

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ ЮКАВЫ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ПАРАМЕТРОВ

В. В. Решетняк^{a}, А. Н. Старостин^{a,b}, А. В. Филиппов^{a**}*

^a ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
108840, Троицк, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (государственный университет)
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 4 июня 2018 г.

Статические свойства жидкостей Юкавы исследованы в широком диапазоне параметров: значения эффективного параметра неидеальности Γ^* менялось в диапазоне от 0 до 155, а значение структурного параметра κ — от 1 до 5. Исследования выполнены с использованием метода броуновской динамики и путем решения уравнения Орнштейна–Цернике в гиперцепном приближении. Анализ структуры жидкостей свидетельствует об их локальном упорядочении при больших значениях Γ^* , однако структур с трансляционным порядком при этом не наблюдалось. Отмечается немонотонная зависимость изотермической сжимаемости от Γ^* . Обсуждается возможность фазового перехода жидкости в стекловидное состояние.

DOI: 10.1134/S0044451018120192

$$u(r_{ij}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\lambda_D}\right), \quad (1)$$

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий мелкодисперсные частицы конденсированного вещества (пыли). Благодаря своему широкому распространению в природе и технике пылевая плазма привлекает значительное внимание исследователей [1–6]. Простота получения, наблюдения и управления параметрами пылевой плазмы делают ее привлекательным объектом для исследования фундаментальных свойств неидеальных систем. Значителен и прикладной интерес к пылевой плазме, который существенно возрос в последние десятилетия в связи с миниатюризацией электроники и развитием нанотехнологий.

Для описания свойств пылевой компоненты комплексной плазмы широко распространена модель системы частиц Юкавы (см. работы [3, 7–9], а также цитируемую в них литературу). Взаимодействие пары частиц при этом определяется выражением для экранированного кулоновского потенциала:

где r_{ij} — расстояние между частицами с индексами i и j ; q_i, q_j — заряды частиц, которые часто принимаются равными между собой ($q_i = q_j = q$); λ_D и k_D — длина дебаевского экранирования и соответствующая ей обратная величина.

Равновесные и неравновесные свойства систем Юкавы могут быть описаны с использованием приведенных параметров потенциала (1): параметра неидеальности $\Gamma = \beta u_0 / \delta$ и структурного параметра $\kappa = \delta / \lambda_D$ [10–24]. Здесь и далее $\beta^{-1} = k_B T$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, n — концентрация частиц, $\delta = n^{-1/3}$ — радиус ячейки Вигнера–Зейтца, параметр $u_{0,ij} = u_0$ характеризует величину кулоновского взаимодействия частиц и численно равен предэкспоненциальному множителю в уравнении (1): $u_0 = q^2 / 4\pi\epsilon_0$.

Несмотря на то что представление о пылевой плазме как о системе частиц Юкавы является сильно упрощенным (см. например [1, 3, 25, 26]), модель неплохо описывает реальные физические процессы в случаях, когда можно пренебречь размером пылевых частиц, неравновесностью, неоднородностью и анизотропией фоновой плазмы [27–29].

* E-mail: viktor.reshetnyak84@gmail.com

** E-mail: fav@triniti.ru

Для теоретического исследования равновесных свойств жидкостей (в том числе жидкостей Юкавы) часто используются методы Монте-Карло (МК), броуновской динамики (БД) и интегральных уравнений (ИУ) (см. работы [3, 8, 30], а также цитируемую в них литературу).

Приближения, используемые в этих методах, различны. В методе БД основным источником ошибок является ограниченность ансамбля частиц, использование периодических граничных условий на границах расчетной области, обрезка потенциала межчастичного взаимодействия, недостаточное время, выделяемое для стабилизации системы и вычисления средних, разностная аппроксимация уравнения движения [31, 32].

Расчет статистических средних методом МК предполагает вычисление конфигурационных интегралов с использованием выборки по значимости [31, 33]. При этом интегрирование осуществляется в той области конфигурационного пространства, в которой величина подынтегральной функции предполагается значимой. Таким образом, нехарактерным для других методов источником ошибок в методе МК является ограниченный размер выборки. Среди общих для методов БД и МК источников ошибок можно выделить рассмотрение ограниченного ансамбля частиц, использование на границах расчетной области граничных условий, зачастую не соответствующих физической реальности, а также обрезку потенциала взаимодействия. При этом, поскольку движение частиц в методе МК не рассматривается, ошибки, связанные с интегрированием уравнений движения и установлением равновесия, ему не свойственны.

Метод ИУ, основанный на вычислении парной корреляционной функции путем решения интегральных уравнений теории жидкости [34–40], не использует перечисленных выше приближений, характерных для методов МК и БД. Но для замыкания уравнения Орнштейна–Цернике (ОЦ) используется приближенное соотношение, полученное выборочным суммированием диаграмм разложения парной корреляционной функции $h(r)$ по плотности (приближение Перкуса–Йевики (ПЙ) или гиперцепное приближение (ГЦ)). Решение же уравнений Боголюбова–Борна–Грина обычно сопряжено с обрывом цепочки уравнений с использованием приближения Кирквуда–Ивона для учета трехчастичных корреляций (ББГКИ-приближение).

Общим для всех перечисленных выше методов источником ошибок моделирования является приближенный учет межчастичного взаимодействия.

Считается, что при исследовании сильно неидеальных систем Юкавы методом ИУ лучше всего подходит ГЦ-приближение, в то время как применимость приближений ПЙ и ББГКИ ограничена малыми значениями Γ [41–45]. При этом для сильно неидеальных систем ($\Gamma \gg 1$) отмечается плохая сходимость итерационных процедур, которая, однако, в случае ГЦ-приближения может быть существенно улучшена [41, 42, 44, 46–52].

В настоящей работе представлены результаты теоретических исследований равновесных свойств системы частиц Юкавы в неупорядоченном состоянии. Выполнен анализ структуры жидкостей, основанный на результатах расчетов функции радиального распределения и статического структурного фактора, а также параметров ориентационного порядка q_4 и q_6 . Вычислены значения термодинамических потенциалов. Расчеты выполнялись в широком диапазоне значений эффективного параметра неидеальности [53, 54] $\Gamma^* = \Gamma(1 + \kappa + 0.5\kappa^2)e^{-\kappa}$, который изменялся от 0 до 155. Температура системы считалась постоянной и равной 300 К. Вычисления осуществлялись с использованием двух различных подходов. В первом с использованием метода БД определялись траектории частиц, для которых вычислялись средние значения параметров. Такой подход широко применяется при моделировании движения взаимодействующих с фоновой средой броуновских частиц, в частности, для описания движения пылевой компоненты комплексной плазмы. Во втором решалось уравнение ОЦ и вычислялась радиальная функция распределения системы частиц. Для замыкания уравнения ОЦ использовалось ГЦ-приближение.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

2.1. Броуновская динамика

Вычисления осуществлялись с использованием программного пакета LAMMPS [55, 56]. Численное интегрирование уравнения Ланжевена выполнялось с помощью алгоритма Верле [57], временной шаг выбирался из условия $\delta t \ll \delta/v$ и был задан равным $4 \cdot 10^{-4}$ с. Здесь $v = (k_B T/m)^{1/2}$ — средняя скорость теплового движения частиц, а $m = 4.19 \cdot 10^{-12}$ г — масса частиц.

В начальный момент времени позиции частиц задавались случайным образом, после чего система стабилизировалась при постоянной температуре $T = 300$ К. Затем вычислялись усредненные по времени термодинамические и структурные параметры

системы. Время стабилизации и расчета средних за- давалось равным 4 с. Для каждой пары значений параметров выполнялась серия из пяти статисти- чески независимых вычислений, результаты кото- рых усреднялись. Размер вычислительной области a определялся согласно условию $a > 2r_{cut}$, где r_{cut} — радиус обрезки потенциала взаимодействия. Вычис- ления осуществлялись с использованием периоди- ческих граничных условий. Концентрация частиц за- давалась равной $n = 10^5 \text{ см}^{-3}$.

