

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРУКТУРЫ НЕЙТРАЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ И О СПОНТАННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. Г. Куликовский<sup>а\*</sup>, А. Т. Ильичев<sup>а,б\*\*</sup>, А. П. Чугайнова<sup>а\*\*\*</sup>, В. А. Шаргатов<sup>с\*\*\*\*</sup>

<sup>а</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия

<sup>б</sup> Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
105005, Москва, Россия

<sup>с</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 декабря 2019 г.,  
после переработки 5 мая 2020 г.  
Принята к публикации 7 мая 2020 г.

Исследована устойчивость структуры нейтрально устойчивой ударной волны, называемой также спонтанно излучающей. Получены решения, описывающие линейные, синусоидально зависящие от координаты вдоль изучаемой структуры, возмущения в структуре и ниже по потоку. Показано, что эти возмущения затухают со временем. Рассмотрен предельный переход при стремящейся к нулю безразмерной ширине структуры. В пределе получены результаты, совпадающие с классическими, когда ударная волна считалась поверхностью разрыва.

DOI: 10.31857/S0044451020090138

$$\frac{1 - (v_2/c_2)^2 - v_1 v_2/c_2^2}{1 - (v_2/c_2)^2 + v_1 v_2/c_2^2} < j^2 \left( \frac{dV_2}{dp_2} \right)_H < 1 + 2 \frac{v_2}{c_2}. \quad (1)$$

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании линейной устойчивости ударных волн в газах [1–5] было обнаружено, что в зависимости от уравнения состояния газа и интенсивности ударной волны плоская ударная волна может быть асимптотически устойчивой (к устойчивым относятся ударные волны в совершенном газе), неустойчивой (когда возмущения поверхности ударной волны и гидродинамических величин в окрестности волны экспоненциально растут со временем) и нейтрально устойчивой. В последнем случае существуют синусоидальные возмущения поверхности ударной волны и течения за ней, которые не растут и не затухают со временем. Условия, при которых ударная волна нейтрально устойчива, получены в указанных работах и имеют вид

Здесь  $v$  — компонента скорости, нормальная к ударной волне,  $c$  — скорость звука,  $V = 1/\rho$  — удельный объем,  $j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)$  — квадрат потока массы, индексы «1» и «2» относятся к величинам перед и за ударной волной, индекс «H» у производной означает, что производная берется вдоль ударной адиабаты.

При рассмотрении двумерных возмущений будем считать ось  $x$  направленной по нормали к ударной волне, невозмущенную скорость — направленной по оси  $x$ . Ось  $y$  считаем лежащей на невозмущенной поверхности ударной волны. Тогда упомянутое синусоидальное возмущение поверхности ударной волны записывается в виде

$$x = \xi(y, t), \quad \xi(y, t) = \text{Re } A \exp i(ky - \omega t), \quad (2)$$

$$A = \text{const.}$$

Дисперсионное уравнение, являющееся следствием линеаризованных граничных условий на ударной волне, определяет отношение

\* E-mail: kulik@mi-ras.ru

\*\* E-mail: ilichev@mi-ras.ru

\*\*\* E-mail: anna\_ch@mi-ras.ru

\*\*\*\* E-mail: shargatov@mail.ru

$$\frac{\omega}{k} = \pm W. \quad (3)$$

Для нейтрально устойчивых волн значение  $W$  действительно и не зависит от  $k$ . Скорость  $W$  — «сверхзвуковая» в том смысле, что

$$W > \sqrt{c_2^2 - v_2^2}. \quad (4)$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства (4), представляет собой скорость распространения звука вдоль луча, параллельного ударной волне.

Если по поверхности нейтрально устойчивой ударной волны распространяется возмущение вида (2) и выполняются условия (3) и (4), то в область за ударной волной уходят акустические, энтропийные и вихревые возмущения, не затухающие при удалении от ударной волны, поэтому обсуждаемые нейтрально устойчивые ударные волны называются также спонтанно излучающими ударными волнами (СИУВ).

Поскольку в выражении (2) для нейтральных возмущений определено только отношение  $\omega/k$ , а значение  $k$  произвольно, из решений, удовлетворяющих условию (3), можно составить возмущение  $\xi(y, t)$  произвольной формы (в том числе возмущение, имеющее передний фронт), которое будет распространяться по ударной волне со скоростью  $W$ . Эти возмущения как суперпозиция решений вида (2) соответствуют линейному приближению. В нелинейном приближении были получены решения, в которых по невозмущенной ударной волне двигается точка, за которой ударная волна расщепляется на две ударные волны или ударную волну и волну Прандтля – Майера. Если поместить начало координат в эту точку, то течение зависит только от полярного угла [6].

В обзорной статье по устойчивости ударных волн [7] сделано следующее замечание: поскольку скорость распространения возмущений поверхности ударной волны  $W$  сверхзвуковая в смысле выполнения неравенства (4), к точке, движущейся со скоростью  $W$  по ударной волне, не могут прийти никакие возмущения из потока за ударной волной, если эти возмущения в начальный момент времени были сосредоточены в ее окрестности, а не приходят из бесконечности. На этом основании в работе [7] возмущения вида (2), (3) были объявлены несуществующими. Далее в [7] отмечается, что действительность величины  $\omega/k$  означает, что у нейтрально устойчивых волн коэффициент отражения акустических возмущений, догоняющих ударную волну, при определенном угле падения обращается в бесконечность.

В работах [7, 8] был подсчитан коэффициент отражения слабонелинейных волн, который оказался конечным, но при некоторых условиях стремящимся к бесконечности, если амплитуда падающей волны стремится к нулю.

В последующие годы в связи с возможными приложениями появился ряд работ, в которых изучались течения газов большой плотности, когда оказалось возможным существование нейтрально устойчивых ударных волн [9–14].

