмы постоянной глубины, $l = l_0 = \text{const}$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_y = 0$, находящегося во внешнем вертикальном магнитном поле. При отсутствии внешнего вертикального поля ($B_0 = 0$) обе системы, (2.33)–(2.37) и (2.41)–(2.45), допускают стационарные решения в виде покоящегося слоя постоянной глубины с постоянным горизонтальным магнитным полем $l = l_0 = \text{const}$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_x^0 = \text{const}$, $B_y = B_y^0 = \text{const}$. Поэтому в работе отдельно рассматриваются два различных варианта стационарных решений для магнитного поля: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле. Далее мы используем

систему уравнений (2.33)–(2.37) на f -плоскости для развития теории линейных волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн и их нелинейных взаимодействий. Система уравнений на β -плоскости используется для развития теории линейных волн магнито-Россби и их нелинейных взаимодействий.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ МЕЛКОЙ ВОДЫ С УЧЕТОМ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СЖИМАЕМОСТИ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

3.1. Волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны

Будем искать решение в виде линейных волн в магнитогидродинамике в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле при учете крупномасштабной сжимаемости. Система уравнений (2.33)–(2.37) имеет точное стационарное решение $l = l_0 = \text{const}$, $u_x = u_y = B_x = B_y = 0$. Для нахождения решений в виде плоских волн линейризуем систему (2.33)–(2.37) относительно этого стационарного состояния:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + l_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$l_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial x} + B_0 B_x - f l_0 u_y = 0, \quad (3.2)$$

$$l_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + f l_0 u_x = 0, \quad (3.3)$$

$$l_0 \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_0 u_x = 0, \quad (3.4)$$

$$l_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_0 u_y = 0. \quad (3.5)$$

В системе (3.1)–(3.5) $a_0^2 = a^2(l_0)$. Будем искать решение линейризованной системы в виде плоской волны:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \exp [i(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)], \quad (3.6)$$

где ω — частота, $\mathbf{k}(k_x, k_y)$ и \mathbf{w}_1 — соответственно волновой и собственный векторы волны. После подстановки решения (3.6) в систему (3.1)–(3.5) получим систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\omega & k_x l_0 & k_y l_0 & 0 & 0 \\ -k_x a_0^2 g & \omega l_0 & -i f l_0 & B_0 & 0 \\ -k_y a_0^2 g & i f l_0 & \omega l_0 & 0 & B_0 \\ 0 & -B_0 & 0 & \omega l_0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 & \omega l_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ B_{x1} \\ B_{y1} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Система (3.7) имеет нетривиальные решения, только если определитель матрицы равен нулю. Условие равенства нулю определителя приводит к дисперсионному соотношению, описывающему волны, эквивалентные волнам магнито-Пуанкаре и магнито-строфическим волнам в несжимаемой плазме:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f^2 + k^2 a_0^2 g \right) + \left(k^2 a_0^2 g \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^4 \right) = 0. \quad (3.8)$$

Решая уравнение (3.8), получим

$$\omega^2 = \frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{a_0^4 g^2 k^4 + 2 f^2 a_0^2 g k^2 + f^4 + 4 f^2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2}, \quad (3.9)$$

$$\omega^2 = \frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{a_0^4 g^2 k^4 + 2 f^2 a_0^2 g k^2 + f^4 + 4 f^2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2}. \quad (3.10)$$

Дисперсионное соотношение (3.9) описывает волны магнито-Пуанкаре в сжимаемой плазме, которые являются аналогом волн Пуанкаре для нейтрального слоя. Дисперсионное соотношение (3.10) не имеет аналога в нейтральной среде и описывает магнито-строфические волны в сжимаемой плазме. Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы [14]. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рис. 2.

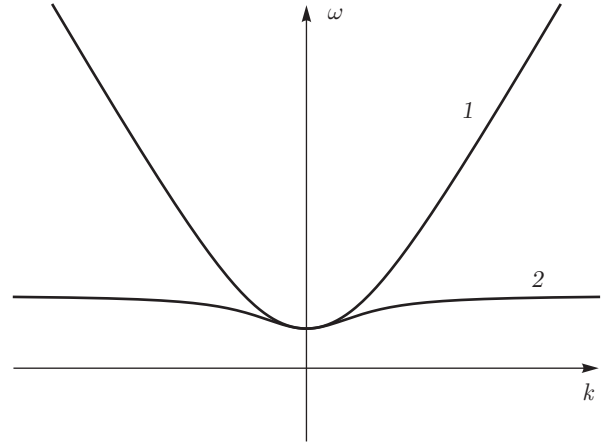


Рис. 2. Дисперсионные кривые волн магнито-Пуанкаре (1) и магнито-строфических волн (2) в сжимаемой плазме

Сравнивая дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнито-строфических волн в сжимаемой среде, (3.9) и (3.10), с соотношениями в случае несжимаемой плазмы [14], заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$, что в общем случае приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Пуанкаре и магнито-строфических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [31].