Обрезка потенциала вносит ошибку в вычисле- ние энергии и сил межчастичного взаимодействия [31, 32]. Увеличение параметра r_{cut} ведет к повы- шению точности, но в то же время увеличивает ре- сурсоемкость вычислений. При моделировании сис- темы частиц Юкавы в работах [58, 59] радиус об- резки вычислялся по эмпирической формуле $r_{cut} = 3.07\delta$, в работах [10, 60] выбирался согласно усло- вию $r_{cut} = 4\delta$, а в [61] — согласно $r_{cut} = 8\delta$. Вычис- ление радиуса обрезки может быть выполнено пу- тем тестирования сходимости решения при последо- вательном уменьшении r_{cut} или при помощи анали- за хвостовой части потенциальной энергии U_{cut} . В настоящей работе для определения радиуса обрезки вычислялась величина хвостовой части потенциаль- ной энергии U_{cut} , которая при расчете термодинами- ческих функций должна быть намного меньше энер- гии теплового движения частиц: $U_{cut} \ll 1.5\beta^{-1}$. До- пустимая точность вычислений предполагалась рав- ной 1%, а величина r_{cut} определялась неравенством

$$U_{cut} \leq 10^{-2} \cdot 1.5\beta^{-1}. \quad (2)$$

Хвостовая часть потенциальной энергии вычис- лялась по формуле [31]

$$U_{cut} = \frac{1}{2} \int_{r_{cut}}^{\infty} u(r)ng(r)4\pi r^2 dr \approx 2\pi \frac{u_0}{\delta} \frac{1 + k_D r_{cut}}{\kappa^2} \exp(-r_{cut}k_D), \quad (3)$$

где $g(r)$ — функция радиального распределения, ко- торая при оценке r_{cut} аппроксимировалась ступен- чатой функцией Хевисайда:

$$g(r) = \Theta(r - \delta) \equiv \begin{cases} 0, & r < \delta, \\ 1, & r \geq \delta. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что для оценки хвостовой части потен- циальной энергии подобное приближение для $g(r)$ ведет к результатам высокой точности при $r_{cut} \gg \delta$.

В то же время для вычисления потенциальной энер- гии системы указанное приближение является гру- бым. Известны более точные полуэмпирические мо- дели расчета парной корреляционной функции и плотности энергии в неидеальных системах Юка- вы [62–64], использование которых, однако, привело бы к некоторому усложнению выкладок и конечного выражения. В то же время расчеты свидетельству- ют о незначительном влиянии погрешности вычис- ления потенциальной энергии на точность оценки r_{cut} , что является следствием экспоненциальной за- висимости U_{cut} от r_{cut} в формуле (3).

В рамках приближения (4) для $g(r)$ потенциаль- ная энергия одной частицы имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u(r)ng(r)4\pi r^2 dr \approx 2\pi \frac{u_0}{\delta} \frac{1 + \kappa}{\kappa^2} e^{-\kappa}. \quad (5)$$

Используя выражение для параметра неидеальности $\Gamma \sim \beta U$, а также формулы (2)–(5), получим усло- вие для относительной погрешности вычисления по- тенциальной энергии:

$$\varepsilon = \frac{U_{cut}}{U} \approx \frac{1 + k_D r_{cut}}{1 + \kappa} \exp(\kappa - k_D r_{cut}) \leq 0.01 \frac{3}{2\Gamma}. \quad (6)$$

В настоящей работе исследования проводились для определенного диапазона значений параметров: параметр κ принимал целые значения от 1 до 5, а взаимодействие частиц определялось эффективным параметром неидеальности [53, 54], который в рас- четах не превышал 155. Подставляя выражение для Γ^* в (6) и учитывая, что

$$(1 + \kappa)(1 + \kappa + 0.5\kappa^2) > 0.5(1 + \kappa)^3 > 0.5\kappa^3,$$

получим выражение для r_{cut} :

$$k_D r_{cut} = 2\kappa + \ln \left[100 \frac{4\Gamma^*(1 + k_D r_{cut})}{3\kappa^3} \right]. \quad (7)$$

Согласно выражению (7), в выбранном для Γ^* и κ диапазоне значений r_{cut} достигает максимума при максимальных Γ^* и κ . Используя этот факт, полу- чим приближенное выражение для r_{cut} :

$$r_{cut} = (2\kappa + 9)\lambda_D. \quad (8)$$

Заметим, что использование выражения (8) ограничено выбором диапазона значений парамет- ров. Увеличение значений Γ^* или κ по сравнению с выбранными величинами требует пересчета значе- ния логарифма в выражении (7). При уменьшении κ до нуля согласно (7) имеем $r_{cut} \rightarrow \infty$, что отра- жает факт расходимости интеграла в выражении

(3) для кулоновского потенциала в отсутствие экранирования.

Свободная энергия жидкости вычислялась методом термодинамического интегрирования [31, 65], где в качестве исходного состояния был выбран идеальный газ. При этом использовалась формула

$$F_{ex} = F_{liq} - F_{ig} = \int_0^1 \left\langle \frac{dU}{d\lambda} \right\rangle d\lambda, \quad (9)$$

где λ — параметр взаимодействия частиц, варьируемый в диапазоне $[0, 1]$, F_{liq} — свободная энергия жидкости, F_{ig} — свободная энергия идеального газа. Зависимость потенциала взаимодействия от λ определялась формулой

$$u_0(\lambda) = \lambda^\mu u_0. \quad (10)$$

Показатель степени μ может быть выбран произвольным образом, исходя из условия $\mu > 0$, и часто задается равным 1. В настоящей работе при расчете методом БД значение μ было выбрано равным 2, что позволяет повысить точность численного интегрирования в области малых λ без дополнительной детализации разбиения. Окончательное выражение для свободной энергии, приходящейся на одну частицу, имеет вид

$$F_{ex} = \int_0^1 \frac{\mu}{\lambda} \langle U \rangle d\lambda. \quad (11)$$

Среднее значение потенциальной энергии, приходящейся на одну частицу, $\langle U \rangle$ вычислялось для каждого заданного значения λ методом БД. Численное интегрирование выражения (11) осуществлялось методом Симпсона. Для повышения точности интегрирования в области малых λ была использована неравномерная сетка из 16 узлов, шаг которой увеличивался с ростом λ по формуле геометрической прогрессии от 0.002 до 0.311.

Давление вычислялось с использованием следующего уравнения состояния, которое является прямым следствием теоремы вириала [37, 66]:

$$PV = Nk_B T - \frac{1}{3} \sum_i \left\langle \mathbf{r}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right\rangle. \quad (12)$$

Суммирование и усреднение при этом осуществляется по всем частицам ансамбля, а расчет потенциальной энергии системы — с учетом периодических границ расчетной области.

2.2. Метод интегральных уравнений

Уравнение ОЦ имеет вид [34–36]

$$h(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) + n \int h(\mathbf{r}_1) c(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) d\mathbf{r}_1, \quad (13)$$

где $h(\mathbf{r})$ — парная корреляционная функция, $c(\mathbf{r})$ — прямая корреляционная функция. Для замыкания уравнения ОЦ использовалось ГЦ-приближение [67]:

$$c(\mathbf{r}) = \exp[-\beta u(\mathbf{r}) + \gamma(\mathbf{r})] - \gamma(\mathbf{r}) - 1, \quad (14)$$

где $\gamma(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) - c(\mathbf{r})$.