Работы [9–11] посвящены численным экспериментам с нейтрально устойчивыми ударными волнами и их взаимодействию с возмущениями. Выводы из упомянутых численных экспериментов, касающиеся спонтанно излучающих ударных волн, сводятся к тому, что спонтанная (не обусловленная внешними воздействиями) генерация акустических волн не наблюдалась в численных экспериментах. С точки зрения авторов настоящей работы, представленные в [9–11] результаты не дают оснований для окончательного вывода из-за несовершенства любых методов численного расчета течений газа с ударными волнами, а также из-за нелинейности рассчитанных примеров. В [9–11] отмечается, что результаты работ [7, 8] носят предположительный и в известной мере противоречивый характер.

Отметим, что в работе [15], которая идейно и методически связана с [9–11], в численном расчете получены незатухающие многомерные колебания ударной волны с образованием ячеистой структуры фронта. Существование такой ячеистой структуры получено в [15] в численном расчете в области неоднозначного представления разрыва и, по мнению автора [15], является следствием этой неоднозначности, т. е. нелинейного эффекта. Там же сделано следующее утверждение: «О существовании нейтрально устойчивых ударных волн можно говорить, лишь принимая во внимание, что вынужденные возмущения их поверхности затухают значительно медленнее, чем в случае абсолютно устойчивой ударной волны, а предсказываемое линейной теорией спонтанное излучение звуковых волн фронтом нейтрально устойчивой ударной волны вообще не наблюдается».

Можно отметить, что в статьях [7, 8] вопрос о природе процессов развития возмущений с нейтрально устойчивой ударной волной остался открытым. Нет также указаний на то, как с учетом выказанных там положений строить решение для линейризованной задачи о поведении возмущений нейтрально устойчивых ударных волн. Формальное же построение решения задачи с начальными данными

[3] приводит к появлению возмущений, излучаемых ударной волной в область за ней, источник которых в виде возмущений формы ударной волны не затухает со временем.

В связи с изложенным возникает вопрос: какие могут быть механизмы передачи возмущений по ударной волне и как правильно описывать линейные возмущения нейтрально устойчивых ударных волн.

В работе [16] было предложено рассмотреть структуру СИУВ с целью выяснения возможности передачи возмущений вдоль нее и далее рассмотреть предельный переход, когда ширина структуры стремится к нулю. В работе [17] дана краткая аннотация результатов, излагаемых ниже. В предлагаемой работе рассматривается простейшая модель структуры СИУВ. Предполагается, что впереди расположена обычная устойчивая ударная волна, такая же как в совершенном газе, а за ней наблюдается течение невязкого нетеплопроводного газа, в котором происходят процессы релаксации, приводящие к уменьшению показателя адиабаты  $\gamma$ . При этом переход от течения перед ударной волной к течению вдали за структурой соответствует ударному переходу в СИУВ.

В разд. 2 выбираются параметры некоторой СИУВ, структура которой будет далее изучаться. В разд. 3 формулируются предположения, принимаемые при описании релаксационного процесса, и представляется решение задачи о структуре СИУВ. В разд. 4 приводятся уравнения, описывающие линейные возмущения (гармонически зависящие от  $y$ ) в структуре СИУВ и ниже по потоку. В разд. 5 формулируются условия, обеспечивающие отсутствие приходящих из бесконечности возмущений, и построены решения для возмущений, состоящие из волн, уходящих от ударной волны вниз по потоку. Излагается метод численного нахождения собственных частот, приведены результаты этих вычислений в виде зависимости собственной частоты от  $k$ , рассматривается предельный переход при  $k \rightarrow 0$  ( $k$  — волновое число в направлении  $y$ ) или, что то же, при стремящейся к нулю безразмерной ширине структуры, отнесенной к длине волны возмущения в направлении  $y$ . В разд. 6 формулируются выводы о СИУВ, получающиеся при этом предельном переходе, и проводится обсуждение результатов.

## 2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛН

В этом разделе ударная волна рассматривается как поверхность разрыва, разделяющего два потока газа. Параметры потока перед ударной волной

будем в соответствии с неравенством (1) помечать индексом «1», а параметры потока за ударной волной — индексом «2». Выберем параметры течения и ударной волны таким образом, чтобы выполнялись условия (1). Будем считать, что в газе могут происходить внутренние процессы: химические или релаксационные, скорость протекания которых будет рассматриваться в следующих разделах как ограниченная. При рассмотрении в этом разделе ударной волны как поверхности разрыва считается, что эти процессы происходят мгновенно и за ударной волной, и перед ней невозмущенное течение представляет собой однородное течение равновесного невязкого нетеплопроводного газа.

Для задания свойств газа нужно задать внутреннюю энергию единицы массы

$$\varepsilon = \varepsilon(p, V). \tag{5}$$

Соотношения на ударной волне имеют вид [4]

$$\varepsilon(p_2, V_2) - \varepsilon(p_1, V_1) - \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0, \tag{6}$$

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \tag{7}$$

Уравнение (6) называется ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио ( $H$ ). Равенство (7) выражает поток массы  $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$  через единицу площади ударной волны. Это равенство — следствие непрерывности на ударной волне потоков массы и нормальной компоненты импульса.

В неравенствах (1), выражающих условие спонтанного излучения ударной волной, следует определить величины  $c_2$  и  $(dV_2/dp_2)_H$ . Под  $c_2$  следует понимать равновесную скорость звука по состоянию за зоной релаксации.

