

# ПРОВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ. ПРЕДПОРОГОВАЯ ОБЛАСТЬ КОНЦЕНТРАЦИЙ

*Б. Я. Балагуров\**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 октября 2019 г.,  
после переработки 12 октября 2019 г.  
Принята к публикации 24 октября 2019 г.

Исследуется проводимость двумерной модели Рэлея вблизи критической точки — порога протекания. В бинарном (парном) приближении вычислена эффективная проводимость модели с фазовым переходом типа металл–идеальный проводник. Для альтернативной модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик соответствующая эффективная проводимость определена из соотношения взаимности Келлера–Дыхне.

DOI: 10.31857/S0044451020040100

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель композита с двоякопериодическим расположением включений круговой формы впервые рассматривалась в работе Рэлея [1]. Для проводимости этой модели в случае малой концентрации (доли занимаемой площади) включений было найдено [1] несколько первых членов соответствующего вириального ряда. В дальнейшем в работах [2, 3] разными методами было дано полное решение этой задачи, позволяющее вычислить любой член упомянутого ряда. Подход, использованный в работе [3], был затем обобщен на двоякопериодические модели с включениями произвольной формы [4].

Согласно работам [2, 3], определение эффективной проводимости  $\sigma_e$  рассматриваемой модели сводится к решению некоторой бесконечной системы алгебраических уравнений. Проведенный численный анализ [3, 4] показал, что для нахождения величины  $\sigma_e$  в широком диапазоне изменения входящих в задачу параметров достаточно ограничиться решением конечной подсистемы уравнений небольшого размера. Однако при приближении к точке фазового перехода размер соответствующей подсистемы неограниченно растет, что существенно затрудняет

исследование проводимости модели в критической области численными методами.

В настоящей работе проводимость двумерной модели Рэлея вблизи точки фазового перехода рассмотрена аналитическим методом. Для этого используется бинарное приближение, в котором исходная задача сводится к изучению протекания тока через пару соседних включений с точечными источником и стоком. В результате потенциал задачи выражается через электростатическую функцию Грина для пары круговых включений.

Согласно [5, 6], электростатическая функция Грина для макроскопического тела заданной формы выражается через систему его собственных функций. В работе найдены все собственные функции для «тела» в виде пары даваемых гипотезой подобия включений, что позволило вычислить потенциал и определить эффективную проводимость исследуемой модели. Для модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик выражение для соответствующей эффективной проводимости  $\sigma_e$  следует из соотношения взаимности Келлера–Дыхне [7, 8] (см. также [4]). В последнем случае для величины  $\sigma_e$  в работе получено разложение по степеням  $h$ , сходное с аналогичным рядом, даваемым гипотезой подобия [9, 10].

Знание системы собственных функций для некоторого макроскопического тела позволяет дать решение ряда связанных с ним электростатических за-

\* E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

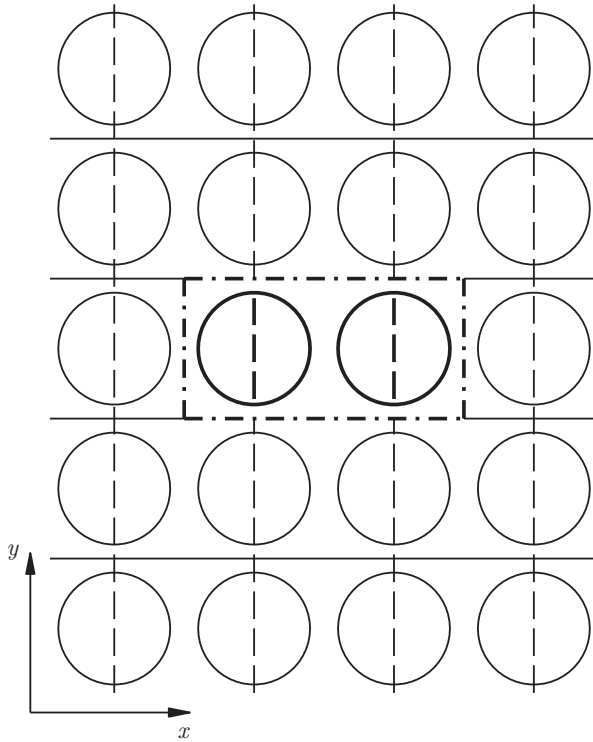


Рис. 1

дач. Кроме определения функции Грина это, например, краевые задачи (внутренние и внешние) Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона [5, 6], а также вычисление поляризуемости этого тела. В качестве примера в Приложении найден тензор дипольной поляризуемости для пары круговых включений (двух параллельных цилиндров круговой формы в трехмерной постановке задачи).

## 2. БИНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Двумерная модель Рэлея (рис. 1) представляет собой изотропную матрицу проводимости  $\sigma_1$  с включениями круговой формы радиуса  $R$  и проводимости  $\sigma_2$ . Центры включений расположены в узлах квадратной решетки с периодом  $2a$ . На рисунке разность потенциалов приложена в направлении оси  $x$ , так что штриховые линии являются эквипотенциалами, а сплошные — линиями тока. В силу периодичности модели при изучении картины протекания тока достаточно ограничиться рассмотрением одной горизонтальной цепочки включений.