Статический структурный фактор связан с парной корреляционной функцией фурье-преобразованием:

$$S(\mathbf{k}) = 1 + n \int h(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (15)$$

Учитывая сферическую симметрию парного потенциала, выражение (15) перепишем в виде

$$S(k) = 1 + \frac{4\pi n}{k} \int_0^\infty h(r) \sin(kr) r dr. \quad (16)$$

Уравнение ОЦ решалось методом итераций [68, 69], в нулевой итерации задавалось значение структурного фактора в дебаевском приближении. Для ускорения сходимости использовалась процедура, предложенная в работе [41]. Контроль самосогласованности решения уравнения ОЦ в ГЦ-приближении осуществлялся при сравнении вычисленных разными способами значений $S(k)$ в точке $k = 0$. Первый способ предполагал линейную экстраполяцию данных по двум ближайшим к нулю точкам, а второй — использование уравнения для изотермической сжимаемости K_T [70, 71]:

$$\lim_{k \rightarrow 0} S(k) = nk_B T K_T, \quad (17)$$

$$K_T = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T \right]^{-1}.$$

При этом для определения производной давления P по концентрации пылевых частиц n уравнение ОЦ решалось при двух близких значениях n .

Если корреляционная функция известна, давление может быть вычислено с использованием выражения (12), переписанного в виде [34–37]

$$P = nk_B T - \frac{n^2}{6} \int \mathbf{r} \frac{\partial u(r)}{\partial \mathbf{r}} g(r) d\mathbf{r}. \quad (18)$$

В случае потенциала Юкавы (1) выражение (18) принимает вид

$$P = nk_B T + \frac{2\pi u_0 n^2}{3} \int_0^\infty (1 + k_D r) g(r) r dr. \quad (19)$$

Свободная энергия вычислялась с использованием метода термодинамического интегрирования, причем параметр μ в уравнении (10) задавался равным 1. Свободная энергия, приходящаяся на одну частицу жидкости, определяется формулой

$$F_{liq} = F_{ig} + \frac{n}{2} \int_0^1 d\lambda \int_0^\infty u(r) g^\lambda(r) 4\pi r^2 dr, \quad (20)$$

где $g^\lambda(r)$ — функция радиального распределения, посчитанная с потенциалом взаимодействия $\lambda u(r)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Анализ структуры жидкости Юкавы

На рис. 1 представлены функции радиального распределения $g(r)$, вычисленные в рамках приближений ГЦ и БД. Параметр κ принимал целые значения в диапазоне от 1 до 5, а Γ^* задавался равным 0.1, 1, 10 и 100.

На рис. 1 видно, что при малых значениях Γ^* результаты вычислений разными методами находятся в хорошем согласии друг с другом. При этом незначительное расхождение результатов может быть объяснено обрезкой потенциала взаимодействия в методе БД. Увеличение параметра неидеальности ведет к увеличению расхождения между результатами, которое проявляется в разнице между значениями максимумов и минимумов функции $g(r)$. Указанное расхождение можно объяснить тем, что используемая для замыкания уравнения ОЦ бридж-функция, полученная в рамках ГЦ-приближения, не является точной.

Анализ рис. 1 свидетельствует о слабой зависимости функции радиального распределения от параметра κ при фиксированном значении Γ^* . При $\Gamma^* = 10$ и $\Gamma^* = 100$ для $\kappa = 1$ и $\kappa = 5$ значения первого максимума g_{max} и первого ненулевого минимума g_{min} функции радиального распределения совпадают в пределах 8%. Заметим, что данный результат справедлив для рассмотренного в настоящей работе диапазона значений κ , а его обобщение на более широкий диапазон значений требует дополнительных исследований.

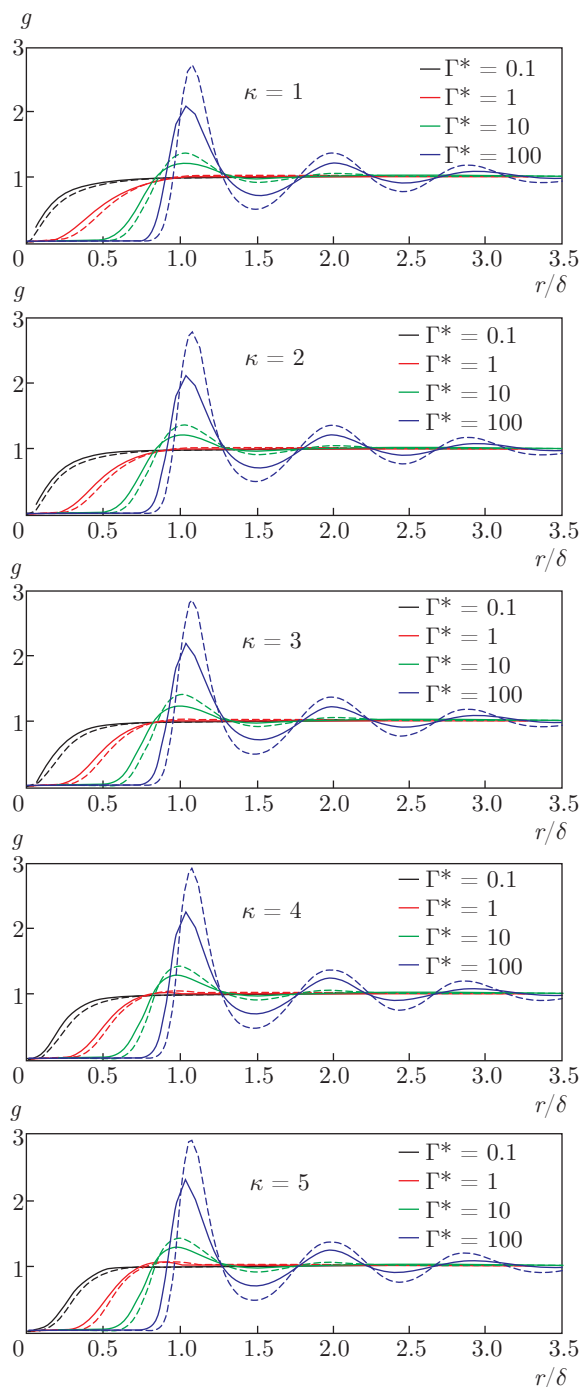


Рис. 1. (В цвете онлайн) Функция радиального распределения системы частиц Юкавы для различных значений параметров парного взаимодействия. Сплошные линии — решение уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, штриховые линии — моделирование методом БД

Зависимость функции радиального распределения от эффективного параметра неидеальности существенна. При $\Gamma^* = 0.1$ и $\Gamma^* = 1.0$ функция $g(r)$ не имеет выраженных максимумов и минимумов, а ее форма соответствует газу мягких сфер конечного радиуса. При $\Gamma^* = 10$ функция $g(r)$ приобретает вид, более свойственный жидкой фазе. При $\Gamma^* = 100$ соотношение первого максимума и первого ненулевого минимума функции радиального распределения $\Pi = g_{max}/g_{min}$, вычисленное при $\kappa = 5$ методами ИУ и БД, составило соответственно 3.4 и 6.37, что может указывать на возникновение кристаллической или стеклованной фазы [3, 8, 72]. Дополнительная информация о состоянии вещества при этом может быть получена при анализе структурного фактора жидкости, который связан с функцией радиального распределения через преобразование Фурье [39, 70].

На рис. 2 представлены структурные факторы $S(r)$ систем частиц, вычисленные с использованием обсуждавшихся выше парных корреляционных функций, полученных при решении уравнения ОЦ.