Найдем значение  $c_2$  как скорость бесконечно слабой ударной волны вблизи состояния 2. Воспользуемся уравнением ударной адиабаты (6), считая состояние 1 близким к состоянию 2, так что

$$d\varepsilon = d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1, \quad V_1 - V_2 = -dV.$$

Тогда при отсутствии вязкости и теплопроводности получим, что при квазиравновесном процессе в окрестности состояния 2

$$d\varepsilon_2 + p_2 dV_2 = 0, \quad (\varepsilon_p)'_2 dp_2 + [(\varepsilon_V)'_2 + p_2] dV_2 = 0, \tag{8}$$

$$c_2^2 = \frac{dp_2}{d\rho_2} = \frac{V_2^2 [(\varepsilon_V)'_2 + p_2]}{(\varepsilon_p)'_2},$$

$$\varepsilon'_V = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_p, \quad \varepsilon'_p = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_V.$$

Найдем теперь величину  $(dV_2/dp_2)_H$ . Для этого возьмем дифференциал от равенства (6), считая состояние 1 заданным:

$$(\varepsilon'_p)_2 dp_2 + (\varepsilon'_V)_2 dV_2 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1) dV_2 - \frac{1}{2}(V_1 - V_2) dp_2 = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\left(\frac{dV_2}{dp_2}\right)_H = -\frac{(\varepsilon'_p)_2 - (V_1 - V_2)/2}{(\varepsilon'_V)_2 + (p_2 + p_1)/2}. \quad (10)$$

Скорость  $v$  находится из равенства

$$v = jV, \quad (11)$$

где  $j$  определяется согласно (7).

Воспользуемся равенствами (11), (7), (8) и преобразуем комбинацию слагаемых, стоящих в числителе левой части неравенств (1),

$$\frac{v_2(v_1 + v_2)}{c_2^2} = \left(\frac{V_1}{V_2} + 1\right) \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \frac{(\varepsilon'_p)_2}{(\varepsilon'_V)_2 + p_2}. \quad (12)$$

Обозначим

$$\frac{(\varepsilon'_p)_2}{V_1 - V_2} = X > 0, \quad \frac{(\varepsilon'_V)_2 + p_2}{p_2 - p_1} = Y > 0. \quad (13)$$

Неравенство  $Y > 0$  следует согласно (8) из неравенств  $\varepsilon'_p > 0$  и  $c_2^2 > 0$ . Равенство (12) примет вид

$$\frac{v_2(v_1 + v_2)}{c_2^2} = \left(\frac{V_1}{V_2} + 1\right) \frac{X}{Y}. \quad (14)$$

Преобразуем подобным образом знаменатель дроби в (1). Тогда получим выражение для левой части неравенств (1):

$$\frac{1 - \left[(v_2/c_2)^2 + v_1 v_2/c_2^2\right]}{1 - \left[(v_2/c_2)^2 - v_1 v_2/c_2^2\right]} = \frac{Y - (V_1/V_2 + 1) X}{Y + (V_1/V_2 - 1) X}.$$

Среднее выражение в неравенствах (1) с учетом (10) приводится к виду

$$-\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \frac{(\varepsilon'_p)_2 - (V_1 - V_2)/2}{(\varepsilon'_V)_2 + (p_2 + p_1)/2} = -\frac{X - 1/2}{Y - 1/2}. \quad (15)$$

Таким образом, левое неравенство (1) приобретает вид

$$\frac{(V_1/V_2 + 1) X - Y}{(V_1/V_2 - 1) X + Y} > \frac{X - 1/2}{Y - 1/2}. \quad (16)$$

Для выбора ударной волны, возмущения которой будут изучаться, следует распорядиться величинами  $X$  и  $Y$  так, чтобы неравенства (1) были выполнены. Не рассматривая решения неравенства (16) в

полном объеме, ограничимся следующей областью значений этих величин:

$$X > \frac{1}{2}, \quad Y > \frac{1}{2}. \quad (17)$$

В этом случае среднее выражение (15) в неравенствах (1) оказывается отрицательным, т. е. отрицателен наклон ударной адиабаты  $(dV_2/dp_2)_H$  в состоянии 2. При этом правое неравенство в (1) выполняется автоматически, поскольку  $1 + 2v_2/c_2 > 0$ . Выполнение левого неравенства было сведено к выполнению неравенства (16). При выполнении ограничений (17) неравенство (16) приводится к виду

$$(Y - X) \left[ Y - 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) X \right] < 0.$$

Таким образом, для выполнения левого неравенства (1) достаточно выбрать значения  $X$  и  $Y$  так, чтобы они удовлетворяли неравенствам (17) и неравенствам

$$X < Y < 1 + \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) X. \quad (18)$$

Внутренняя энергия в случае совершенного газа имеет вид

$$\varepsilon = \frac{pV}{\gamma - 1}, \quad \text{или } p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \gamma = \text{const}. \quad (19)$$

Как известно, множитель  $(\gamma - 1)$  в совершенном газе зависит от числа степеней свободы молекул газа.

Если происходит релаксационный процесс, то доля энергии, приходящаяся на поступательные степени свободы всех частиц (молекул, ионов, электронов), зависит также от энергии, затраченной (запасенной) при диссоциации и ионизации. Поэтому можно написать

$$p = \rho\varepsilon f, \quad \text{или } \varepsilon = pV/f. \quad (20)$$

Здесь  $f$  определяет долю энергии, соответствующую поступательным степеням свободы,  $\varepsilon$  — полная энергия единицы массы газа по всем степеням свободы, учитывающая также химическую энергию, энергию диссоциации и ионизации.

Сравнение равенств (19) и (20) показывает, что  $f$  и  $(\gamma - 1)$  играют одинаковую роль в уравнении состояния, так что далее не делается различия между  $f$  и  $\gamma - 1$ . Как известно, в гиперзвуковой аэродинамике процессы диссоциации и ионизации учитываются во многих случаях изменением величины  $\gamma$  [18].

При рассмотрении структуры и возможных нестационарных процессов будут использоваться равенства (20), но  $f$  будет считаться переменной величиной, для которой будет постулировано дифференциальное уравнение. Равновесное значение  $f$ , соответствующее заданным  $V$  и  $p$ , будем помечать индексом  $e$ .