В ситуации, близкой к фазовому переходу металл — идеальный проводник, имеем  $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$  и  $(a - R)/R \ll 1$ . В этом случае ток сосредоточен в основном внутри высокопроводящих включений,

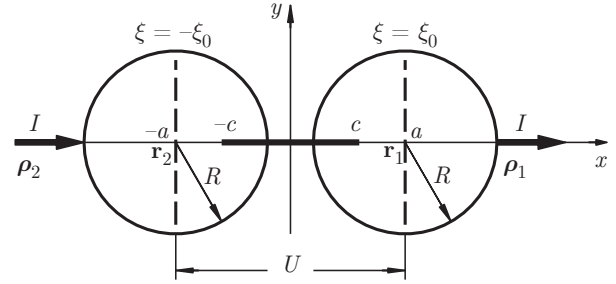


Рис. 2

а низкопроводящую прослойку он преодолевает по кратчайшему пути между ними в виде тоненькой струйки. В данном случае ток сосредоточен в основном внутри рассматриваемой цепочки и отсутствует во внешней по отношению к ней области. Это обстоятельство позволяет упростить задачу, сведя ее к изучению уединенной цепочки, помещенной в неограниченного размера матрицу.

Таким образом, величина эффективной проводимости определяется прежде всего наличием низкопроводящих прослоек между включениями. Для оценки вклада такой прослойки в величину  $\sigma_e$  выделим пару соседних включений. С остальными частями цепочки эту пару связывают входящий и исходящий ток  $I$ . Соответствующие плотности тока будем аппроксимировать дельта-функциями. В полученном таким образом бинарном приближении исходная задача сводится к нахождению потенциала в погруженной в матрицу уединенной пары включений с точечными истоком и стоком (рис. 2). На рис. 2 показаны выделенная штрихпунктиром на рис. 1 область, где

$$c = \sqrt{a^2 - R^2}, \quad \xi_0 = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}, \quad (1)$$

$U$  — разность потенциалов и через  $\rho$  обозначен радиус-вектор точки, принадлежащей поверхности тела (границе раздела).

В данном случае уравнение сохранения тока принимает вид

$$\text{div } \mathbf{j} = I \{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) \}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока,

$$\mathbf{j} = -\sigma(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$\sigma(\mathbf{r})$  — проводимость среды,  $\varphi(\mathbf{r})$  — электрический потенциал. Положим

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_1[1 - (1 - h)v(\mathbf{r})], \quad h = \sigma_2/\sigma_1, \quad (4)$$

где  $v(\mathbf{r}) = 1$  внутри включения и  $v(\mathbf{r}) = 0$  вне его. В этом случае уравнение для потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla \{ [1 - (1 - h)v(\mathbf{r})] \nabla \varphi(\mathbf{r}) \} = \\ = \frac{I}{\sigma_1} \{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем, следуя [5, 6], функцию Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , подчиняющуюся уравнению

$$\nabla_{\mathbf{r}} \{ [1 - (1 - h)v(\mathbf{r})] \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6)$$

С учетом формулы (6) для потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  из уравнения (5) получаем следующее выражение:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{I}{\sigma_1} \{ G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1) - G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_2) \}. \quad (7)$$

Величина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , подчиняющаяся уравнению (6), определена в [5, 6] с помощью метода собственных функций. Для функции Грина  $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ , где  $\boldsymbol{\rho}$  принадлежит поверхности тела, имеет место следующее выражение [5, 6]:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = - \sum_{\nu} \frac{1 + \varepsilon_{\nu}}{h + \varepsilon_{\nu}} \Psi_{\nu}(\boldsymbol{\rho}) \psi_{\nu}(\mathbf{r}) - \\ - \sum_k \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\psi}_k(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}$  произволен и может принадлежать как телу, так и пространству вне его.

В выражении (8)  $\psi_{\nu}(\mathbf{r})$  и  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  — регулярные и обращающиеся в нуль при  $r \rightarrow \infty$  собственные функции;  $\Psi_{\nu}(\boldsymbol{\rho})$  и  $\bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})$  — их значения на поверхности тела при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ . Поляризационные функции  $\psi_{\nu}(\mathbf{r})$ , обладающие мультипольной асимптотикой, удовлетворяют уравнению Лапласа внутри ( $i$ ) и вне ( $e$ ) тела:

$$\nabla^2 \psi_{\nu}^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla^2 \psi_{\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (9)$$

На поверхности  $S$  тела (при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ ) для функции  $\psi_{\nu}(\mathbf{r})$  имеем следующие граничные условия:

$$\psi_{\nu}^{(e)} \Big|_S = \psi_{\nu}^{(i)} \Big|_S, \quad \frac{\partial \psi_{\nu}^{(e)}}{\partial n} = -\varepsilon_{\nu} \frac{\partial \psi_{\nu}^{(i)}}{\partial n}. \quad (10)$$

Здесь  $\partial/\partial n$  — нормальная производная,  $\varepsilon_{\nu} > 0$  — собственное значение для поляризационного состояния. Система  $\{\psi_{\nu}(\mathbf{r})\}$  ортонормирована по соотношению

$$\int (\nabla \psi_{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_{\nu}(\mathbf{r})) \, d\mathbf{r} = \delta_{\mu\nu}, \quad (11)$$

где интегрирование распространяется на все пространство, или

$$\int (\nabla \psi_{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_{\nu}(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] \, d\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_{\nu}}{1 + \varepsilon_{\nu}} \delta_{\mu\nu}. \quad (12)$$

Здесь интеграл берется по области вне тела.

Функции зарядовых состояний  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  вне тела также подчиняются уравнению Лапласа и обладают монополярной асимптотикой. Им отвечает одно и то же собственное значение  $\bar{\varepsilon}_k = \infty$ . Для монолитного (неразъемного) тела зарядовая функция  $\bar{\psi}(\mathbf{r})$  одна. На поверхности тела она принимает постоянное значение:

$$\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \Big|_S = \bar{\Psi} = \text{const}. \quad (13)$$

В то же время  $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}$  в любой точке внутри тела.