Таким образом, так же как и в случае несжимаемой плазмы [31], для того чтобы три волны испытывали взаимодействия, необходимо, чтобы сумма частот двух волн была равна частоте третьей волны и одновременно сумма волновых векторов этих волн была равна волновому вектору третьей волны, т. е., чтобы три волны удовлетворяли условию синхронизма [33]

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3), \quad (3.11)$$

где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ — волновые векторы взаимодействующих волн, а $\omega(\mathbf{k})$ — дисперсионное соотношение для соответствующей взаимодействующей волны. Для качественного анализа возможности трехволновых взаимодействий, изобразим условия (3.11) для трех волн магнито-Пуанкаре в сжимаемой плазме на графике (рис. 3а), представляющем собой проекцию дисперсионных поверхностей на плоскость (ω, k_x) . Первое слагаемое задает точку $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперси-

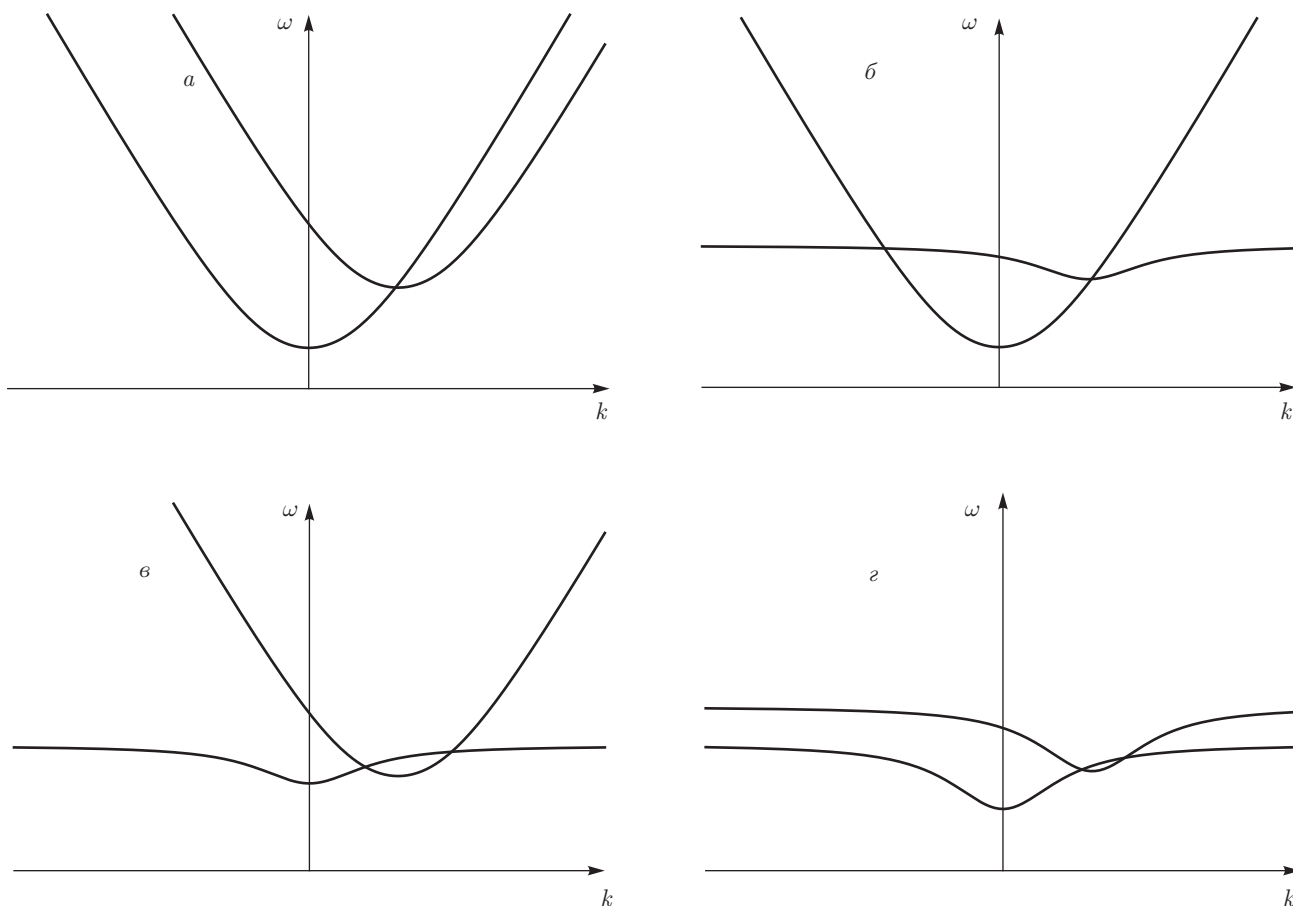


Рис. 3. Условия синхронизма трех волн магнито-Пуанкаре (а), двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны (б), двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре (в) и трех магнитострофических волн (г)

онной поверхности одной волны магнито-Пуанкаре, второе слагаемое — точку $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$ на смещенной на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности волны магнито-Пуанкаре; тогда наличие пересечения смещенной и начальной дисперсионных поверхностей означает, что найдется волна с волновым вектором \mathbf{k}_3 и частотой $\omega_3 = \omega(\mathbf{k}_3)$ такая, что три найденные волны удовлетворяют условию синхронизма (3.11). Таким образом показано, что существуют трехволновые взаимодействия трех волн магнито-Пуанкаре.

Аналогично на рис. 3б–г показано, что в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы со свободной поверхностью во внешнем вертикальном магнитном поле возможно существование трехволновых взаимодействий для двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны (рис. 3б), двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре (рис. 3в) и трех магнитострофических волн рис. 3г. Качественный анализ дисперсионных

соотношений показал, что при наличии крупномасштабной сжимаемости в тонком слое вращающейся плазмы существуют те же трехволновые взаимодействия, что и в несжимаемом случае, и в приближении малости высоты, на которой проявляется сжимаемость, по сравнению с высотой слоя описание трехволновых взаимодействий переходит в случай несжимаемой плазмы [14].