Выберем значения, обеспечивающие выполнение неравенств (1),

$$f_{e1} = 0.4, \quad f_{e2} = 0.2, \quad V_2/V_1 = 1/5, \quad (21)$$

$$p_2/p_1 \approx 4.8, \quad X = 2.5, \quad Y = 9.$$

Отношение  $p_2/p_1$  получено с использованием<sup>1)</sup> (6).

Пользуясь равенствами (20) и (13), найдем частные производные от  $f_e = pV/\varepsilon(p, V)$  в состоянии 2:

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial p}\right)_2 = \frac{(f_e)_2^2}{p_2} \left[ f_2^{-1} - X \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \right] \approx -\frac{0.200}{p_2}, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial V}\right)_2 = \frac{(f_e)_2^2}{V_2} [f_2^{-1} + 1 - Y(1 - p_1 p_2^{-1})] \approx -\frac{0.045}{V_2}, \quad (23)$$

Производная вдоль прямой Рэлея – Михельсона в состоянии 2 имеет вид

$$\left(\frac{df_e}{dV}\right)_{M2} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial V}\right)_2 + \left(\frac{\partial f_e}{\partial p}\right)_2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{M2} = -\frac{0.045}{V_2} + \frac{0.2(p_2 - p_1)}{p_2(V_1 - V_2)} \approx -\frac{0.005}{V_2}. \quad (24)$$

### 3. СТРУКТУРА СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛН, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ПРОЦЕССОМ РЕЛАКСАЦИИ

Как было сказано, равновесные состояния газа определяются равенствами (20), в которых

$$f = f_e(p, V), \quad (25)$$

где  $f_e$  считается известной функцией, которая будет задана ниже. Предполагается, что вслед за лидирующей газодинамической ударной волной происходит

течение невязкого нетеплопроводного газа, определяющееся процессом релаксации, в котором значение функции  $f$  стремится к своему равновесному значению  $f_e$ .

Процесс релаксации в частице газа должен описываться дифференциальным уравнением, которое зададим простейшим образом:

$$\frac{df}{dt} = -\lambda(f - f_e(p, V)), \quad \lambda > 0. \quad (26)$$

Величина  $\lambda$  может зависеть от текущего состояния газа и будет выбрана постоянной из соображений удобства.

Далее принимаются следующие обозначения. Величины без индекса — текущие значения внутри структуры. Величины с индексом «1» относятся к течению перед лидирующей ударной волной, индексом «0» будут отмечаться величины непосредственно за лидирующей ударной волной, величины с индексом «2» относятся к течению за зоной релаксации. Будем считать, что непосредственно за идущей впереди лидирующей ударной волной  $f_0 \equiv \gamma_1 - 1 = f_1$ , т.е. считается, что  $\gamma$  в этой ударной волне не меняется,  $\gamma_0 = \gamma_1$ . Это равенство основано на представлении, что лидирующая ударная волна узкая (порядка нескольких длин свободного пробега) и в ней  $f$  не изменяется, поскольку изменения  $f$  происходят с конечной скоростью.

Рассмотрим течение, в котором все величины зависят от переменной  $x$ , а функция  $f = \gamma - 1$  изменяется согласно уравнению (26) от значения  $f_0 = f_1$ , до тех пор пока не будет выполнено равенство  $f = f_e(p, V)$ . Если при некотором  $x$  известно значение функции  $f$ , то параметры течения при этом можно рассчитать из законов сохранения, которые выполняются в случае одномерного стационарного течения.

Выполнение равенства (7) не зависит от процесса релаксации. В одномерном стационарном течении  $j = \text{const}$ . Тогда на плоскости  $V, p$  равенство (7) определяет прямую (прямая Рэлея – Михельсона). Значения  $V(x), p(x)$  при стационарном течении принадлежат этой прямой.

При  $\gamma_1 = \gamma_0$  ударная адиабата — гипербола с асимптотами [4]

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad \frac{p}{p_1} = -\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1},$$

где  $V_1, p_1$  — состояние перед ударной волной.

Эта гипербола пересекает прямую (7) в начальной точке и в точке  $V = V_0, p = p_0$ , соответствующей состоянию непосредственно за головной ударной волной. Далее наблюдается одномерное течение

<sup>1)</sup> Численные значения приводятся здесь и далее приближенно с малым числом значащих цифр для создания качественных представлений о параметрах.

с уменьшением величины  $\gamma$ , для которого справедливы законы сохранения. При этом значения всех величин определяются значением  $\gamma$  так же, как в ударной волне, т.е. в разрыве, в котором меняется значение  $\gamma$  от значения  $\gamma_1$  до текущего значения этой величины.

Уравнение ударной адиабаты (6) в случае изменения в ударной волне значения  $\gamma$  имеет вид [4]

$$H(\gamma_1, \gamma, V_1, p_1, V, p) = 0, \quad H(\gamma_1, \gamma, V_1, p_1, V, p) \equiv \frac{1}{\gamma-1}pV - \frac{1}{\gamma_1-1}p_1V_1 - \frac{1}{2}(V_1 - V)(p_1 + p). \quad (27)$$

В рассматриваемом случае  $\gamma$  ( $\gamma < \gamma_1$ ) — текущее значение в структуре, причем предполагается, что  $\gamma \rightarrow \gamma_2$  при  $x \rightarrow \infty$ . Из (27) следует

$$P = \frac{(\gamma_1+1)/(\gamma_1-1)-U}{(\gamma+1)/(\gamma-1)U-1}, \quad P = \frac{p}{p_1}, \quad U = \frac{V}{V_1}. \quad (28)$$

Гипербола (28) при  $\gamma < \gamma_1$  проходит через точку  $U = 1, P = (\gamma - 1)/(\gamma_1 - 1)$ , расположенную на плоскости  $(V, p)$  ниже начальной точки  $U_1 = 1, P_1 = 1$ .