В работах [73, 74] для систем частиц, взаимодействующих по степенному закону, было установлено, что значение максимума структурного фактора на кривой плавления находится в диапазоне от 2.6 до 3.0. На рис. 2 видно, что значение и положение максимума структурного фактора S_{max} слабо зависят от κ , при этом S_{max} не достигает указанного диапазона значений, хотя и приближается к нему. S_{max} монотонно возрастает с ростом κ от 2.29 для $\kappa = 1$ до 2.40 для $\kappa = 5$.

Кроме рассмотренных критериев для индикации процессов плавления, стеклования и кристаллизации при анализе структуры системы могут быть использованы различные параметры локального и трансляционного порядков [8, 32, 75, 76]. Также важен анализ равновесных (значения термодинамических потенциалов, сжимаемости, теплоемкости) и неравновесных (коэффициент диффузии, вязкость, коэффициент теплопроводности) свойств [40, 71, 77].

В настоящей работе в ходе расчетов методом БД были вычислены средние значения параметров ориентационного порядка q_4 и q_6 [75, 76] (см. также работу [8] и цитируемые в ней источники). Большие значения параметра q_6 указывают на содержание локально упорядоченных структур в жидкости, а значения q_4 могут быть использованы для уточнения типа этих структур. Радиус обрезки для определения списка соседей был выбран равным 1.2δ . Заметим, что результаты вычисления параметров ориентационного порядка связей чувствительны к вы-

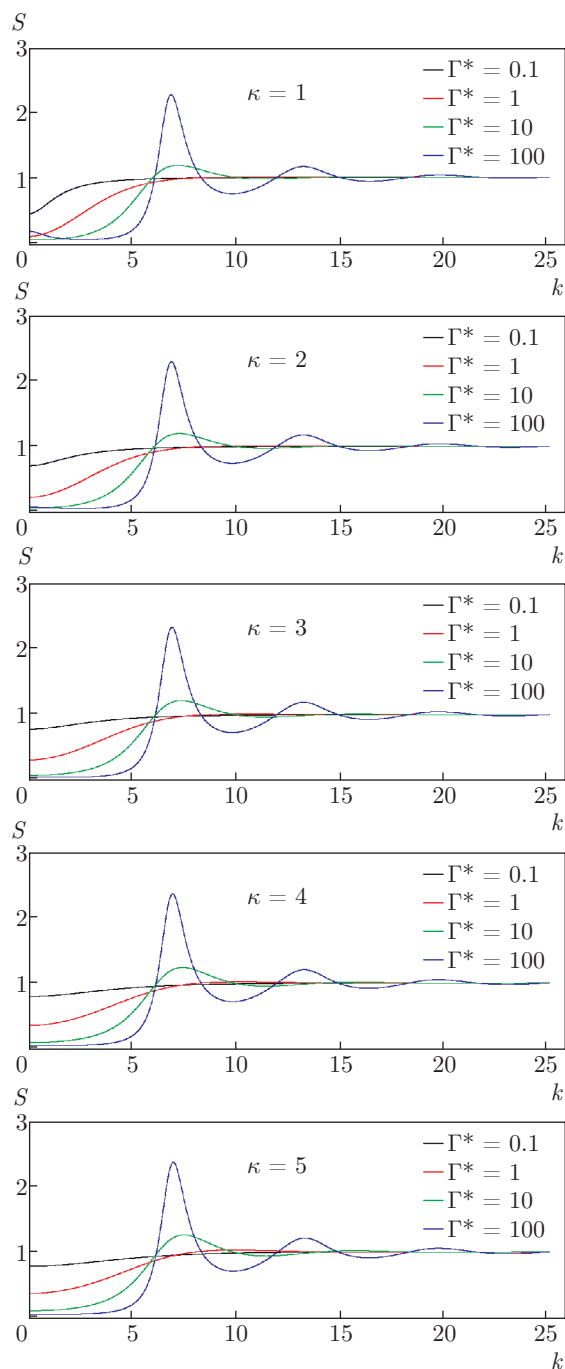


Рис. 2. (В цвете онлайн) Структурный фактор системы частиц Юкавы, рассчитанный в рамках ГЦ-приближения для различных значений параметров взаимодействия

бору радиуса обрезки [76]. Выбранное в настоящей работе значение соответствует предложенному в работе [75].

Значение изотермической сжимаемости K_T было определено непосредственно при анализе статического структурного фактора S согласно формуле

Таблица. Параметры ориентационного порядка связей и сжимаемость жидкости Юкавы

κ	$\Gamma^* = 0.1$			$\Gamma^* = 1.0$			$\Gamma^* = 10.0$			$\Gamma^* = 100.0$		
	q_4	q_6	K_T	q_4	q_6	K_T	q_4	q_6	K_T	q_4	q_6	K_T
1	0.191	0.194	0.426	0.153	0.162	0.072	0.190	0.230	0.023	0.292	0.435	0.156
2	0.193	0.197	0.693	0.159	0.170	0.199	0.192	0.233	0.031	0.291	0.438	0.046
3	0.194	0.198	0.770	0.163	0.176	0.290	0.195	0.239	0.050	0.288	0.442	0.027
4	0.193	0.198	0.785	0.165	0.180	0.335	0.197	0.245	0.067	0.286	0.445	0.023
5	0.191	0.197	0.773	0.165	0.182	0.350	0.199	0.250	0.080	0.284	0.447	0.022

(17). Для удобства представления результатов вычислений термодинамических потенциалов в настоящей работе используются относительные величины. Свободная энергия далее в тексте представлена в единицах $nk_B T \Gamma_{max}^*$ (Γ_{max}^* — максимальное значение эффективного параметра неидеальности, в настоящей работе $\Gamma_{max}^* = 155$), давление — в единицах $nk_B T$, а сжимаемость — в обратных давлению единицах, $(nk_B T)^{-1}$. В этой системе единиц сжимаемость совпадает со значением статического структурного фактора при $k \rightarrow 0$. Результаты вычислений представлены в таблице.

Из таблицы видно, что для систем с $\kappa \geq 3$ значение структурного фактора при $\kappa \rightarrow 0$ (а следовательно, и сжимаемость) монотонно убывает с ростом Γ^* . Уменьшение κ ведет к немонотонной зависимости $K_T(\Gamma^*)$: при увеличении Γ^* от 0.1 до 10 сжимаемость уменьшается, а затем при увеличении Γ^* до 100 — увеличивается.

Значения параметров ориентационного порядка q_4 и q_6 при изменении Γ^* в диапазоне значений от 0.1 до 10 меняются незначительно и составляют около 0.2, что соответствует жидкой фазе [8]. При $\Gamma^* = 100$ значение параметра q_6 возрастает примерно до 0.44. В работе [76] для переохлажденной жидкости твердых сфер (с плотностью упаковки выше границы сосуществования кристаллической и жидкой фаз) при соответствующем значении радиуса обрезки было получено $q_6 \approx 0.45$.

Значение параметра q_4 также возросло и составило примерно 0.29. Это указывает на преимущественное формирование кластеров с локальным порядком, соответствующим ОЦК-структуре. С учетом того, что в выбранном диапазоне значений κ для системы Юкавы вблизи линии плавления стабильна ОЦК-фаза [78, 79], данный результат является ожидаемым.

Для анализа трансляционного порядка использовалось преобразование Фурье локальной плотнос-

ти системы [32], которая определяется траекториями, полученными при решении уравнения Ланжевена для каждой из частиц. Локальную плотность в точке \mathbf{r} можно представить в виде суммы вкладов от каждой из N частиц системы:

$$\rho = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \tag{21}$$

Применив преобразование Фурье к выражению (21), получим

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j). \tag{22}$$

В качестве вектора \mathbf{k} может быть выбрана любая линейная комбинация векторов обратной решетки ожидаемой кристаллической структуры. При этом полностью упорядоченному состоянию соответствует $|\rho_{\mathbf{k}}| \approx 1$, а полностью разупорядоченному — $|\rho_{\mathbf{k}}| \sim O(N^{-1/2})$.