3.2. Волны магнито-Росби

Для описания крупномасштабных волн магнито-Росби в сжимаемой плазме, основным механизмом образования которых является вариация параметра Кориолиса f в зависимости от широты θ , используем приближение β -плоскости. Для этого рассмотрим систему (2.41)–(2.45), в которой в первом приближении учитывается сферичность тонкого слоя плазмы в декартовых координатах. Система на β -плоскости также имеет нетривиальное стациона-

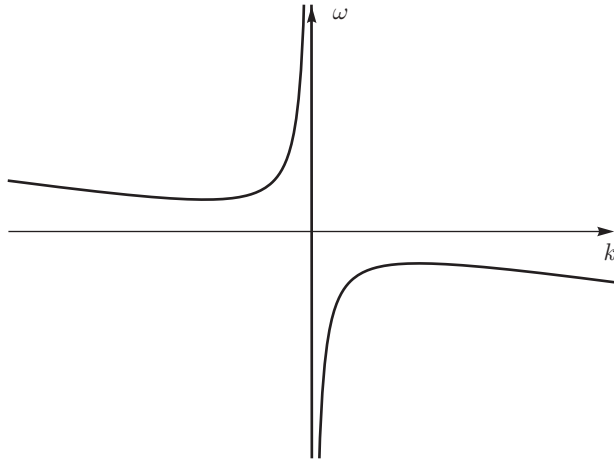


Рис. 4. Дисперсионные кривые волн магнито-Росси во внешнем вертикальном магнитном поле в сжимаемой плазме

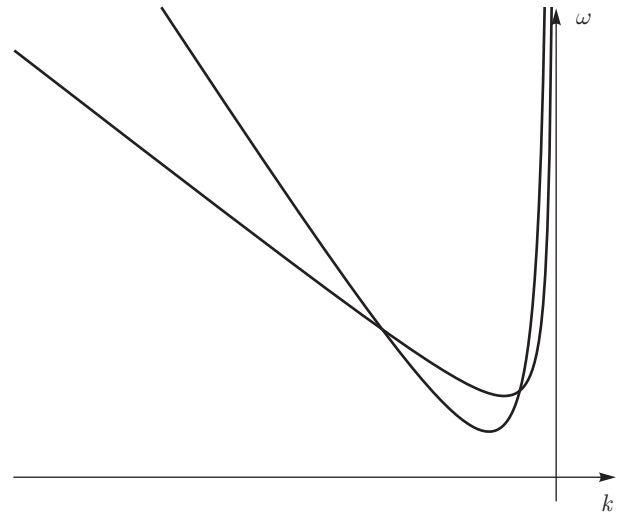


Рис. 5. Условие синхронизма для трех волн магнито-Росси во внешнем вертикальном магнитном поле

нарное решение в виде слоя постоянной толщины $l = l_0$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_y = 0$. Аналогично случаю системы на f -плоскости, линеаризуем уравнения на β -плоскости относительно стационарного состояния и найдем решение линеаризованной системы в виде плоских волн. Дисперсионное соотношение в этом случае примет следующий вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \left(k^2 a_0^2 g \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^4 \right) = 0. \quad (3.12)$$

Дисперсионное соотношение (3.12) описывает волны в магнитной гидродинамике на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом сжимаемости плазмы. В высокочастотном приближении дисперсионное соотношение (3.12) описывает волны, аналогичные волнам магнито-Пуанкаре в сжимаемой плазме (3.9):

$$\omega^2 = 2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g. \quad (3.13)$$

В низкочастотном приближении полученное дисперсионное соотношение описывает крупномасштабные волны Росби, для которых соотношение (3.12) принимает вид

$$\omega = \frac{(B_0/l_0)^2 (k^2 a_0^2 g + (B_0/l_0)^2)}{a_0^2 g k_x \beta}. \quad (3.14)$$

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в ви-

де мод магнито-Пуанкаре и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Росси (3.14), дисперсионное соотношение допускает моды быстрых волн магнито-Росси в сжимаемой плазме, аналогичных рассмотренным в работе [18] в несжимаемом случае. Соотношение (3.14) описывает волны магнито-Росси в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления k_x . Основной механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рис. 4.

Из выражения (3.12) следует, что учет крупномасштабной сжимаемости в магнитогидродинамических уравнениях мелкой воды приводит к изменению дисперсионного соотношения в линейной теории. Как и в случае волн на f -плоскости, сохраняется общий вид дисперсионных кривых, при этом коэффициенты в дисперсионном соотношении модернизируются: вместо выражения для квадрата скорости малых возмущений в несжимаемом слое gh появляется выражение $a_0^2 g$ (2.32), а также коэффициент, связанный с внешним вертикальным магнитным полем, изменяется на B_0/l_0 по сравнению с несжимаемым случаем [23]. Таким образом, сжимаемость приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Росси. В пределе несжимаемой плазмы ($h \ll H_p$) дисперсионное соотношение полностью переходит в известное соотношение для случая несжимаемой плазмы.

На рис. 5 для трех волн магнито-Росси в тонком слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикаль-

ном магнитном поле показано, что дисперсионная поверхность $\omega(\mathbf{k})$ пересекает такую же поверхность, смещенную от начала координат на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$, а значит, найдутся такие три волны магнито-Россби, для которых будут выполнены условия синхронизма. Таким образом, изменения в форме дисперсионных поверхностей в сжимаемой плазме оставляют возможность трехволновых взаимодействий между волнами магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле \mathbf{B}'_0 , как и в случае несжимаемой плазмы [23].

Рассмотрим теперь систему уравнений (2.41)–(2.45) на β -плоскости в случае отсутствия внешнего магнитного поля, $B'_0 = 0$. Тогда новая система имеет точное стационарное решение $l = l_0 = \text{const}$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_x^0 = \text{const}$, $B_y = B_y^0 = \text{const}$, соответствующее присутствию горизонтального магнитного поля \mathbf{B}^0 . Линеаризуя систему относительно этого стационарного состояния, получим

$$\partial_t l + l_0 \partial_x u_x + l_0 \partial_y u_y = 0, \quad (3.15)$$

$$l_0 \partial_y \partial_t u_x - B_x^0 l_0 \partial_y \partial_x B_x - B_y^0 l_0 \partial_y^2 B_x + a_0^2 g \partial_y \partial_x l - f_0 l_0 \partial_y u_y - \beta l_0 u_y = 0, \quad (3.16)$$

$$l_0 \partial_t u_y - B_x^0 l_0 \partial_x B_y - B_y^0 l_0 \partial_y B_y + a_0^2 g \partial_y l + f_0 l_0 u_x = 0, \quad (3.17)$$

$$l_0 \partial_t B_x - l_0 B_x^0 \partial_x u_x - l_0 B_y^0 \partial_y u_x = 0, \quad (3.18)$$

$$l_0 \partial_t B_y - l_0 B_y^0 \partial_y u_y - l_0 B_x^0 \partial_x u_y = 0. \quad (3.19)$$