При различных значениях  $\gamma$  ударные адиабаты, заданные уравнением (27), не пересекаются, причем ударные адиабаты с меньшим значением  $\gamma$  расположены ниже ударных адиабат с большим значением величины  $\gamma$ .

На прямой Рэлея – Михельсона (7) имеется точка  $V_0, p_0$ , при  $\gamma = \gamma_1$  представляющая значения величин  $V, p$  непосредственно за лидирующей ударной волной. Состояние, соответствующее текущему значению  $\gamma$ , представляется точкой пересечения ударной адиабаты (27) с прямой Рэлея – Михельсона (7). С уменьшением  $\gamma$  эта точка движется по прямой Рэлея – Михельсона от точки  $V_0, p_0$  в сторону убывания  $V$ .

Из уравнения (27) получаем  $f$  как функцию точек на прямой Рэлея – Михельсона (6):

$$f \equiv \gamma - 1 = \frac{pV}{p_1V_1/f_1 + (V_1 - V)(p_1 + p)/2} = \frac{U[1 + J^2(1 - U)]}{1/(\gamma_1 - 1) + (1 - U)[2 + J^2(1 - U)/2]}, \quad (29)$$

$$J^2 \equiv \frac{P_2 - 1}{1 - U_2} = j^2 \frac{V_1}{p_1}. \quad (30)$$

Разрешая соотношения (29), (30), получим явные выражения для параметров фонового стационарного течения в виде функций, зависящих от  $f$  и, согласно (29), от функций  $U$ .

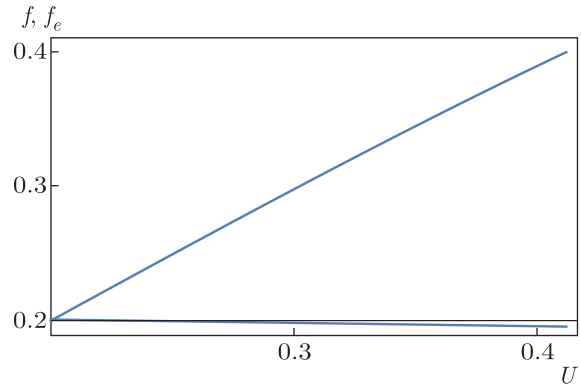


Рис. 1. Графики  $f_e(U)$  (внизу) и  $f(U)$  на прямой Рэлея – Михельсона в интервале  $(U_2, U_0)$ ,  $U_0$  — значение  $U$  за головной ударной волной  $U_0 \approx 0.412$

Зададим теперь значение функции  $f_e$  и ее производных на прямой Рэлея – Михельсона. Функция  $f_e(U)$  должна удовлетворять условиям

$$f_e(1) = 0.4, \quad f_e(0.2) = 0.2. \quad (31)$$

При изучении структуры потребуются значения функции  $f_e$  на прямой Рэлея – Михельсона только на отрезке  $[U_2, U_0]$ , где  $U_0$  — значение  $U$  за лидирующей ударной волной  $U_0 \approx 0.412, U_2 = 0.2$ . Функцию  $f_e(U)$  будем далее представлять линейной функцией от  $U$  на отрезке  $[U_2, U_0]$  (см. рис. 1) с коэффициентом, представленным равенством (24):

$$f_e = 0.2 + \left( \frac{df_e}{dU} \right)_{M_2} (U - 0.2). \quad (32)$$

Задание функции  $f_e$  вдоль прямой Рэлея – Михельсона в виде линейной функции с коэффициентом таким, как в конечной точке структуры  $U = U_2 = 0.2$ , позволяет на отрезке прямой Рэлея – Михельсона  $[U_2, U_0]$  задать частные производные функции  $f_e(V, p)$  постоянными, равными их значениям (22), (23) в состоянии 2:

$$\frac{\partial f_e}{\partial p} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial p} \right)_2, \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial V} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial V} \right)_2. \quad (34)$$

Таким образом, определены зависимости от  $U$  всех величин в структуре. Для нахождения  $U(x)$  на прямой Рэлея – Михельсона запишем уравнение (26) как

$$\frac{df}{dx} = -\alpha \frac{f - f_e}{U}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{jV_1}. \quad (35)$$

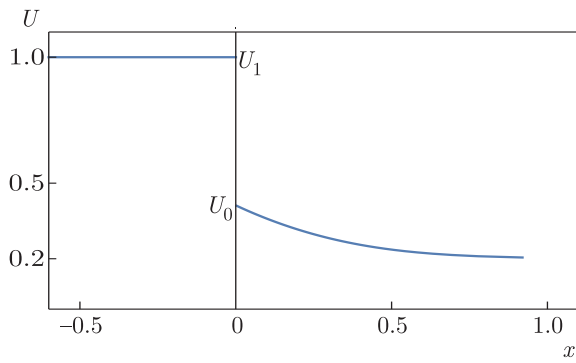


Рис. 2. Форма структуры ударной волны с учетом релаксации  $U = U^0(x)$  при  $\alpha = 1$

Уравнение (35) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dU} = -\frac{Uf(U)'}{\alpha[f(U) - f_e(U)]}. \quad (36)$$

Было использовано, что  $f$  и  $f_e$  на прямой Рэля–Михельсона согласно (30) и (32) выражаются через  $U$ . В структуре  $U$  убывает,  $f - f_e \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  при  $U \rightarrow U_2$  (рис. 1).