Разъемному «телу», состоящему из  $n$  частей, отвечают  $n$  зарядовых функций  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Каждая из них принимает постоянные (вообще говоря, разные) значения на поверхностях частей этого тела.

Функции  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  ортонормированы согласно соотношению

$$\int (\nabla \bar{\psi}_k(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\psi}_{k'}(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] \, d\mathbf{r} = \delta_{kk'}. \quad (14)$$

Подсистемы поляризационных  $\{\psi_{\nu}(\mathbf{r})\}$  и зарядовых  $\{\bar{\psi}_k(\mathbf{r})\}$  функций взаимно ортогональны:

$$\int (\nabla \psi_{\nu}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\psi}_k(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] \, d\mathbf{r} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, совокупность  $\{\psi_{\nu}(\mathbf{r}), \bar{\psi}_k(\mathbf{r})\}$  представляют собой ортонормированную систему функций. Заметим, однако, что эта совокупность полной системой не является [5, 6]. Отметим также, что в рассматриваемой в работе двумерной задаче функции с монополярной асимптотикой логарифмически расходятся при  $r \rightarrow \infty$ . В этом случае на зарядовые функции накладывается условие  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r}) = 0$  на окружности достаточно большого радиуса.

### 3. БИПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

В рассматриваемой геометрии (см. рис. 2) задачу вычисления собственных функций естественно решать в системе биполярных координат [11]. Декартовы координаты  $(x, y)$  связаны с биполярными  $(\xi, \theta)$  с помощью соотношения [11]

$$x + iy = c \operatorname{th} \frac{\xi + i\theta}{2}, \quad (16)$$

откуда следует

$$x = c \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch } \xi + \cos \theta}, \quad y = c \frac{\sin \theta}{\text{ch } \xi + \cos \theta} \quad (17)$$

и

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{(c+x)^2 + y^2}{(c-x)^2 + y^2}, \quad \text{tg } \theta = \frac{2cy}{c^2 - x^2 - y^2}. \quad (18)$$

Координата  $\xi$  меняется в пределах  $(-\infty, +\infty)$ , а угол  $\theta$  — в интервале от 0 до  $2\pi$ . Положительным  $\xi$  соответствует полуплоскость  $x > 0$ , а отрицательным  $\xi$  — полуплоскость  $x < 0$ . В точках  $(\pm c, 0)$  величина  $\xi$  обращается в бесконечность:  $\xi = \pm\infty$ . При  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  имеем  $\xi \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow \pi$ . Положив  $\theta = \pi - \alpha$ , из (17) и (18) при  $r \rightarrow \infty$  найдем асимптотику

$$x \approx 2c \frac{\xi}{\xi^2 + \alpha^2}, \quad y \approx 2c \frac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2}, \quad (19)$$

$$\xi \approx \frac{2cx}{x^2 + y^2}, \quad \alpha \approx \frac{2cy}{x^2 + y^2}. \quad (20)$$

Отрезку оси  $x$  от  $-c$  до  $c$  (на рис. 2 выделен жирной линией) соответствуют  $-\infty \leq \xi \leq \infty$  и  $\theta = 0$  при  $y \rightarrow +0$  или  $\theta = 2\pi$  при  $y \rightarrow -0$ . Координата  $\theta$  на интервале  $(-c, c)$  оси  $x$  оказывается разрывной со скачком в  $2\pi$ . Бесконечным отрезкам  $(-\infty, -c)$  и  $(c, \infty)$  этой оси отвечают  $\theta = \pi$  и значения  $\xi$  в диапазонах соответственно  $(-0, -\infty)$  и  $(\infty, +0)$ . Наконец, оси  $y$  отвечает  $\xi = 0$ , причем положительная полуось  $y > 0$  проходит при изменении угла  $\theta$  от 0 (где  $y = +0$ ) до  $\pi$  ( $y = +\infty$ ), а отрицательная полуось — при изменении  $\theta$  от  $\pi$  ( $y = -\infty$ ) до  $2\pi$  ( $y = -0$ ).

Координатными линиями биполярной системы являются два набора взаимно ортогональных окружностей с центрами на осях  $x$  и  $y$ . Так, исключая из равенств (17) угол  $\theta$ , приходим к уравнению

$$(x - c \text{cth } \xi)^2 + y^2 = \frac{c^2}{\text{sh}^2 \xi}, \quad (21)$$

так что постоянным значениям  $\xi = \pm\xi_0$  отвечают окружности радиуса  $R = c/|\text{sh } \xi_0|$  с центрами в симметричных точках  $\pm c \text{cth } \xi_0$  на оси  $x$ . Поэтому для констант  $c$  и  $\xi_0$  получаем выражения (1).

В биполярных координатах для градиента потенциала  $\varphi$  имеем

$$\nabla \varphi = \frac{\mathbf{e}_\xi}{H_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{H_\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — орты нормалей к координатным линиям соответственно  $\xi = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ ,

$$H_\xi = H_\theta = H(\xi, \theta) = \frac{c}{\text{ch } \xi + \cos \theta} \quad (23)$$

— коэффициенты Ламе. Для ортов  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\theta$  имеем следующие выражения:

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{i}_x \frac{1 + \text{ch } \xi \cos \theta}{\text{ch } \xi + \cos \theta} - \mathbf{i}_y \frac{\text{sh } \xi \sin \theta}{\text{ch } \xi + \cos \theta}, \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}_x \frac{\text{sh } \xi \sin \theta}{\text{ch } \xi + \cos \theta} + \mathbf{i}_y \frac{1 + \text{ch } \xi \cos \theta}{\text{ch } \xi + \cos \theta}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{i}_x$  и  $\mathbf{i}_y$  — орты декартовых осей соответственно  $x$  и  $y$ . Отметим, что  $\mathbf{e}_\xi$  является единичным вектором внутренней нормали к правой ( $\xi = +\xi_0$ ) и внешней нормали к левой ( $\xi = -\xi_0$ ) окружностям.