Решение линеаризованной системы (3.15)–(3.19) будем искать в виде плоской волны малой амплитуды. Тогда получившаяся система линейных уравнений будет иметь нетривиальные решения в виде плоских волн, для которых выполняется следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \left(k^2 a_0^2 g (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0)^4 \right) = 0. \quad (3.20)$$

Аналогично случаю с внешним вертикальным магнитным полем, в низкочастотном приближении полученное дисперсионное соотношение описывает крупномасштабные волны Россби, для которых соотношение (3.20) принимает вид

$$\omega = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) (k^2 a_0^2 g + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0))}{a_0^2 g k_x \beta}. \quad (3.21)$$

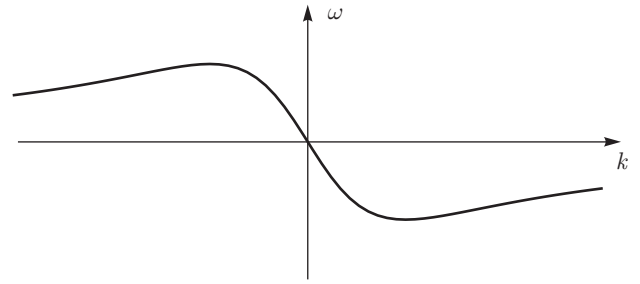


Рис. 6. Дисперсионные кривые волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле в сжимаемой плазме

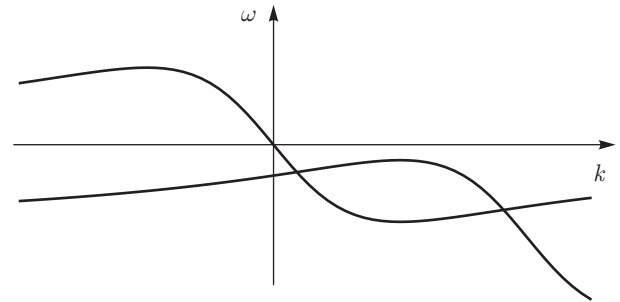


Рис. 7. Условие синхронизма для трех волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле

Соотношение (3.21) описывает волны Россби магнитной гидродинамики в горизонтальном магнитном поле в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления k_x . Общий вид дисперсионных кривых представлен на рис. 6.

Таким образом, учет сжимаемости в линейной теории для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле приводит к новому выражению для квадрата скорости малых возмущений $a_0^2 g$, при этом не меняется общий вид дисперсионного соотношения. Сжимаемость приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле. Отметим также, что вместо переменной h в соотношение (3.21) косвенно входит новая переменная l , в которую входит зависимость от средней плотности $\bar{\rho}$ столба плазмы. В приближении несжимаемой плазмы, $h \ll H_\rho$, дисперсионное соотношение переходит в известное соотношение [23].

Качественный анализ дисперсионных кривых для случая взаимодействия трех волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле (рис. 7) показывает наличие трехволновых взаимодействий, несмотря на различия кривизны дисперсионных поверхностей. Таким образом, аналогично случаю несжимаемой плазмы, рассмотренному в работе [23], в горизонтальном магнитном поле найдутся три

волны магнито-Россби, такие что условие синхронизма (3.11) выполняется.

4. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СЖИМАЕМЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

4.1. Метод многих масштабов

Для изучения слабонелинейных взаимодействий мы используем асимптотический метод многомасштабных разложений [34]. В наших работах [16, 23, 31] этот метод подробно изложен для изучения несжимаемых течений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Качественный анализ дисперсионных соотношений, приведенный в предыдущем разделе, показывает возможность аналогичных взаимодействий при наличии крупномасштабной сжимаемости. Практически, речь идет об изменении коэффициентов взаимодействий трех волн в приближении слабой нелинейности. Поэтому мы не приводим подробного вывода трехволновых уравнений, ограничиваясь, для удобства читателей и единообразия обозначений, кратким изложением метода получения уравнений для трехволновых взаимодействий.

Для того чтобы получить уравнения для взаимодействия волн малой амплитуды, решение полной системы (2.33)–(2.37) представляем в виде ряда по малому параметру ε :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad (4.1)$$

где \mathbf{u}_0 — стационарное решение полной системы, \mathbf{u}_1 — решение линейной задачи, \mathbf{u}_2 — поправка, которая описывает влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные ε^2 , получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно поправки \mathbf{u}_2 , содержащую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие малости поправки по сравнению с решением линейной задачи, $\varepsilon^2 \mathbf{u}_2 \ll \varepsilon \mathbf{u}_1$, на больших масштабах. Поэтому, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от медленных временных и больших пространственных масштабов в виде

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1(T, X, Y) \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] + \text{c.c.}, \quad (4.2)$$

где $T = \varepsilon t$ — медленное время, $X = \varepsilon x, Y = \varepsilon y$ — большие горизонтальные масштабы. Тогда условие ортогональности правой части системы, пропорциональной ε^2 , ядру оператора левой части будет определять эволюционное уравнение для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн, обеспечивающее равномерную сходимость асимптотического ряда (4.1). Перейдем, таким образом, от аргументов (t, x, y) к «быстрым» (t, x, y) и «медленным» (T, X, Y) переменным в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y}. \quad (4.4)$$