Из (36) при  $\alpha = \text{const}$  следует

$$\alpha x = -\int_{U_0}^U \frac{sf(s)'ds}{[f(s) - f_e(s)]}, \quad (37)$$

так как при  $x = 0$  непосредственно за лидирующей ударной волной  $U|_{x=+0} = U_0$ . Разрешив (37), получим, что изменение удельного объема в структуре ударной волны с релаксацией описывается функцией  $U = U^0(x)$ , график которой представлен на рис. 2. Верхним индексом «0» здесь и далее помечаются функции, характеризующие структуру разрыва при  $x > 0$ .

На рис. 2 видно, что при  $\alpha = 1$  в качестве эффективной ширины структуры в рассматриваемом случае можно принять  $\delta = 1$ . Выражения для скорости и давления в ударной волне определяются из уравнения прямой Рэля–Михельсона (30) в предположении, что поток массы задан, а  $v_x = jV$ .

На рис. 3 ударная адиабата лидирующей ударной волны представлена линией 1, а прямая Рэля–Михельсона — линией 4. Линией 2 показана ударная адиабата для газа, в котором  $p_2V_2 = f_2\varepsilon$ ,  $f_2 = f_{e2} = 0.2$ . Линия 3 — ударная адиабата для случая, когда величина  $f_e(p, \rho)$  задается соотношениями (32), (33) и (34). Адиабаты 2 и 3 имеют одно и то же значение  $f = 0.2$  в конечной точке. Различие между кривыми 2 и 3 обусловлено тем, что в одном случае  $f_e = \text{const}$ , а в другом случае величина  $f_e$  — переменная и в окрестности прямой Рэля–Михельсона определяется упомянутыми выше равенствами.

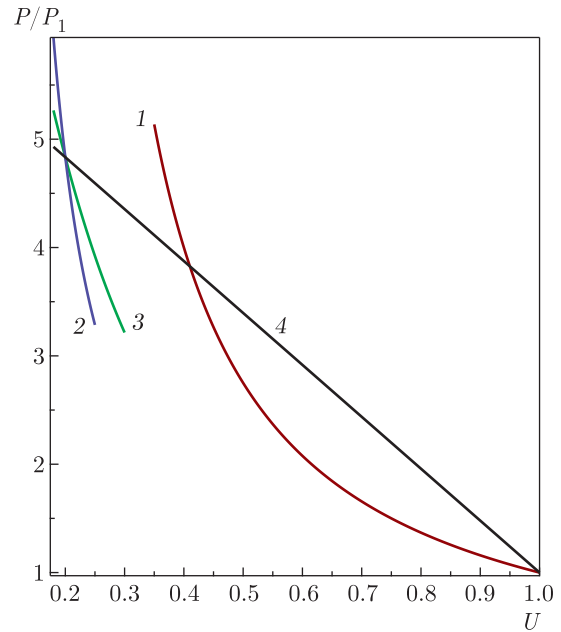


Рис. 3. Ударные адиабаты и прямая Рэля–Михельсона: 1 —  $\gamma = \gamma_1 = 1.4$ , 2 —  $\gamma = 1.2$ ,  $\gamma_1 = 1.4$ , 3 —  $\gamma = 1 + f_e(p, \rho)$ ,  $\gamma_1 = 1.4$

Отметим, что предположения относительно зависимости  $f_e(p, \rho)$  делают среду как бы более мягкой, что проявляется на рис. 3 в том, что кривая 3 имеет меньший наклон по сравнению с кривой 2. Рисунок 3 соответствует принятым параметрам ударной волны, структура которой далее исследуется на устойчивость.

#### 4. ВОЗМУЩЕНИЯ СТРУКТУРЫ СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛН

Система уравнений относительно переменных  $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $\varepsilon$ , описывающая плоские течения невязкого нетеплопроводного газа в зоне релаксации, имеет стандартный вид, выражающий законы сохранения массы, двух компонент импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_y + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_y + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Дополнительное уравнение для  $f$  и уравнение состояния имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\lambda[f - f_\varepsilon(p, \rho)], \quad p = \rho \varepsilon f. \quad (39)$$

Пусть имеется стационарное течение релаксирующего газа с лидирующей ударной волной, расположенной в плоскости  $x = 0$ . Рассмотрим малые линейные возмущения течения. Перейдем к безразмерным зависимым и независимым переменным:

$$t \rightarrow \frac{L}{v_2} t, \quad x \rightarrow Lx, \quad y \rightarrow Ly, \quad \rho \rightarrow \rho_2 \rho, \quad V \rightarrow V_2 V,$$

$$p \rightarrow p_2 p, \quad \varepsilon \rightarrow \frac{p_2}{\rho_2} \varepsilon, \quad v_{x,y} \rightarrow v_2 v_{x,y}, \quad \zeta \rightarrow L\zeta,$$

где  $L$  — характерное значение ширины структуры разрыва, которое можно записать в виде  $L = 1/\alpha$ :  $x = \zeta(y, t)$  — выражение для возмущенного фронта лидирующей ударной волны. Положим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{du^0}{dx} - i\omega & \frac{d\rho^0}{dx} & i\rho^0 k & 0 & 0 \\ -\frac{Qf^0 \varepsilon^0}{\rho^0} \frac{d\rho^0}{dx} & \frac{du^0}{dx} - i\omega & 0 & \frac{Q}{\rho^0} \frac{df^0 \rho^0}{dx} & \frac{Q}{\rho^0} \frac{d\rho^0 \varepsilon^0}{dx} \\ i \frac{\varepsilon^0 f^0 k Q}{\rho^0} & 0 & -i\omega & ikf^0 Q & ik\varepsilon^0 Q \\ 0 & \frac{d\varepsilon^0}{dx} & i\varepsilon^0 f^0 k & \frac{du^0}{dx} f^0 - i\omega & \varepsilon^0 \frac{du^0}{dx} \\ -\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial p} f^0 \varepsilon^0 - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \rho} & \frac{df^0}{dx} & 0 & -\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial p} f^0 \rho^0 & -\varepsilon^0 \rho^0 \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial p} - i\omega + 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -u_0 & -\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon_0 f_0 Q}{\rho_0} & -u_0 & 0 & -f_0 Q & -\varepsilon_0 Q \\ 0 & 0 & -u_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 f_0 & 0 & -u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_0 \end{pmatrix},$$