В настоящей работе расчет параметра $|\rho_{\mathbf{k}}|$ был выполнен с использованием линейной комбинации векторов обратной решетки объемноцентрированного кубического (ОЦК) и гранецентрированного кубического (ГЦК) кристаллов соответствующей плотности. Полученные значения не превысили 0.2, что говорит об отсутствии дальнего порядка в жидкостях Юкавы в заданном диапазоне параметров κ и Γ^* .

Полученный результат не согласуется с выводами работ [54, 80] (см. также [3, 8]), согласно которым в заданном диапазоне значений κ уже при $\Gamma^* \approx 106$ наблюдается кристаллизация жидкости Юкавы с образованием ОЦК-фазы. Расхождение связано с тем, что выводы в цитируемых работах основаны на анализе локальной структуры жидкости Юкавы, а также на анализе свободной энергии кристаллической и жидкой фаз, в то время как значение параметра трансляционного порядка не вычислялось. Анализ параметров ориентационного порядка, выполненный в настоящей работе, также свидетель-

ствует о локальном упорядочении. Отсутствие же трансляционного порядка обусловлено ограничениями используемой модели, а именно, малым размером ансамбля частиц (который должен быть намного больше критического размера зародыша кристаллизации) и малым временем моделирования (которое должно быть больше характерного времени нуклеации) [81]. Анализ процесса нуклеации при кристаллизации жидкостей Юкавы выходит за рамки настоящей работы и требует дополнительных исследований.

3.2. Термодинамические потенциалы

Зависимости свободной энергии жидкости Юкавы от Γ^* представлены на рис. 3. На этом рисунке видно, что результаты вычислений методами БД и ИУ совпадают с высокой точностью во всем диапазоне значений Γ^* и κ . Несколько неожиданным является факт совпадения результатов при $\Gamma^* = 155$, где отклонение не превышает 5%. Заметим, что применимость как ГЦ-приближения, так и метода БД для расчета свободной энергии жидкости при этом вызывает вопросы.

ГЦ-приближение использует разложение парной корреляционной функции в ряд по плотности, и потому его применимость для сильно неидеальных систем не очевидна и нуждается в дополнительной проверке [39, 40, 70, 82]. При вычислении средних в методе БД предполагалось, что система частиц находится в равновесном состоянии. Заметим, что значение $\Gamma^* = 155$ существенно больше значения $\Gamma^* = 106$, которое соответствует линии плавления для системы Юкавы в выбранном диапазоне κ [3, 8, 54], и жидкость при этом сильно переохлаждена. Изучение таких систем затруднено выбором времени стабилизации (которое может оказаться слишком большим), а также размера ансамбля частиц (недостаточный размер ансамбля частиц делает невозможным формирование границы раздела фаз) [31, 81].

Хорошее согласие результатов, полученных с использованием различных приближений, позволяет говорить о применимости моделей при расчете термодинамических потенциалов жидкостей Юкавы в выбранном диапазоне параметров.

Совпадение результатов вычислений свободной энергии методами БД и ИУ наблюдалось, несмотря на обсуждавшееся выше существенное различие полученных функций радиального распределения. Это указывает на слабую зависимость значений термодинамических потенциалов от интенсивности пиков функции радиального распределения.

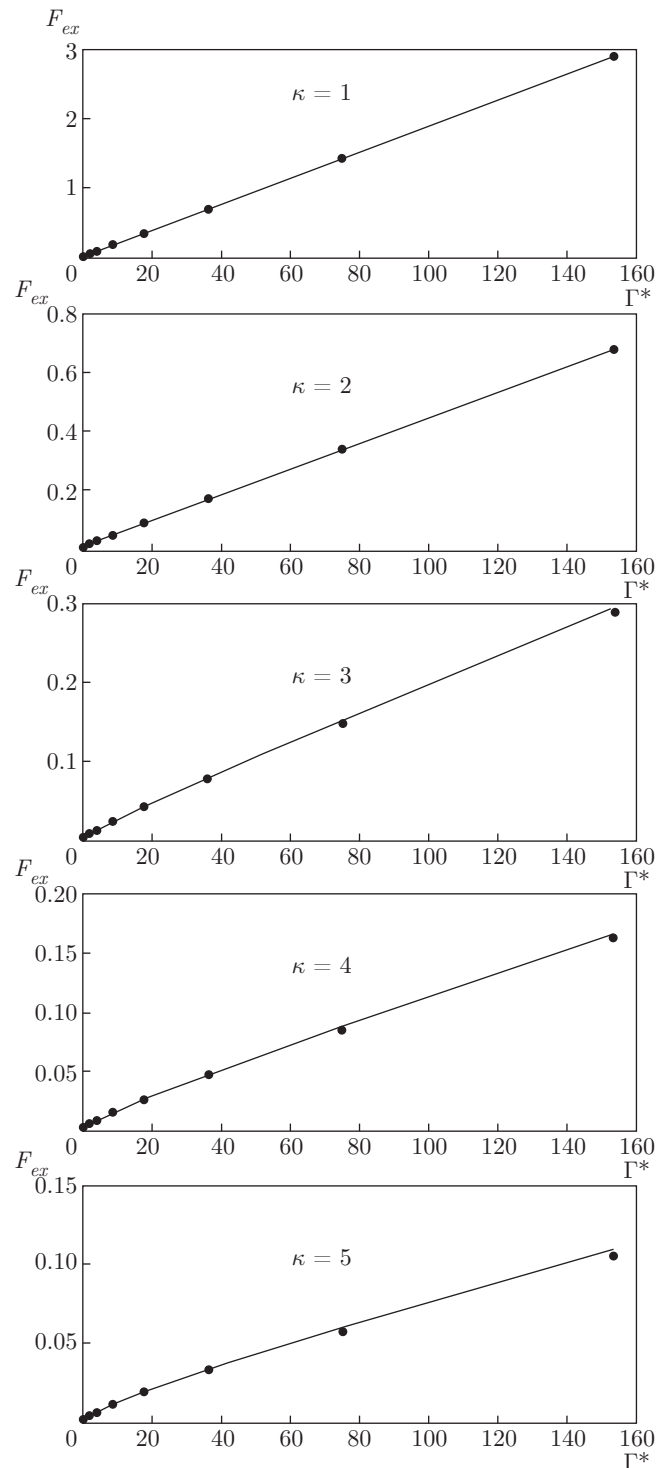


Рис. 3. Зависимости свободной энергии жидкости Юкавы от эффективного параметра неидеальности Γ^* при различных значениях параметра дебаевского экранирования. Сплошные линии — результаты решения уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, точки — результаты моделирования методом БД

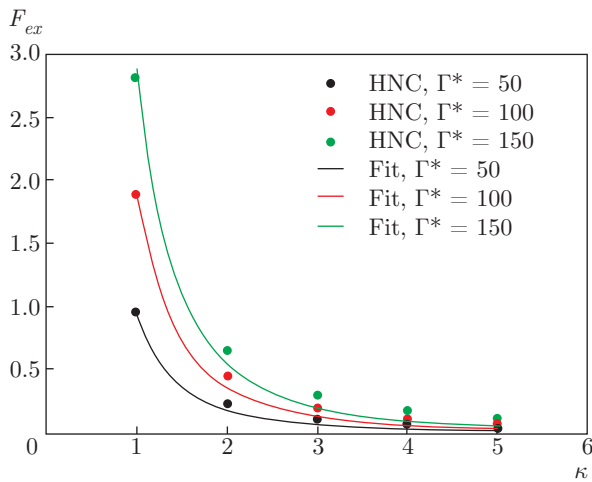


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости свободной энергии от параметра дебаевского экранирования: точки — расчет методом ИУ, сплошные линии — аппроксимация выражением (23)

Зависимость свободной энергии от эффективного параметра неидеальности непрерывна во всем диапазоне значений Γ^* . При $\kappa = 1, 2$ зависимость $F_{ex}(\Gamma^*)$ мало отличается от линейной. С увеличением κ нелинейность $F_{ex}(\Gamma^*)$ проявляется все сильнее при $\Gamma^* < 10$, в то время как при больших значениях Γ^* зависимость остается линейной.