Подставляя в исходную систему магнитогидродинамических уравнений мелкой воды выражения (4.1), (4.3), (4.4) и выписав слагаемые, пропорциональные ε^2 , получим выражение для нелинейной поправки следующего вида:

$$A_f \mathbf{u}_2 = S_f \mathbf{u}_1 + R_f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1). \quad (4.5)$$

Слева в выражении (4.5) стоит линейный оператор A_f , действующий на поправку \mathbf{u}_2 , а справа стоят слагаемые, которые могут привести к линейному по времени или координате росту решения. Тогда условие ортогональности правой части ядру оператора A_f , приводящее к нелинейному уравнению для малых амплитуд, запишется в виде

$$\mathbf{z} \cdot (S_f \mathbf{u}_1 + R_f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)) = 0, \quad (4.6)$$

где \mathbf{z} — собственный вектор оператора A_f^* .

Представим решение в виде суммы трех волн, амплитуды которых зависят от T, X, Y , удовлетворяющих условию синхронизма (3.11):

$$u_1 = \psi \mathbf{w}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \chi \mathbf{w}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \varphi \mathbf{w}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + \text{c.c.}, \quad (4.7)$$

где φ, ψ, χ — комплексные амплитуды взаимодействующих волн, \mathbf{w} — комплексный вектор волны. Домножим правую часть системы (4.5) на собственный вектор оператора A_f^* и сначала выпишем слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_3)$, затем — пропорциональные $\exp(i\theta_1)$ и $\exp(i\theta_2)$. В результате получим систему из трех уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P^1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q^1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F^1 \psi \chi, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F^2 \varphi \chi^*, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + P^3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + Q^3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F^3 \varphi \psi^*, \quad (4.10)$$

в которых коэффициенты взаимодействия F^i , а также коэффициенты при производных, P^i и Q^i , различны для каждого рассмотренного в предыдущем разделе случая трехволновых взаимодействий.

4.2. Трехволновые взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн

Рассмотрим решение исходной системы уравнений (2.33)–(2.37) на f -плоскости в виде трех волн

$$F^i = F_f^i = \frac{\mathbf{z}^i}{l_0 (\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i)} \begin{pmatrix} ik_{ix}l_0\xi_{12}^{jk} + ik_{iy}l_0\xi_{13}^{jk} \\ -i\omega_i\xi_{12}^{jk} + ik_{ix}l_0 \left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk} \right) + ik_{iy}l_0 \left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk} \right) - f\xi_{13}^{kj} \\ -i\omega_i\xi_{13}^{jk} + ik_{ix}l_0 \left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk} \right) + ik_{iy}l_0 \left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk} \right) + f\xi_{12}^{kj} \\ -i\omega_i\xi_{14}^{jk} + ik_{iy}l_0 \left(\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk} \right) \\ -i\omega_i\xi_{15}^{jk} + ik_{ix}l_0 \left(\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk} \right) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$P^i = P_f^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \left(l_0 z_1^i w_2^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i \right), \quad (4.12)$$

$$Q^i = Q_f^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \left(l_0 z_1^i w_3^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i \right). \quad (4.13)$$

В выражении (4.11)

$$\xi_{mn}^{jk} = \begin{cases} w_m^2 w_n^3 + w_n^2 w_m^3, & i = 1, \\ w_m^1 w_n^{*3} + w_n^1 w_m^{*3}, & i = 2, \\ w_m^1 w_n^{*2} + w_n^1 w_m^{*2}, & i = 3, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$S = \frac{a_0^2 g}{2l_0^2} \left(1 - \frac{gl_0}{\gamma(gl_0 + p_h)} \right). \quad (4.15)$$

Полученная нелинейная система уравнений описывает зависимость амплитуд взаимодействующих волн от «медленных» аргументов T, X, Y . Система уравнений (4.8)–(4.10) получена для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн в магнитогидродинамике во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости. Аналогично этому случаю из системы уравнений в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости на β -плоскости получаются системы уравнений для взаимодействующих волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле \mathbf{B}_0^i и волн магнито-Россби, распространяющихся на фоне постоянного горизонтального магнитного поля \mathbf{B}^0 .

Учет крупномасштабной сжимаемости в рассматриваемых течениях существенно изменяет коэффициенты в трехволновых уравнениях для взаимодействующих волн магнито-Пуанкаре и магнито-

магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, удовлетворяющих условию синхронизма (3.11). Используя метод многомасштабных разложений, получим нелинейную систему уравнений для амплитуд взаимодействующих волн в виде (4.8)–(4.10), в которой коэффициенты взаимодействия F^i и коэффициенты P^i, Q^i перед производными $\partial/\partial X, \partial/\partial Y$ имеют следующий вид:

строфических волн малой амплитуды. Новые коэффициенты записаны через величину l_0 , включающую в себя зависимость от высоты H_ρ , на которой проявляются эффекты статической сжимаемости. В выражения для коэффициентов (4.11)–(4.13) также входит модифицированное выражение для квадрата скорости малых возмущений в случае сжимаемой среды, $a_0^2 g$. Кроме того, в коэффициенте при выражении для квадрата скорости малых возмущений появляется множитель $1 - gl_0/\gamma(gl_0 + p_h)$, уменьшающий величину коэффициента взаимодействия F_f^i . В случае, когда эффектами сжимаемости можно пренебречь, система уравнений (4.8)–(4.10) для амплитуд взаимодействующих волн на f -плоскости полностью переходит в систему уравнений, полученную для случая несжимаемой плазмы в работе [16].