где

$$Q = \frac{V_1 - 1}{1 - p_1}.$$

Таким образом, уравнения (40) принимают вид динамической системы

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ \varepsilon \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^0(x) \\ u^0(x) \\ 0 \\ \varepsilon^0(x) \\ f^0(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta\varepsilon \\ \delta f \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta\varepsilon \\ \delta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(x) \\ \hat{v}_x(x) \\ \hat{v}_y(x) \\ \hat{\varepsilon}(x) \\ \hat{f}(x) \end{pmatrix} e^{iky} e^{-i\omega t},$$

где  $k = k_y L$ , а  $k_y$  — волновое число монохроматической волны в направлении вдоль разрыва. Далее всюду  $k$  считается действительным, а  $\omega$  в общем случае — комплексным.

Линеаризуя (38) и (39), получим систему уравнений для величин  $\hat{\rho}(x)$ ,  $\hat{v}_x(x)$ ,  $\hat{v}_y(x)$ ,  $\hat{\varepsilon}(x)$ ,  $\hat{f}(x)$ :

$$\mathbf{B}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (40)$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ ,  $\mathbf{y} = \{\hat{\rho}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{\varepsilon}, \hat{f}\}^\top$ ,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{y}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad (41)$$

с коэффициентами, зависящими от  $x$ .

Для линейных возмущений имеем

$$\mathbf{n} = (1, -ik\tilde{\zeta})^\top, \quad \boldsymbol{\tau} = (ik\tilde{\zeta}, 1)^\top, \\ \tilde{\zeta}(y, t) = \zeta e^{iky - i\omega t}, \quad D_x = -i\omega\tilde{\zeta},$$

—  $x$ -компонента скорости разрыва,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — векторы соответственно нормали и касательной к фронту.

Положим

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y)^\top.$$

Граничные условия на лидирующей ударной волне  $x = \tilde{\zeta}(y, t)$  имеют следующий вид [4]: равенство касательных составляющих скорости



$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \tag{42}$$

скачок нормальных скоростей

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n} = \sqrt{(p_0 - p_1)(V_1 - V_0)}. \tag{43}$$

Обозначив через  $\mathbf{D} = D\mathbf{n}$  скорость разрыва, имеем соотношение для скорости разрыва как функции  $p$  и  $V$ :

$$[(\mathbf{v}_1 - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n}]^2 = V_1^2 \frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0}; \tag{44}$$

соотношение, выражающее сохранение энергии на разрыве,

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(V_1 - V_0)(p_1 + p_0) = 0; \tag{45}$$

непрерывность  $f$  на разрыве

$$f_1 = f_0. \tag{46}$$

Из (42)–(46) и выражения  $p = p(\rho, \varepsilon, f)$  в (38) следует, что для возмущений  $\{\hat{\rho}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{\varepsilon}, \hat{f}\}^T$  при  $x = 0$  после исключения из граничных условий  $\zeta$  получим

$$\begin{aligned} & \frac{V_1}{2} \left[ V_1 \beta^2 + \frac{\varepsilon_0 (1 - \beta) f_0}{p_0 - p_1} \right] \hat{\rho} + \frac{(1 - \beta) f_0}{2\beta (p_0 - p_1)} \hat{\varepsilon} + \hat{v}_x - \\ & - \frac{i}{2k} \left[ \left( \frac{f_0 \varepsilon_0}{p_0 - p_1} + \frac{V_1 \beta^2}{1 - \beta} \right) \frac{d\rho^0}{dx} + \frac{f_0}{(p_0 - p_1) \beta V_1} \times \right. \\ & \times \left. \frac{d\varepsilon^0}{dx} + \frac{2}{(1 - \beta) V_1} \frac{dv^0}{dx} \right] \hat{v}_y = 0, \\ & \left( -\frac{f_0 \varepsilon_0}{p_0 - p_1} + \frac{V_1 \beta^2}{1 - \beta} \right) \hat{\rho} - \frac{f_0}{V_1 (p_0 - p_1) \beta} \hat{\varepsilon} + \\ & + \frac{i}{k(1 - \beta)} \left[ \left( \frac{f_0 \varepsilon_0}{V_1 (p_0 - p_1)} - \frac{\beta^2}{(1 - \beta)} \right) \frac{d\rho^0}{dx} + \right. \\ & + \left. \frac{f_0}{V_1^2 (p_0 - p_1) \beta} \frac{d\varepsilon^0}{dx} + \frac{2\eta}{V_1^2} \right] \hat{v}_y = 0, \tag{47} \\ & [\beta^2 V_1 (p_0 + p_1) + f_0 \varepsilon_0 (1 - \beta)] V_1 \hat{\rho} + \\ & + \left( \frac{f_0}{\beta} - f_0 - 2 \right) \hat{\varepsilon} + \frac{i}{(1 - \beta) k} [(f_0 \varepsilon_0 (-1 + \beta) - \\ & - \beta^2 V_1 (p_0 + p_1)) \frac{d\rho^0}{dx} + \\ & + \frac{((-1 + \beta) f_0 + 2\beta)}{V_1 \beta} \frac{d\varepsilon^0}{dx}] \hat{v}_y = 0, \\ & - \frac{i}{k V_1 (1 - \beta)} \frac{df^0}{dx} \hat{v}_y + \hat{f} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\beta = U_0 = 0.412.$$

Напомним, что безразмерные величины с нижним индексом «0» характеризуют состояние непосредственно за лидирующей ударной волной.