Значение свободной энергии монотонно убывает с ростом κ . Качественное объяснение этому факту может быть получено с учетом (11) и с использованием аналитического выражения для потенциальной энергии (5), введенного для приближенной функции радиального распределения в виде (4). Указанные выражения позволяют сделать допущение о следующем виде зависимости свободной энергии от параметра κ :

$$F_{ex}(\kappa) = A\Gamma \frac{1+\kappa}{\kappa^2} e^{-\kappa} = A\Gamma^* \frac{1+\kappa}{\kappa^2(1+\kappa+0.5\kappa^2)}. \quad (23)$$

Выражение (23) хорошо аппроксимирует зависимость $F_{ex}(\kappa)$ (достоверность аппроксимации R^2 не ниже 0.99). При этом значение подгоночного параметра A составляет примерно 0.024 и не зависит от Γ и κ . Результаты аппроксимации для $\Gamma^* = 50, 100, 150$ представлены на рис. 4.

Изменение энтропии системы с увеличением энергии взаимодействия частиц может быть вычислено по формуле $\Delta S(\Gamma^*, \kappa) = F_{ex} - U$. Зависимость ΔS (в единицах $(n\Gamma_{max}^*)^{-1}$) от Γ^* представлена

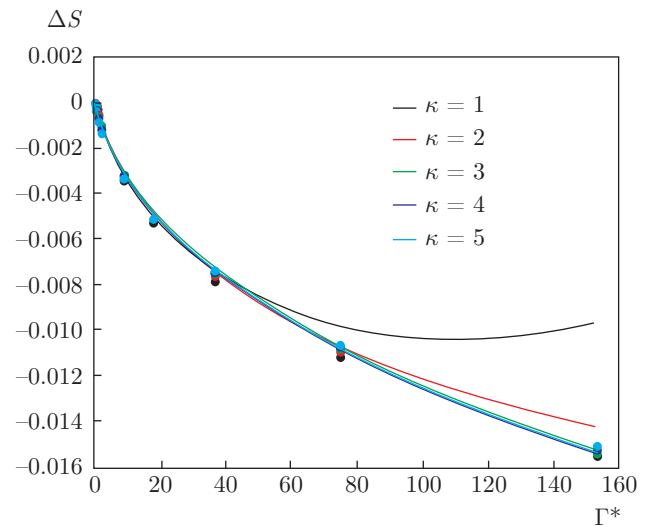


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости изменения энтропии, обусловленного взаимодействием частиц в системе, от эффективного параметра неидеальности: точки — расчет методом БД, сплошные линии — расчет методом ИУ

на рис. 5. Из рис. 5 видно, что результаты, полученные методами БД и ИУ, находятся в хорошем соответствии друг с другом при $\kappa \geq 3$ во всем диапазоне значений Γ^* , в то время как для $\kappa = 1, 2$ при больших Γ^* результаты различаются. Данные, полученные методом БД, свидетельствуют о монотонном убывании энтропии с ростом Γ^* при любых значениях κ , т. е. указывают на упорядочение системы при возрастании энергии взаимодействия. При этом величина параметра κ не оказывает заметного влияния на зависимость $\Delta S(\Gamma^*)$.

В то же время результаты, полученные методом ИУ, свидетельствуют о существенном влиянии значения параметра κ на зависимость $\Delta S(\Gamma^*)$ при $\kappa \leq 3$. Более того, при $\kappa = 1$ и $\Gamma > 110$ наблюдается рост энтропии с увеличением Γ^* , что говорит о возможности разупорядочения системы Юкавы с ростом энергии взаимодействия. Заметим, что, ввиду отмеченных выше ограничений метода ИУ, данный эффект может оказаться следствием неправомерности использования ГЦ-приближения в указанном диапазоне параметров.

На рис. 6 представлены зависимости давления P от эффективного параметра неидеальности, полученные для различных значений параметра κ методами БД и ИУ. Как и в случае свободной энергии, результаты вычислений методами ИУ и БД хорошо согласуются во всем диапазоне значений Γ^* . На рис. 6 видно, что давление изменяется непрерывно во всем диапазоне значений Γ^* , зависимость

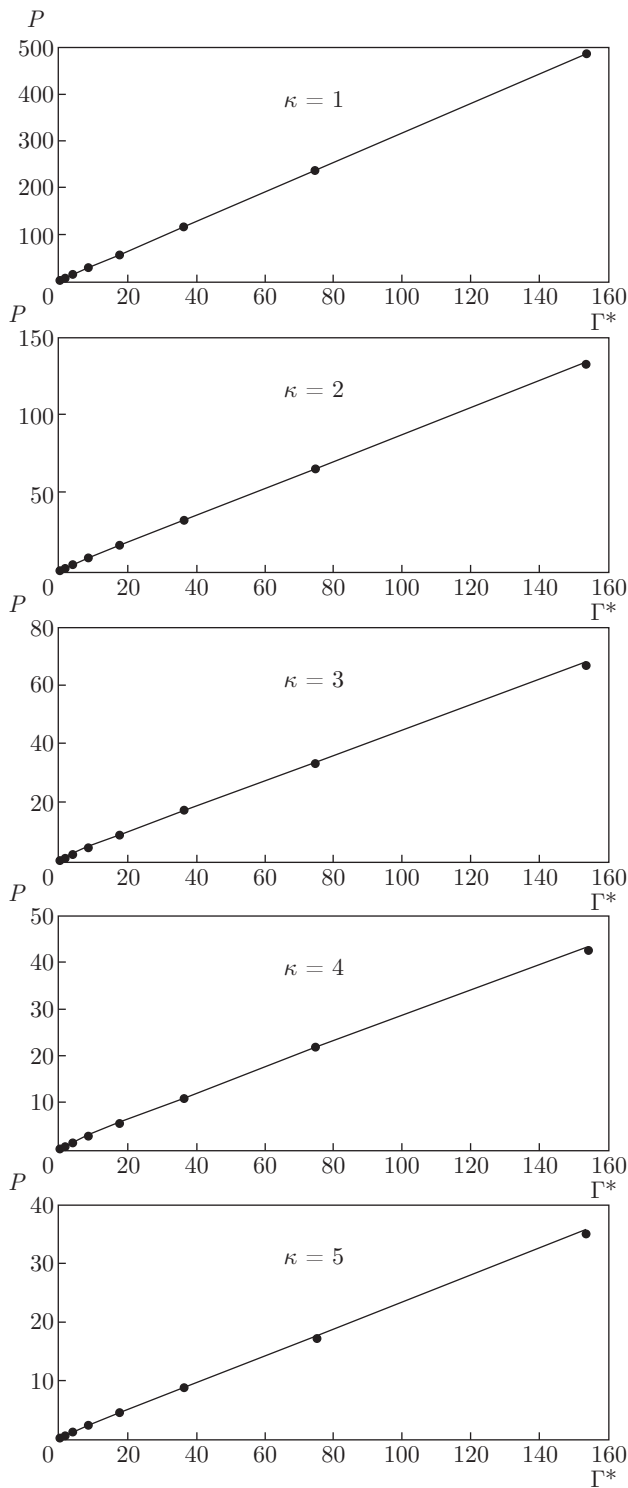


Рис. 6. Зависимости давления от эффективного параметра неидеальности: точки — расчет методом БД, сплошные линии — расчет методом ИУ

$P(\Gamma^*)$ близка к линейной. Во всем рассмотренном диапазоне параметров давление принимает только положительные значения, что является очевидным следствием принятого предположения об отталкивающем характере межчастичного взаимодействия, которое неверно в общем случае для комплексной плазмы [25, 83, 84]. Этот результат расходится с данными работы [85], где были получены отрицательные значения давления, связанные с электростатическим взаимодействием макрочастиц.