Уравнение Лапласа в биполярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (26)$$

Периодическими по углу  $\theta$  решениями этого уравнения являются

$$\xi, \quad e^{\pm n\xi} \cos n\theta, \quad e^{\pm n\xi} \sin n\theta, \quad \text{sh } n\xi \cos n\theta, \quad \text{ch } n\xi \sin n\theta, \dots \quad (27)$$

При этом, например,  $e^{-n\xi} \cos n\theta$  и  $e^{-n\xi} \sin n\theta$  регулярны в точке  $c$  оси  $x$ , а

$$\xi, \quad \text{sh } n\xi \cos n\theta, \quad \text{sh } n\xi \sin n\theta, \quad \text{ch } n\xi \sin n\theta, \quad \text{ch } n\xi \cos n\theta - (-1)^n \quad (28)$$

исчезают на бесконечности.

#### 4. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С рассматриваемой парой круговых включений связаны четыре типа поляризационных функций  $\psi_{\lambda n}(\mathbf{r}) = \psi_{\lambda n}(\xi, \theta)$  ( $\lambda = 1, 2, 3, 4$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ), которым отвечают дважды вырожденные собственные значения  $\varepsilon_{1n} = \varepsilon_{3n}$  и  $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_{4n}$ .

Нормированные функции первого типа,  $\psi_{1n}(\mathbf{r})$ , с собственными значениями

$$\varepsilon_{1n} = \text{th } n\xi_0 \quad (29)$$

имеют вид

$$\psi_{1n}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_n \text{ch } n\xi \sin n\theta, \quad |\xi| \leq \xi_0, \quad (30)$$

вне включений и

$$\psi_{1n}^{(1)}(\mathbf{r}) = A_n \operatorname{ch} n\xi_0 e^{-n(\xi-\xi_0)} \sin n\theta, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (31)$$

$$\psi_{1n}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_n \operatorname{ch} n\xi_0 e^{n(\xi+\xi_0)} \sin n\theta, \quad \xi \leq -\xi_0 \quad (32)$$

внутри соответственно первого (правого) и второго (левого) кругов. Здесь

$$A_n = \sqrt{\frac{1-\varepsilon_{1n}}{2\pi n}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{ch} n\xi_0}}. \quad (33)$$

Функции первого типа обладают следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \psi_{1n}(-x, y) &= \psi_{1n}(x, y), \\ \psi_{1n}(x, -y) &= -\psi_{1n}(x, y). \end{aligned} \quad (34)$$

Антисимметричные по  $x$  и симметричные по  $y$  собственные функции второго типа  $\psi_{2n}(\mathbf{r})$  с собственными значениями

$$\varepsilon_{2n} = \operatorname{cth} n\xi_0 \quad (35)$$

имеют вид

$$\psi_{2n}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_n \operatorname{sh} n\xi \cos n\theta, \quad |\xi| \leq \xi_0, \quad (36)$$

$$\psi_{2n}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_n \operatorname{sh} n\xi_0 e^{-n(\xi-\xi_0)} \cos n\theta, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (37)$$

$$\psi_{2n}^{(2)}(\mathbf{r}) = -B_n \operatorname{sh} n\xi_0 e^{n(\xi+\xi_0)} \cos n\theta, \quad \xi \leq -\xi_0, \quad (38)$$

где

$$B_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2n}-1}{2\pi n}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{sh} n\xi_0}}. \quad (39)$$

Для обращающихся в нуль при  $r \rightarrow \infty$  симметричных и по  $x$ , и по  $y$  собственных функций третьего типа,  $\psi_{3n}(\mathbf{r})$ , с собственными значениями  $\varepsilon_{3n} = \varepsilon_{1n} = \operatorname{th} n\xi_0$  имеем следующие выражения:

$$\psi_{3n}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_n [\operatorname{ch} n\xi \cos n\theta - (-1)^n], \quad |\xi| \leq \xi_0, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \psi_{3n}^{(1)}(\mathbf{r}) &= A_n [\operatorname{ch} n\xi_0 e^{-n(\xi-\xi_0)} \cos n\theta - (-1)^n], \\ &\xi \geq \xi_0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \psi_{3n}^{(2)}(\mathbf{r}) &= A_n [\operatorname{ch} n\xi_0 e^{n(\xi+\xi_0)} \cos n\theta - (-1)^n], \\ &\xi \leq -\xi_0 \end{aligned} \quad (42)$$

с  $A_n$  из формулы (33).

Наконец, антисимметричные и по  $x$ , и по  $y$  функции четвертого типа,  $\psi_{4n}(\mathbf{r})$ , с собственными значениями  $\varepsilon_{4n} = \varepsilon_{2n} = \operatorname{cth} n\xi_0$  имеют вид

$$\psi_{4n}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_n \operatorname{sh} n\xi \sin n\theta, \quad |\xi| \leq \xi_0, \quad (43)$$

$$\psi_{4n}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_n \operatorname{sh} n\xi_0 e^{-n(\xi-\xi_0)} \sin n\theta, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (44)$$

$$\psi_{4n}^{(2)}(\mathbf{r}) = -B_n \operatorname{sh} n\xi_0 e^{n(\xi+\xi_0)} \sin n\theta, \quad \xi \leq -\xi_0 \quad (45)$$

с  $B_n$  из формулы (39).