Используем полученные системы (4.8)–(4.10), (4.11)–(4.13) для качественного анализа параметрических неустойчивостей взаимодействующих волн. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн, $\varphi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной, $\varphi = \varphi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой φ можно пренебречь. В этом случае система (4.8)–(4.10) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_f^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_f^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_f^2 \varphi_0 \chi, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + D_f^3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + E_f^3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_f^3 \varphi_0 \psi. \quad (4.17)$$

Решение полученной линейной системы уравнений есть

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T), \quad (4.18)$$

где инкремент

$$\Gamma = \sqrt{|F_f^2 F_f^3|} \varphi_0. \quad (4.19)$$

Величины F_f^2 и F_f^3 определены в (4.11). Изменение коэффициентов взаимодействия в амплитудных уравнениях вследствие учета крупномасштабной сжимаемости приводит к изменению величины инкремента параметрической неустойчивости (4.19). Решение в случае малости высоты h слоя по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, переходит в решение для случая несжимаемой плазмы [16].

Возможны два сценария развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимыми с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда φ_0 волны накачки много больше амплитуд двух других магнито-Россби волн, ψ и χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой φ_0 . В рассмотренное, таким образом, необходимо включить уравнение (4.8). При условии $\text{Re } F_f^1 < 0$ амплитуда φ волны накачки, так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ , уменьшается, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

Таким образом, одна из взаимодействующих на f -плоскости волн с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны магнито-Россби с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 и частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (4.19).

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн, $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными, $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение (4.8) для амплитуды φ принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_f^1 \psi_0 \chi_0. \quad (4.20)$$

Ищем решение уравнения (4.20) в виде

$$\varphi = \varphi' \exp(\Gamma T_1). \quad (4.21)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = |F_f^1| \psi_0 \chi_0, \quad (4.22)$$

где величина F_f^1 определена в (4.11). В рассмотренном сценарии развития неустойчивости две начальные волны в магнитной гидродинамике с учетом сжимаемости в приближении мелкой воды на f -плоскости с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают третью волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (4.22). Величина инкремента изменяется в соответствии с изменениями коэффициента взаимодействия F^i в амплитудных уравнениях (4.8)–(4.10) при учете сжимаемости. Выражение для инкремента (4.22) в случае малости высоты h слоя по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, переходит в решение для случая несжимаемой плазмы [16].

4.3. Трехволновые взаимодействия магнито-Россби волн во внешнем вертикальном магнитном поле

Рассмотрим три волны магнито-Россби, распространяющиеся в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле \mathbf{B}_0 , которые удовлетворяют условию синхронизма (3.11). Взаимодействия таких волн описываются системой нелинейных уравнений, которая в общем виде записывается как (4.8)–(4.10). Приведем выражения для коэффициентов взаимодействия F^i и для коэффициентов P^i, Q^i при производных $\partial/\partial X$ и $\partial/\partial Y$ в системе (4.8)–(4.10):

$$F^i = F_{\beta v}^i = \frac{\mathbf{z}^i}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \begin{pmatrix} ik_{ix} \xi_{12}^{jk} + ik_{iy} \xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0} \xi_{12}^{jk} + ik_{ix} (S \xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk}) + ik_{iy} (\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) - \left(\frac{f_0}{l_0} - \frac{i\beta}{k_{iy} l_0} \right) \xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0} \xi_{13}^{jk} + ik_{ix} (\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) + ik_{iy} (S \xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk}) + \frac{f_0}{l_0} \xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0} \xi_{14}^{jk} + ik_{iy} (\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk}) \\ -\frac{i\omega_3}{l_0} \xi_{15}^{jk} + ik_{ix} (\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk}) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$P^i = P_{\beta v}^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \left(l_0 z_1^i w_2^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i \right), \quad (4.24)$$

$$Q^i = Q_{\beta v}^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \times \\ \times \left(l_0 z_1^i w_3^i - \frac{\omega_i}{k_{iy}} z_2^i w_2^i + \frac{k_{ix}}{k_{iy}} \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i - \right. \\ \left. - i \frac{1}{k_{iy}} \frac{B_0}{l_0} z_2^i w_4^i + i \frac{f_0}{k_{iy}} z_2^i w_3^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i \right). \quad (4.25)$$

В выражении (4.31) для коэффициентов $F_{\beta h}^i$ величины S и ξ_{mn}^{jk} определяются в (4.15) и (4.14).

Отличие от случая несжимаемой плазмы, таким образом, состоит в наличии множителя $1 - gl_0/\gamma(gl_0 + p_h)$ при модифицированном выражении для квадрата скорости малых возмущений, $a_0^2 g$, а также зависимости коэффициента от новой переменной l_0 , в которую входит зависимость от величины крупномасштабной сжимаемости h_0/H_ρ . Как и на f -плоскости, выражения для коэффициентов взаимодействия в приближении β -плоскости в вертикальном магнитном поле переходят в известные выражения для коэффициентов, полученных для несжимаемой плазмы [23].

Исследуем полученную нелинейную систему для качественного анализа параметрических неустойчивостей волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн, $\varphi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной, $\varphi = \varphi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой φ можно пренебречь. В этом случае система (4.8)–(4.10) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_{\beta v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_{\beta v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_{\beta v}^2 \varphi_0 \chi, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + D_{\beta v}^3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + E_{\beta v}^3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_{\beta v}^3 \varphi_0 \psi. \quad (4.27)$$

Решение полученной линейной системы дифференциальных уравнений представляет собой экспоненциальный рост амплитуд ψ и χ взаимодействующих магнито-Россби волн с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{|F_{\beta v}^2 F_{\beta v}^3|} \varphi_0. \quad (4.28)$$

Таким образом, в тонком слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле волна магнито-Россби с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны магни-

то-Россби с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 и частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (4.28). Учет сжимаемости приводит к изменению величины инкремента вследствие изменения величины коэффициентов взаимодействия $F_{\beta v}^i$. В приближении $h \ll H_\rho$ выражение для инкремента неустойчивости (4.28) полностью переходит в выражение для коэффициента взаимодействия волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в несжимаемой плазме [23].