В работе [85] рассматривалась плазма, состоящая из макроионов и ионов противоположного знака, составляющих нейтрализующую фоновую среду. Концентрация и заряд макроионов были приняты равными n_0 и Q (в единицах элементарного заряда), а ионов фоновой среды — соответственно n_{m0} и 1. Отмечается возможность обобщения на случай трехкомпонентной плазмы с использованием выражения для концентрации электронов n_{e0} и ионов n_{i0} фоновой среды: $n_{m0} = n_{i0} - n_{e0}$. В [85] использовалось условие квазинейтральности:

$$Qn_0 - n_{m0} = 0. \tag{24}$$

Далее, как и в работе [85], для простоты рассмотрим только случай двухкомпонентной плазмы. Для добавки к внутренней энергии, связанной с электростатическим взаимодействием макроионов с плазмой, в работе [85] получено соотношение

$$u_{ex} = -\frac{1}{2}\Gamma k_{\Sigma} a = -\frac{1}{2}\Gamma k_m a \sqrt{1+Q} \equiv -\frac{1}{2}\Gamma \sqrt{k_m^2 a^2 + 3\Gamma}, \tag{25}$$

$$\Gamma = \frac{e^2 Q^2}{aT}, \quad a = \left(\frac{3}{4\pi n_0}\right)^{1/3}, \tag{26}$$

$$k_m = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_{m0}}{T}}, \quad k_{\Sigma} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 (n_{m0} + Q^2 n_0)}{T}},$$

где, следуя [85], мы использовали следующие обозначения: Γ — параметр неидеальности, a — радиус ячейки Зейтца–Вигнера, T — температура макроионов в энергетических единицах, k_{Σ} — полная постоянная экранирования, k_m — постоянная экранирования ионов.

В работе [85] добавка к свободной энергии, связанная с электростатическим взаимодействием макроионов, находилась методом включения взаимодействия, путем интегрирования (25) по Γ :

$$F_{ex} = \int_0^{\Gamma} \frac{d\Gamma' u_{ex}(\kappa, \Gamma')}{\Gamma'}. \tag{27}$$

Интегрирование осуществляется при постоянных значениях температуры и концентрации макроионов (только в таком случае свободная энергия будет термодинамическим потенциалом [71]). При этом авторы упустили из виду то обстоятельство, что при изменении Γ должен измениться заряд Q и, согласно условию квазинейтральности (24), изменится концентрация ионов n_{m0} . Следовательно, заряд Q и постоянная экранирования k_m становятся функциями Γ :

$$Q = \sqrt{\frac{a\Gamma}{e^2}}, \quad k_m = k_{m0} \left(\frac{a\Gamma}{e^2}\right)^{1/4}, \quad (28)$$

где $k_{m0} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / T}$. Зависимость k_m от Γ при расчете свободной энергии (при интегрировании (27) по Γ) в [85] не учитывалась. Также при нахождении давления дифференцированием по концентрации макроионов нужно учесть зависимость постоянной экранирования k_m от n_0 (в этом случае заряд Q постоянен и $n_{m0} = Qn_0$, следовательно, $k_m \propto n_0^{1/2}$). Однако отметим, что учет этих обстоятельств не изменит знака давления в рамках подхода работы [85].

В настоящей работе для исследования свойств пылевой компоненты комплексной плазмы был применен подход, отличный от подхода в работе [85]. В [85] взаимодействие макроионов друг с другом учитывалось в потенциале средних сил, который нельзя рассматривать как потенциал межчастичного взаимодействия для системы макрочастиц. В настоящей работе рассматривалось взаимодействие дебаевских атомов — заряженных пылевых частиц с окружающим их облаком объемного заряда электронов и ионов, чей заряд в точности компенсирует заряд пылевой компоненты. В работах [86, 87] было показано, что потенциал взаимодействия двух точечных заряженных пылевых частиц в рамках линеаризованной теории Дебая–Хюккеля описывается потенциалом Юкавы, а в работе [25] было установлено, что потенциал Юкавы может рассматриваться как потенциал парного взаимодействия пылевых частиц. При этом постоянная экранирования определяется только электронной и ионной компонентами.

Область применимости использованного в настоящей работе подхода намного шире, чем использованного в работе [85]. Действительно, процедура линеаризации в [85] требует малости показателя больцмановских экспонент, что для макроионов дает условие

$$\frac{eQ\phi}{T} \sim \frac{e^2 Q^2}{aT} \ll 1. \quad (29)$$

При получении потенциала Юкавы для дебаевских атомов линеаризуются больцмановские экспо-

ненты только для электронов и ионов, следовательно, условие применимости будет в Q раз мягче. Отметим, что в свете условия применимости (29), которое соответствует условию $\Gamma \ll 1$, полученные в [85] результаты в области $\Gamma \gg 1$ вряд ли имеют физический смысл.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлены результаты исследования равновесных термодинамических свойств системы частиц Юкавы в широких диапазонах значений эффективного параметра неидеальности Γ^* (от 0 до 155) и структурного параметра κ (от 1 до 5). Исследования выполнены с использованием метода броуновской динамики, а также путем решения уравнения Орнштейна–Цернике в рамках гиперцепного приближения. Результаты расчетов разными методами совпадают между собой с высокой точностью во всем диапазоне значений Γ^* и для всех κ , что позволяет говорить о применимости моделей, в том числе для исследования переохлажденных жидкостей Юкавы. Анализ локальной структуры свидетельствует о возможном переходе системы в стекольную фазу при больших Γ^* . Перехода в кристаллическую фазу (ОЦК или ГЦК) при этом не наблюдалось из-за ограничений модели, связанных с размером ансамбля и временем моделирования. Зависимости свободной энергии и давления от Γ^* непрерывны во всем диапазоне значений параметров. Давление при этом принимает только положительные значения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-12-10424).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, УФН **185**, 161 (2015).
2. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill, Phys. Rep. **421**, 1 (2005).
3. V. E. Fortov and G. E. Morfill, *Complex and Dusty Plasmas*, Taylor & Francis (2009).
4. P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, CRC Press (2015).
5. I. Mann, N. Meyer-Vernet, and A. Czechowski, Phys. Rep. **536**, 1 (2014).
6. S. V. Vladimirov and K. Ostrikov, Phys. Rep. **393**, 175 (2004).