Так как в данном случае включение состоит из двух частей, ему отвечают две зарядовые функции. Первая из них, антисимметричная по  $x$  (т.е. по координате  $\xi$ ), имеет простой вид:

$$\bar{\psi}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = \bar{A}_1 \xi, \quad \bar{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\xi_0}}, \quad (46)$$

$$\bar{\psi}_1^{(1)} = -\bar{\psi}_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\xi_0}{4\pi}}. \quad (47)$$

Эта функция, согласно (20), имеет не монополярную, а дипольную асимптотику. Дело в том, что в физической постановке задачи данному потенциалу отвечают одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды на отдельных частях тела. Поэтому в этом случае включение, состоящее из пары кругов, представляет собой диполь.

Вторая, симметричная по  $x$ , зарядовая функция  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$  имеет монополярную (логарифмическую) асимптотику, и поэтому на нее необходимо наложить условие  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r}) = 0$  при  $r = L$  (где  $L \gg a$ ). Кроме того, функция  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$  должна принимать постоянное и одинаковое значение при  $\xi = \pm\xi_0$ . Удовлетворяющая этим требованиям зарядовая функция  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$  при  $\xi > 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2^{(e)}(\mathbf{r}) &= \bar{A}_2 \left\{ 2 \ln \frac{L}{2c} + \xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi} \cos n\theta + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{ch} n\xi_0} [\operatorname{ch} n\xi \cos n\theta - (-1)^n] \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

С учетом разложения

$$\ln[2(\operatorname{ch} \xi + \cos \theta)] = \xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi} \cos n\theta \quad (49)$$

отсюда следует

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2^{(e)}(\mathbf{r}) &= \bar{A}_2 \left\{ 2 \ln \frac{L}{2c} + \ln[2(\operatorname{ch} \xi + \cos \theta)] + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{ch} n\xi_0} [\operatorname{ch} n\xi \cos n\theta - (-1)^n] \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[ 2 \ln \frac{L}{2c} + \xi_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{ch} n\xi_0} \right]^{-1/2}. \quad (51)$$

При  $\xi = \pm\xi_0$  из выражения (48) следует

$$\bar{\psi}_2(\pm\xi_0, \theta) = \frac{1}{4\pi\bar{A}_2}. \quad (52)$$

В пределе  $r \gg a$  имеем следующую асимптотику:

$$\bar{\psi}_2^{(e)}(\mathbf{r}) \approx 2\bar{A}_2 \ln \frac{L}{r}, \quad (53)$$

откуда

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\bar{A}_2. \quad (54)$$

Здесь  $\bar{q}$  — заряд, приходящийся на одно круговое включение.

### 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Согласно [5, 6], собственные функции  $\psi_\nu(\mathbf{r})$  и  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  образуют полную систему на поверхности  $S$  соответствующего тела (при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ ). При этом соотношение полноты формулируется для пары сопряженных поверхностных функций — это  $\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$  (значение  $\psi_\nu(\mathbf{r})$  при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ ) и  $\Phi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ , вводимая следующим образом:

$$\Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}))|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \quad (55)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внешней к поверхности тела нормали. Аналогичным образом вводятся зарядовые поверхностные функции  $\bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})$  и  $\bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho})$ .

Для рассматриваемой в работе задачи имеем

$$\Psi_{\lambda n}^{(1)}(\theta) = \psi_{\lambda n}(+\xi_0, \theta), \quad \Psi_{\lambda n}^{(2)}(\theta) = \psi_{\lambda n}(-\xi_0, \theta), \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda n}^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{H_0} \left. \frac{\partial \psi_{\lambda n}^{(e)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=+\xi_0}, \\ \Phi_{\lambda n}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{H_0} \left. \frac{\partial \psi_{\lambda n}^{(e)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=-\xi_0}, \end{aligned} \quad (57)$$

где  $H_0 = H(\xi_0, \theta)$  — коэффициент Ламе. Выбор знаков в выражениях (57) обусловлен тем, что согласно формуле (24) единичный вектор  $\mathbf{e}_\xi$  является ортом внутренней нормали для правой ( $\xi = +\xi_0$ ) окружности и внешней нормали для левой ( $\xi = -\xi_0$ ). Таким же образом вводятся зарядовые поверхностные функции  $\bar{\Psi}_k^{(1)}$ ,  $\bar{\Psi}_k^{(2)}$ ,  $\bar{\Phi}_k^{(1)}$  и  $\bar{\Phi}_k^{(2)}$ .

Используя приведенные в предыдущем разделе выражения для функций  $\psi_{\lambda n}^{(e)}(\mathbf{r})$  и  $\bar{\psi}_k^{(e)}(\mathbf{r})$ , найдем

$$\Psi_{1n}^{(1)}(\theta) = \Psi_{1n}^{(2)}(\theta) = A_n \operatorname{ch} n\xi_0 \sin n\theta, \quad (58)$$

$$\Psi_{2n}^{(1)}(\theta) = -\Psi_{2n}^{(2)}(\theta) = B_n \operatorname{sh} n\xi_0 \cos n\theta, \quad (59)$$

$$\Psi_{3n}^{(1)}(\theta) = \Psi_{3n}^{(2)}(\theta) = A_n [\operatorname{ch} n\xi_0 \cos n\theta - (-1)^n], \quad (60)$$

$$\Psi_{4n}^{(1)}(\theta) = -\Psi_{4n}^{(2)}(\theta) = B_n \operatorname{sh} n\xi_0 \sin n\theta, \quad (61)$$