Аналогично волнам на f -плоскости, здесь также возможны два сценария развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимыми с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда φ_0 волны накачки много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн, ψ и χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой φ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (4.8). При условии $\text{Re } F_{\beta v}^1 < 0$ амплитуда φ волны накачки, так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ , уменьшается, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн, $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными, $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение (4.8) для амплитуды φ принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_{\beta v}^1 \psi_0 \chi_0. \quad (4.29)$$

Решением полученного линейного неоднородного дифференциального уравнения будет экспоненциальный рост амплитуды φ первой волны магнито-Россби с коэффициентом усиления

$$\Gamma = |F_{\beta v}^1| \psi_0 \chi_0, \quad (4.30)$$

где величина $F_{\beta v}^1$ определена в (4.23).

В рассмотренном сценарии развития параметрической неустойчивости с учетом сжимаемости плазмы две начальные волны магнито-Россби магнитной гидродинамики с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают третью волну магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (4.30). Сравнение выражения для инкрементов неустойчивости трех волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в случаях магнитной гидродинамики с уче-

том и без учета сжимаемости показывает, что отличие в выражениях для инкремента неустойчивости (4.30) определяется изменением величины коэффициентов взаимодействия F^i при учете сжимаемости. Таким образом, при условии малости высоты h слоя по сравнению с высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, полученное решение переходит в решение для несжимаемой плазмы, полученное в [23].

4.4. Трехволновые взаимодействия волн Россби в горизонтальном магнитном поле

Выпишем коэффициенты взаимодействия в уравнениях трехволновых взаимодействий для волн магнито-Россби, распространяющихся в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы в горизонтальном магнитном поле. Трехволновые уравнения для волн, удовлетворяющих условию синхронизма (3.11), имеют вид (4.8)–(4.10), где коэффициенты F^i, P^i, Q^i задаются выражениями

$$F^i = F_{\beta h}^i = \frac{\mathbf{z}^i}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \times \left(\begin{aligned} & -ik_{ix}\xi_{12}^{jk} - ik_{iy}\xi_{13}^{jk} \\ & \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{12}^{jk} - ik_{ix}(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk}) - ik_{iy}(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) + i\frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}^0}{l_0}\xi_{14}^{jk} - \left(\frac{f_0}{l_0} + \frac{i\beta}{k_{iy}l_0}\right)\xi_{13}^{jk} \\ & \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{13}^{jk} - ik_{ix}(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) - ik_{iy}(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk}) + i\frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}^0}{l_0}\xi_{15}^{jk} + \frac{f_0}{l_0}\xi_{12}^{jk} \\ & \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{14}^{jk} - ik_{iy}(\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk}) + i\frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}^0}{l_0}\xi_{12}^{jk} \\ & \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{15}^{jk} - ik_{ix}(\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk}) + i\frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}^0}{l_0}\xi_{13}^{jk} \end{aligned} \right), \quad (4.31)$$

$$P^i = P_{\beta h}^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \left(l_0 z_1^i w_2^i - B_x^0 z_2^i w_4^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i - B_x^0 z_3^i w_5^i - B_x^0 z_4^i w_2^i - B_x^0 z_5^i w_3^i \right), \quad (4.32)$$

$$Q^i = Q_{\beta h}^i = \frac{1}{\mathbf{z}^i \cdot \mathbf{w}^i} \left(l_0 z_1^i w_3^i - \frac{\omega_i}{k_{iy}} z_2^i w_2^i - B_x^0 \frac{k_x}{k_y} z_2^i w_4^i - 2B_y^0 z_2^i w_4^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} \frac{k_x}{k_y} z_2^i w_1^i - \frac{if_0}{k_y} z_2^i w_3^i - B_y^0 z_3^i w_5^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i - B_y^0 z_4^i w_2^i - B_y^0 z_5^i w_3^i \right). \quad (4.33)$$

В выражении (4.31) для коэффициентов $F_{\beta h}^i$ величины S и ξ_{mn}^{jk} определяются в (4.15) и (4.14).

Наличие сжимаемости в системе уравнений (2.41)–(2.45) приводит к изменению вида коэффициентов (4.31)–(4.33) системы нелинейных уравнений (4.8)–(4.10) для амплитуд взаимодействующих волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле. В выражениях для коэффициентов появляется новая переменная l_0 , включающая в себя зависимость от степени крупномасштабной сжимаемости, h_0/H_ρ (2.16), и выражение gh для квадрата скорости малых возмущений изменяется на величину $a^2 g$, в которой учитывается эффект сжимаемости. Кроме того, в коэффициентах появляются множители

$1 - gl_0/\gamma(gl_0 + p_h)$, стоящие при выражениях $a^2 g$, изменяющие вид коэффициентов по сравнению со случаем несжимаемой плазмы [23]. В приближении $h \ll H_\rho$ система нелинейных уравнений переходит в систему для несжимаемой плазмы, полученную в работе [23].

В трехволновых взаимодействиях волн магнито-Россби в тонком слое плазмы в горизонтальном магнитном поле с учетом эффектов сжимаемости присутствуют аналогичные неустойчивости, как в случае взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн и волн магнито-Россби в вертикальном магнитном поле. В случае, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн магнито-Россби много больше амплитуды двух других волн магнито-Россби, $\varphi \gg \psi, \chi$, и обратным воздействием в начальный момент можно пренебречь, считаем $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Амплитуды ψ и χ волн магнито-Россби возрастают экспоненциально с инкрементом параметрической неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{|F_{\beta h}^2 F_{\beta h}^3|} \varphi_0. \quad (4.34)$$

В рассмотренных начальных условиях волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле с волновым вектором \mathbf{k}_3 и частотой ω_3 распадается на две волны магнито-Россби с волновыми векторами

\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами соответственно ω_1 и ω_2 , удовлетворяющие условию синхронизма (3.11), амплитуды которых в начальный момент времени растут с инкрементом (4.34). Учет сжимаемости приводит к изменению величины инкремента параметрической неустойчивости (4.34) вследствие изменений в коэффициентах взаимодействия $F_{\beta h}^i$, что существенно влияет на динамику развития неустойчивости. При переходе к несжимаемой плазме ($h \ll H_\rho$), выражение для инкремента совпадает с полученным в работе [23].