7. J. K. G. Dhont, *An Introduction to Dynamics of Colloids*, Elsevier (1996).
8. Б. А. Клумов, УФН **180**, 1095 (2010).
9. V. N. Tsytovich, G. Morfill, S. V. Vladimirov, and H. M. Thomas, *Elementary Physics of Complex Plasmas*, Springer Science & Business Media (2007).
10. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **125**, 584 (2004) [O. S. Vaulina, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, J. Exp. Theor. Phys. **98**, 515 (2004)].
11. D. J. Naresh and J. K. Singh, Fluid Phase Equilibria **285**, 36 (2009).
12. P. Hartmann, G. J. Kalman, Z. Donko, and K. Kutasi, Phys. Rev. E **72**, 026409 (2005).
13. A. Veldhorst, T. B. Schroder, and J. C. Dyre, Phys. Plasmas **22**, 073705 (2015).
14. R. T. Farouki and S. Hamaguchi, Phys. Rev. E **47**, 4330 (1993).
15. A. Shahzad and H. Maogang, Plasma Sci. Technol. **14**, 771 (2012).
16. S. Hamaguchi and R. T. Farouki, J. Chem. Phys. **101**, 9876 (1994).
17. R. T. Farouki and S. Hamaguchi, J. Chem. Phys. **101**, 9885 (1994).
18. О. С. Ваулина, ЖЭТФ **141**, 602 (2012).
19. Б. А. Клумов, Г. Е. Морфилл, Письма в ЖЭТФ **90**, 489 (2009).
20. S. Ratynskaia, K. Rypdal, C. Knapek, S. Khrapak, A. V. Milovanov, A. Ivlev, J. J. Rasmussen, and G. E. Morfill, Phys. Rev. Lett. **96**, 105010 (2006).
21. S. Ratynskaia, G. Regnoli, K. Rypdal, B. Klumov, and G. Morfill, Phys. Rev. E **80**, 046404 (2009).
22. V. Nosenko and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **93**, 155004 (2004).
23. B. Liu and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **100**, 055003 (2008).
24. S. Nunomura, D. Samsonov, S. Zhdanov, and G. Morfill, Phys. Rev. Lett. **95**, 025003 (2005).
25. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **150**, 826 (2016).
26. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **152**, 1088 (2017).
27. U. Konopka, L. Ratke, and H. M. Thomas, Phys. Rev. Lett. **79**, 1269 (1997).
28. U. Konopka, G. E. Morfill, and L. Ratke, Phys. Rev. Lett. **84**, 891 (2000).
29. G. A. Hebner, M. E. Riley, and B. M. Marder, Phys. Rev. E **68**, 016403 (2003).
30. S. Ichimaru, Rev. Mod. Phys. **54**, 1017 (1982).
31. D. Frenkel and B. Smit, *Understanding Molecular Simulation*, Elsevier (2001).
32. D. C. Rapaport, *The Art of Molecular Dynamics Simulation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
33. K. Binder, Rep. Progr. Phys. **60**, 487 (1997).
34. Н. П. Коваленко, И. З. Фишер, УФН **108**, 209 (1972).
35. И. З. Фишер, УФН **76**, 499 (1962).
36. Г. Н. Саркисов, УФН **169**, 625 (1999).
37. Л. П. Кудрин, *Статистическая физика плазмы*, Атомиздат, Москва (1974).
38. J. A. Barker and D. Henderson, Rev. Mod. Phys. **48**, 587 (1976).
39. N. K. Ailawadi, Phys. Rep. **57**, 241 (1980).
40. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1978).
41. K. C. Ng, J. Chem. Phys. **61**, 2680 (1974).
42. J. M. Brader, Int. J. Thermophys. **27**, 394 (2006).
43. V. E. Fortov, O. F. Petrov, and O. S. Vaulina, Phys. Rev. Lett. **101**, 195003 (2008).
44. M. S. Cooper, Phys. Rev. A **7**, 1 (1973).
45. C. W. Hirt, Phys. Fluids **10**, 565 (1967).
46. А. Е. Давлетов, Л. Т. Еримбетова, Е. С. Мухаметкаримов, Вестник КазНУ **47**, 3 (2013).
47. L. Belloni, J. Chem. Phys. **98**, 8080 (1993).
48. J. F. Springer, M. A. Pokrant, and F. A. Stevens, J. Chem. Phys. **58**, 4863 (1973).
49. D. D. Carley, Phys. Rev. **131**, 1406 (1963).
50. G. Faussurier, Phys. Rev. E **69**, 066402 (2004).
51. M. Kinoshita and M. Harada, Mol. Phys. **65**, 599 (1988).
52. M. J. Gillan, Mol. Phys. **38**, 1781 (1979).
53. О. С. Ваулина и С. А. Кхрапак, ЖЭТФ **117**, 326 (2000) [JETP **90**, 287 (2000)].

54. O. S. Vaulina, S. V. Vladimirov, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 245002 (2002).
55. LAMMPS, URL: <http://lammps.sandia.gov>.
56. S. Plimpton, *J. Comput. Phys.* **117**, 1 (1995).
57. L. Verlet, *Phys. Rev.* **159**, 98 (1967).
58. K. Kremer, M. O. Robbins, and G. S. Grest, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2694 (1986).
59. M. J. Stevens and M. O. Robbins, *J. Chem. Phys.* **98**, 2319 (1993).
60. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, *ЖЭТФ* **126**, 585 (2004) [O. S. Vaulina and O. F. Petrov, *JETP* **99**, 510 (2004)].
61. O. S. Vaulina and I. E. Dranzhevski, *Phys. Scr.* **73**, 577 (2006).
62. О. С. Ваулина, *ТВТ* **49**, 352 (2011).
63. O. S. Vaulina, Yu V. Khrustalyov, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *Europhys. Lett.* **89**, 35001 (2010).
64. B. Held and P. Pignolet, *J. Phys. France* **47**, 437 (1986).
65. M. Mezei, *J. Chem. Phys.* **86**, 7084 (1987).
66. Б. В. Васильев, В. Л. Любошиц, *УФН* **164**, 367 (1994).
67. T. Morita and K. Hiroike, *Progr. Theor. Phys.* **23**, 1003 (1960).
68. A. V. Filippov, A. N. Starostin, I. M. Tkachenko, and V. E. Fortov, *Phys. Lett. A* **376**, 31 (2011).
69. A. V. Filippov, A. N. Starostin, I. M. Tkachenko, and V. E. Fortov, *Contrib. Plasma Phys.* **53**, 442 (2013).
70. N. March and M. P. Tosi, *Introduction to Liquid State Physics*, World Sci. (2002).
71. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
72. H. J. Raveché, R. D. Mountain, and W. B. Streett, *J. Chem. Phys.* **61**, 1970 (1974).
73. J.-P. Hansen and L. Verlet, *Phys. Rev.* **184**, 151 (1969).
74. J.-P. Hansen and D. Schiff, *Mol. Phys.* **25**, 1281 (1973).
75. P. J. Steinhardt, D. R. Nelson, and M. Ronchetti, *Phys. Rev. B* **28**, 784 (1983).
76. W. Mickel, S. C. Kapfer, G. E. Schroder-Turk, and K. Mecke, *J. Chem. Phys.* **138**, 044501 (2013).
77. J. Jackle, *Rep. Progr. Phys.* **49**, 171 (1986).
78. S. Hamaguchi, R. T. Farouki, and D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. E* **56**, 4671 (1997).
79. R. S. Hoy and M. O. Robbins, *Phys. Rev. E* **69**, 056103 (2004).
80. O. S. Vaulina and X. G. Koss, *Phys. Rev. E* **92**, 042155 (2015).
81. G. C. Sosso, J. Chen, S. J. Cox, M. Fitzner, P. Pedevilla, A. Zen, and A. Michaelides, *Chem. Rev.* **116**, 7078 (2016).
82. J.-P. Hansen and I. McDonald, *Theory of Simple Liquids*, Elsevier (1990).
83. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
84. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, *ЖЭТФ* **150**, 1262 (2016).
85. S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, A. V. Ivlev, and G. E. Morfill, *Phys. Rev. E* **89**, 023102 (2014).
86. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **148**, 1039 (2015).
87. A. V. Filippov, *Contrib. Plasma Phys.* **56**, 380 (2016).