$$\Phi_{1n}^{(1)}(\theta) = \Phi_{1n}^{(2)}(\theta) = -\frac{1}{H_0} n A_n \operatorname{sh} n\xi_0 \sin n\theta, \quad (62)$$

$$\Phi_{2n}^{(1)}(\theta) = -\Phi_{2n}^{(2)}(\theta) = -\frac{1}{H_0} n B_n \operatorname{ch} n\xi_0 \cos n\theta, \quad (63)$$

$$\Phi_{3n}^{(1)}(\theta) = \Phi_{3n}^{(2)}(\theta) = -\frac{1}{H_0} n A_n \operatorname{sh} n\xi_0 \cos n\theta, \quad (64)$$

$$\Phi_{4n}^{(1)}(\theta) = -\Phi_{4n}^{(2)}(\theta) = -\frac{1}{H_0} n B_n \operatorname{ch} n\xi_0 \sin n\theta, \quad (65)$$

$$\bar{\Psi}_1^{(1)}(\theta) = -\bar{\Psi}_1^{(2)}(\theta) = \bar{A}_1 \xi_0, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2^{(1)}(\theta) &= \bar{\Psi}_2^{(2)}(\theta) = \\ &= \bar{A}_2 \left[ \ln \frac{L}{2c} + \xi_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-n\xi_0}}{\operatorname{ch} n\xi_0} \right], \end{aligned} \quad (67)$$

$$\bar{\Phi}_1^{(1)}(\theta) = -\bar{\Phi}_1^{(2)}(\theta) = -\frac{1}{H_0} \bar{A}_1, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_2^{(1)}(\theta) &= \bar{\Phi}_2^{(2)}(\theta) = \\ &= -\frac{1}{H_0} \bar{A}_2 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} n\xi_0} \cos n\theta \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Система функций (58)–(69) ортонормирована согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^2 \int_0^{2\pi} \Psi_{\lambda n}^{(\sigma)}(\theta) \Phi_{\lambda' n'}^{(\sigma)}(\theta) H(\xi_0, \theta) d\theta = \\ = -\frac{\varepsilon_{\lambda n}}{1 + \varepsilon_{\lambda n}} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (70)$$



$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_0^{2\pi} \Psi_{\lambda n}^{(\sigma)}(\theta) \bar{\Phi}_k^{(\sigma)}(\theta) H(\xi_0, \theta) d\theta = 0, \quad (71)$$

$$k = 1, 2,$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}_k^{(\sigma)}(\theta) \Phi_{\lambda n}^{(\sigma)}(\theta) H(\xi_0, \theta) d\theta = 0, \quad (72)$$

$$k = 1, 2,$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}_k^{(\sigma)}(\theta) \bar{\Phi}_{k'}^{(\sigma)}(\theta) H(\xi_0, \theta) d\theta = -\delta_{kk'}, \quad (73)$$

$$k, k' = 1, 2.$$

С помощью этих соотношений найдены нормировочные коэффициенты  $A_n, B_n, \bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ , приведенные выше.

Для соотношения полноты системы поверхностных собственных функций имеем следующее выражение:

$$\sum_{\lambda=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon_{\lambda n}}{\varepsilon_{\lambda n}} \Psi_{\lambda n}^{(\sigma)}(\theta) \Phi_{\lambda n}^{(\sigma')}(\theta') + \sum_{k=1}^2 \bar{\Psi}_k^{(\sigma)}(\theta) \bar{\Phi}_k^{(\sigma')}(\theta') = -\frac{1}{H(\xi_0, \theta)} \delta(\theta - \theta') \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (74)$$

Нетрудно убедиться, что подстановка выражений (58)–(69) в равенство (74) обращает его в тождество.

### 6. ПОТЕНЦИАЛ

Искомый потенциал задачи  $\varphi(\mathbf{r})$  находим подстановкой общего выражения для функции Грина  $G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$ , имеющей в данном случае вид

$$G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) = -\sum_{\lambda=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon_{\lambda n}}{h + \varepsilon_{\lambda n}} \Psi_{\lambda n}(\boldsymbol{\rho}) \psi_{\lambda n}(\mathbf{r}) - \sum_{k=1}^2 \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\psi}_k(\mathbf{r}), \quad (75)$$

в формулу (7). В результате получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2 \frac{I}{\sigma_1} \left\{ \bar{\Psi}_1(\boldsymbol{\rho}_1) \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon_{2n}}{h + \varepsilon_{2n}} \Psi_{2n}(\boldsymbol{\rho}_1) \psi_{2n}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (76)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — любой, а вектор  $\boldsymbol{\rho}_1$  равен  $(a + R, 0)$  в декартовых координатах и  $(\xi_0, \pi)$  в биполярных. Для потенциалов вне включений ( $|\xi| \leq \xi_0$ ) и внутри правого круга ( $\xi \geq \xi_0$ ) имеем соответственно

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{h + \text{cth } n\xi_0} \times \frac{\text{sh } n\xi \cos n\theta}{\text{sh } n\xi_0} \right\} \quad (77)$$

и

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \times \left\{ \xi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{e^{-n(\xi-\xi_0)}}{h + \text{cth } n\xi_0} \cos n\theta \right\}. \quad (78)$$

На границе раздела (при  $\xi = \xi_0$ ) потенциалы  $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$  и  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ , как и должно быть, совпадают.

Используя выражения (77), (78), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - h \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} &= \\ &= -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\theta \right\} = \\ &= -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\pi)}. \quad (79) \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство

$$\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - h \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = -\frac{I}{\sigma_1} \delta(\theta - \pi), \quad (80)$$

которое совпадает с граничным условием для правого круга, следующее из уравнения (5). Такое же граничное условие справедливо и для левого круга.