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн, $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными, $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Амплитуда φ первой волны магнито-Россби магнитной гидродинамики с учетом сжимаемости в горизонтальном магнитном поле в этом случае возрастает экспоненциально с коэффициентом усиления

$$\Gamma = |F_{\beta h}^1| \psi_0 \chi_0, \quad (4.35)$$

где величина $F_{\beta h}^1$ определена в (4.31). Таким образом, две волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 и частотами ω_1 и ω_2 усиливают третью волну магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (4.35).

Учет крупномасштабной сжимаемости изменяет величины инкремента (4.35), что приводит к изменениям динамики развития неустойчивости. В случае, когда высота слоя много меньше характерной высоты, на которой проявляются эффекты сжимаемости, выражение (4.31) переходит в выражение для коэффициента взаимодействия в случае несжимаемой плазмы, откуда следует, что коэффициент параметрического усиления (4.35) переходит в аналогичный коэффициент для несжимаемой плазмы [23].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы эффекты сжимаемости в магнитной гидродинамике вращающейся астрофизической плазмы в приближении мелкой воды. В отличие от известных магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости мы предлагаем обобщение такой системы на случай тонкого слоя астрофизической плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. Отметим, что учет вертикального магнитного поля существенно расширяет возможности применения приближения мелкой воды в задачах плазмен-

ной астрофизики. Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, используемая в настоящей работе, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы, получена усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости. На основе предложенной системы уравнений получены новые магнитогидродинамические уравнения мелкой воды для сферических течений в приближении β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Развита теория линейных волн на основе предложенных уравнений.

В случае уравнений на f -плоскости полученные дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнитоастрофических волн существенно образом зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Аналогично в случае уравнений на β -плоскости дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Кроме того, показано, что скорость распространения слабых возмущений в обеих системах также зависит от степени изменения плотности.

Таким образом, исследование линейных волн в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости показывает зависимость групповых скоростей волн магнито-Пуанкаре, магнитоастрофических волн, волн магнито-Россби от степени сжимаемости плазмы. Несмотря на изменения в кривизне дисперсионных кривых линейных волн в обеих моделях, сохраняются те же самые условия реализации трехволновых взаимодействий в приближении слабой нелинейности.

В работе методом многомасштабных разложений получены коэффициенты взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности. Найдены зависимости коэффициентов взаимодействия

для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле, а также для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле от величины изменения плотности, вызванного крупномасштабной сжимаемостью. Аналогичные зависимости найдены для инкрементов параметрических неустойчивостей.

Авторы признательны рецензенту за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Фонда теоретической физики и математики «БАЗИС» и программы Президиума РАН 28 «Космос: Исследования фундаментальных взаимодействий и их взаимосвязи».

ЛИТЕРАТУРА

1. S. W. McIntosh, W. J. Cramer, M. P. Marcano, and R. J. Leamon, *Nature Astron.* **1**, 0086 (2017).
2. B. Loeptien, L. Gizon, A. C. Birch, J. Schou, B. Proxauf, T. L. Duvall Jr., R. S. Bogart, and U. R. Christensen, *Nature Astron.* **2**, 568 (2018).
3. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **150**, 602 (2016).
4. A. M. Balk, *Astrophys. J.* **796**(2), 143 (2014).
5. X. Márquez-Artavia, C. A. Jones, and S. M. Tobias, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **111**(4), 282 (2017).
6. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
7. M. S. Miesch and P. A. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
8. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J. Lett.* **691**, L41 (2009).
9. M. Dikpati, P. S. Cally, S. W. McIntosh, and E. Heifetz, *Nature, Sci. Rep.* **7**(1), 14750 (2017).
10. M. Dikpati, S. W. McIntosh, G. Bothun, P. S. Cally, S. S. Ghosh, P. A. Gilman, and O. M. Umurhan, *Astrophys. J.* **853**(2), 144 (2018).
11. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astronomy Lett.* **25**, 269 (1999).
12. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astronomy Lett.* **36**, 848 (2010).
13. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).
14. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
15. J. Y.-K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
16. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **149**, 965 (2016).
17. D. W. Hughes, R. Rosner, and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge Univ. Press (2007).
18. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, *Astron. Astrophys.* **470**, 815 (2007).
19. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, M. Carbonell, M. L. Khodachenko, H. Lammer, M. Leitinger, and P. Odert, *Astron. Astrophys.* **532**, A139 (2011).
20. B. Raphaldini and C. F. M. Raupp, *Astrophys. J.* **799**(1), 78 (2015).
21. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
22. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
23. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **152**, 705 (2017).
24. V. Zeitlin, *Nonlin. Proc. in Geophys.* **20**, 893 (2013).
25. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
26. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *Phys. Scripta* **155**, 014024 (2013).
27. H. De Sterck, *Phys. Plasmas* **8**, 3293 (2001).
28. P. J. Dellar, *Phys. Plasmas* **10**, 581 (2003).
29. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **141**, 1206 (2012).
30. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **143**, 779 (2013).
31. D. A. Klimachkov and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **381**, 106 (2017).
32. Ф. Должанский, *Основы геофизической гидродинамики*, Физматлит, Москва (2011).
33. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
34. L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, World Sci., Singapore (2014).