Для модели с идеально проводящими ( $\sigma_2 = \infty$ ) включениями потенциал вне кругов принимает вид

$$h = \infty : \quad \varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \xi. \quad (81)$$

Используя формулу (81), для плотности тока

$$j(\mathbf{r}) = -\sigma_1 \frac{1}{H(\xi, \theta)} \frac{\partial \varphi^{(e)}(\mathbf{r})}{\partial \xi} \quad (82)$$

на оси  $y$  (при  $\xi = 0$ ) получаем

$$j(0, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{H(0, \theta)}. \quad (83)$$

Согласно формуле (23),

$$\frac{1}{H(0, \theta)} = \frac{1}{c} (1 + \cos \theta) = \frac{2}{c} \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\theta/2)}. \quad (84)$$

С другой стороны, из формулы (17) при  $\xi = 0$  следует

$$y = c \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (85)$$

так что

$$j(0, y) = \frac{I}{\pi} \frac{c}{y^2 + c^2}, \quad (86)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - R^2}$ .

Согласно соотношению (86), в случае  $(a - R)/R \ll 1$  ( $c \ll a$ ) в распределении плотности тока при  $y = 0$  имеется острый пик шириной порядка  $c$ . Следовательно, низкопроводящую прослойку между включениями ток преодолевает по кратчайшему пути в виде узкого канала. Тем самым подтверждается обсуждавшаяся в разд. 2 картина протекания тока в модели с фазовым переходом металл-идеальный проводник. Заметим, что в пределе  $a \rightarrow R$  ( $c \rightarrow 0$ ) распределение тока (86) принимает вид дельта-функции:  $j(0, y) = I\delta(y)$ . Поэтому точность использованного в работе бинарного приближения тем выше, чем ближе модель к точке фазового перехода.

### 7. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Эффективная проводимость  $\sigma_e$  модели в целом совпадает с проводимостью отдельной ячейки, так что

$$\sigma_e = \frac{I}{U}. \quad (87)$$

Здесь  $I$  — полный ток, текущий через ячейку,  $U$  — приложенная к ней разность потенциалов. В соответствии с рис. 2 величина  $U$  выражается через потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  следующим образом:

$$U = \varphi^{(2)}(\mathbf{r}_2) - \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) = -2\varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) \quad (88)$$

с  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$  из формулы (78) при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = (a, 0)$ . Точке  $x = a, y = 0$  соответствуют биполярные координаты  $(\xi_1, \pi)$ , где

$$\xi_1 = \xi(a, 0) = 2\xi_0 \quad (89)$$

с  $\xi_0$  из формулы (1). Вычислив с помощью выражения (78) для  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$  разность потенциалов  $U$ , найдем величину  $\sigma_e$ , которую представим в виде

$$\frac{1}{\sigma_e} = \frac{1}{\pi\sigma_1} \left\{ \xi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-n\xi_0}}{h + \operatorname{cth} n\xi_0} \right\}. \quad (90)$$

Выражением (90) для  $\sigma_e$ , справедливым при  $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$  и  $(a - R)/R \ll 1$ , дается эффективная проводимость исследуемой модели с фазовым переходом металл-идеальный проводник.

Величину  $\sigma_e$  как функцию ее аргументов запишем в виде

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2), \quad (91)$$

где

$$p = 1 - \frac{\pi}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 \quad (92)$$

— безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты — матрицы,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — проводимости соответственно матрицы и включений. При  $(a - R)/R \ll 1$  для  $\xi_0$  из (1) имеем

$$\xi_0 \simeq \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} \simeq \beta\rho\sqrt{\tau}, \quad \beta = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}}. \quad (93)$$

Здесь

$$\tau = \frac{p - p_c}{p_c} \quad (94)$$

— параметр близости к порогу протекания (точке фазового перехода)

$$p_c = 1 - \frac{\pi}{4} \quad (95)$$

по концентрации. При  $\sigma_2 = \infty$  ( $h = \infty$ ) и  $a \rightarrow R$  из (90) следует

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \infty) \sim \frac{\sigma_1}{\sqrt{\tau}}. \quad (96)$$

Формулой (96) дается закон возрастания эффективной проводимости при приближении к точке фазового перехода металл-идеальный проводник и определяется соответствующий критический индекс.

Эффективная проводимость альтернативной модели с фазовым переходом металл-диэлектрик может быть найдена из полученных выше результатов с помощью так называемого соотношения взаимности Келлера-Дыхне [7, 8]. Как отмечено в работах [7, 8] (см. также [4]), в двумерном случае имеет место соотношение, связывающее эффективные проводимости взаимных, отличающихся друг от друга заменой  $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$ , систем:

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sigma_e(p; \sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1\sigma_2. \quad (97)$$

Введя безразмерную эффективную проводимость  $f$  согласно соотношению



$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (98)$$

приведем равенство (97) к следующему виду:

$$f(p, h) f(p, 1/h) = 1. \quad (99)$$

Из этого соотношения, используя выражение (90), после замены  $h \rightarrow 1/h$  находим безразмерную эффективную проводимость модели с фазовым переходом металл – диэлектрик:

$$f(p, h) = \frac{1}{\pi} \times \left\{ \xi_0 + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\text{th } n\xi_0}{h + \text{th } n\xi_0} e^{-n\xi_0} \right\}. \quad (100)$$

Выражение (100) справедливо в критической области  $h = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$  и  $\xi_0 \sim \sqrt{\tau} \ll 1$ .

В случае диэлектрических ( $\sigma_2 = 0$ ) включений имеем [2, 3]

$$f(p, 0) = \frac{1}{\pi} \xi_0 \simeq A_0 \tau^t \quad (101)$$

с  $\tau$  из (94) и

$$t = \frac{1}{2}, \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = 0.166 \dots \quad (102)$$

Отметим, что численное исследование проводимости двумерной модели Рэля дает следующие значения [3]:

$$t \simeq 0.51, \quad A_0 \simeq 0.18, \quad (103)$$

согласующиеся с (102). При  $h \neq 0$  (но по-прежнему  $h \ll 1$  и  $\xi_0 \ll 1$ ) из общего выражения (100) получаем следующее разложение по степеням  $h$ :

$$f(p, h) = \frac{1}{\pi} \xi_0 \left\{ 1 + 2 \frac{h}{\xi_0} \ln \frac{1}{\xi_0} - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\xi_0} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (104)$$

Здесь учтено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\xi_0} = \ln \frac{1}{1 - e^{-\xi_0}} \simeq \ln \frac{1}{\xi_0}, \quad (105)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{cth } n\xi_0 e^{-n\xi_0} \simeq \frac{1}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6\xi_0}. \quad (106)$$

Параметром разложения в (104) является  $h/\xi_0 \sim h/\sqrt{\tau} \ll 1$ . Формула (100) и разложение (104)

дают искомые выражения для безразмерной эффективной проводимости двумерной модели Рэля с фазовым переходом металл – диэлектрик в предпороговой области концентраций – в ее «металлической» фазе.

Разложение (104) по форме совпадает (за исключением логарифмического множителя) с соответствующим разложением  $f(p, h)$  в рамках гипотезы подобия [4, 9]:

$$f(p, h) = \tau^t \left\{ A_0 + A_1 \frac{h}{\tau^{t/s}} + A_2 \left( \frac{h}{\tau^{t/s}} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (107)$$

Здесь малым параметром является отношение  $h/\tau^{t/s}$ , где  $s$  – второй критический индекс, характеризующий пороговое значение эффективной проводимости:  $f(p_c, h) \sim h^s$ . Поскольку в разложении (104)  $t = 1/2$ , можно ожидать, что для двумерной модели Рэля индекс  $s = 1$ . Отметим, что численное исследование этой модели [3] дает  $s \simeq 0.95$ .

**Благодарности.** В заключение выражаю благодарность Д. А. Головневой и Н. А. Хлопотуновой за помощь в подготовке рукописи статьи к печати.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Знание полной системы собственных функций позволяет решать и некоторые другие задачи, связанные с данным включением – макроскопическим телом, например, о его дипольной поляризуемости.

В случае тела, помещенного в однородное электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}_0$ , соответствующий потенциал имеет следующую асимптотику (в двумерном случае):

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi(\mathbf{r}) \simeq -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + 2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^2} + \dots \quad (A.1)$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \quad (A.2)$$

– дипольный момент тела,  $\hat{\Lambda}$  – тензор дипольной поляризуемости. Для составляющих этого тензора согласно [5, 6] имеем

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -4\pi(1 - h) \sum_{\nu} \frac{d_{\nu\alpha} d_{\nu\beta}}{h + \varepsilon_{\nu}}, \quad (A.3)$$

где  $\mathbf{d}_{\nu}$  – аналог дипольного момента в асимптотике поляризационной собственной функции:

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_\nu(\mathbf{r}) \approx 2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_\nu)}{r^2} + \dots \quad (\text{A.4})$$

В формуле (A.3)  $h = \varepsilon_2/\varepsilon_1$  — отношение диэлектрических проницаемостей тела и окружающей среды. Для рассматриваемой пары кругов дипольным поведением при  $r \rightarrow \infty$  обладают функции  $\psi_{2n}^{(e)}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{1n}^{(e)}(\mathbf{r})$ . Для соответствующих дипольных моментов имеем

$$\mathbf{d}_{2n} = n(-1)^n c B_n \mathbf{i}_x, \quad \mathbf{d}_{1n} = n(-1)^n c A_n \mathbf{i}_y. \quad (\text{A.5})$$

Для составляющих тензора поляризуемости  $\hat{\Lambda}$  получаем

$$\Lambda_{xx} = -2c^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1-h}{h + \text{cth } n\xi_0} \frac{e^{-n\xi_0}}{\text{sh } n\xi_0}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Lambda_{yy} = -2c^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1-h}{h + \text{th } n\xi_0} \frac{e^{-n\xi_0}}{\text{ch } n\xi_0}. \quad (\text{A.7})$$

Отметим, что выражения (A.6), (A.7) удовлетворяют равенствам

$$\Lambda_{xx}(h) = -\Lambda_{yy}(1/h), \quad \Lambda_{yy}(h) = -\Lambda_{xx}(1/h), \quad (\text{A.8})$$

являющимся следствием соотношения взаимности (см. [4]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **34**(211), 481 (1892).
2. W. T. Perrins, D. B. McKenzie, and B. C. McPhedran, *Proc. Roy. Soc. London A* **369**, 207 (1979).
3. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, *ЖЭТФ* **117**, 978 (2000).
4. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).
5. Б. Я. Балагуров, *ЖЭТФ* **94**, 95 (1988).
6. Б. Я. Балагуров, *Метод собственных функций в макроскопической электростатике*, URSS, Москва (2016).
7. J. В. Keller, *J. Math. Phys.* **5**, 548 (1964).
8. А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **59**, 110 (1970).
9. А. L. Efros and В. I. Shrllovskii, *Phys. Stat. Sol. (b)* **76**, 475 (1976).
10. J. P. Straley, *J. Phys. C* **9**, 783 (1976).
11. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. II, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).