Уравнения (41) с граничными условиями (47) служат для определения поведения возмущений в области  $x > 0$ . Обратим внимание, что соотношения (47) — это система четырех линейных однородных уравнений, связывающая пять перечисленных выше величин, и для полного описания возмущений недостает одного граничного условия. Физически это связано с тем, что в области за головной ударной волной пять величин,  $\delta\rho, \delta v_x, \delta v_y, \delta\varepsilon, \delta f$ , в общем случае могут быть представлены в виде пяти волн, четыре из которых уходят от ударной волны, а одна приходит из бесконечности сзади. Граничные условия — это условия отражения этой волны, определяющие четыре уходящие волны. Этот вопрос обсуждается ниже.

Аналогично [19–21] введем в рассмотрение сопряженную (41) динамическую систему

$$\mathbf{z}' = -\mathbf{z} \mathbf{C}. \tag{48}$$

Известно, что решения систем уравнений (41), (48) обладают следующим свойством:

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z})' = 0, \tag{49}$$

что устанавливается непосредственной проверкой. Здесь  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^5$ .

С помощью решений уравнений (41) и (49) получим условие отсутствия приходящих из  $x = \infty$  акустических возмущений.

Асимптотическая система (41) при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\tilde{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}_\infty \tilde{\mathbf{y}}, \tag{50}$$

где

$$\mathbf{C}_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{C}$$

— матрица с постоянными коэффициентами при  $k$  и  $\omega$ :

$$C_\infty = \begin{pmatrix} 0.758 + 0.00198 i\omega & 0.198 i\omega & 0.198 ik & 0.200 - 0.200 i\omega & 9.98 - 4.99 i\omega \\ -0.758 + 0.998 i\omega & -0.198 i\omega & -1.20 ik & -0.200 + 0.200 i\omega & -9.98 + 4.99 i\omega \\ -5.04 ik & 0 & i\omega & -1.01 ik & -25.2 ik \\ 0.758 - 0.998 i\omega & 0.198 i\omega & 0.198 ik & 0.200 + 0.800 i\omega & 9.98 - 4.99 i\omega \\ -0.152 & 0 & 0 & -0.04 & -2.0 + i\omega \end{pmatrix}.$$

Было использовано, что  $\rho_2, p_2, v_{x2} = 1, \varepsilon_2 = f_2^{-1} = 5, V_1 = 5, p_1 = 1/4.83, \partial f_e/\partial \rho = 0.045, \partial f_e/\partial p = -0.2.$

При заданных  $k$  и  $\omega$ , уравнение (50) имеет решение

$$\tilde{y}_i = c_i \mathbf{r}_i \exp \mu_i x, \quad i = 1, \dots, 5,$$

где  $\mu_i$  — собственные значения матрицы  $C_\infty$ ,  $\mathbf{r}_i$  — отвечающие им правые собственные векторы, а  $c_i$  — произвольные постоянные. Пусть волне, приходящей из бесконечности сзади, соответствуют индекс «5», собственное значение предельной матрицы  $\mu_5$ , правый собственный вектор  $\mathbf{r}_5$  и левый собственный вектор (вектор-строка)  $\mathbf{l}_5$ . Условием отсутствия приходящей волны является  $c_5 = 0$ .

Система (48) при  $x \rightarrow \infty$  имеет решения вида

$$\tilde{z}_i = c_{zi} \mathbf{l}_i \exp(-\mu_i x), \quad i = 1, \dots, 5,$$

где  $\mathbf{l}_i$  — левые собственные векторы (векторы-строки) матрицы  $C_\infty$ , а  $c_{zi}$  — произвольные постоянные.

Запишем решение системы (41) в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^5 c_i \mathbf{F}_i(x), \tag{51}$$

где

$$\mathbf{F}_i(x) \rightarrow \mathbf{r}_i \exp \mu_i x \tag{52}$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим решение системы (48)

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}_5(x),$$

такое, что

$$\mathbf{G}_5(x) \rightarrow \mathbf{l}_5 \exp(-\mu_5 x) \tag{53}$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Поскольку левый собственный вектор  $\mathbf{l}_5$  ортогонален правым собственным векторам  $\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, 4$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{G}_5(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{F}_i(x) \right) = \\ & = \left( \mathbf{l}_5 \exp(-\mu_5 x), \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{r}_i \exp(\mu_i x) \right) = \\ & = \sum_{i=1}^4 c_i (\mathbf{l}_5, \mathbf{r}_i) \exp((\mu_i - \mu_5)x) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{54}$$

Тогда из соотношений (49), (51), (53) и (54) следует (см., например, [22]), что

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_5(x), \mathbf{y}(x)) &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{G}_5(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) \right) = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{G}_5(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^5 c_i \mathbf{F}_i(x) \right) = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{G}_5(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{F}_i(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} c_5 \mathbf{F}_5(x) \right) = \\ &= (\mathbf{l}_5 \exp(-\mu_5 x), c_5 \mathbf{r}_5 \exp(\mu_5 x)) = c_5 (\mathbf{l}_5, \mathbf{r}_5). \end{aligned} \tag{55}$$

Скалярное произведение левого и правого собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, отлично от нуля, поэтому условие отсутствия приходящих возмущений

$$c_5 = 0 \tag{56}$$

можно переписать в виде

$$(\mathbf{G}_5(x), \mathbf{y}(x)) = 0. \tag{57}$$

При этом в силу (49) равенство (57) верно для всех  $x \geq 0$ . Запишем уравнение (57) при  $x = 0$ :

$$(\mathbf{G}_5(0), \mathbf{y}(0)) = 0. \tag{58}$$

Уравнение (58) является недостающим граничным условием при  $x = 0$ , о котором говорилось выше. Выполнение этого уравнения является необходимым и достаточным условием того, что отсутствует акустическое возмущение, приходящее к структуре сзади.

Граничные условия (47) вместе с уравнением (58) представляют собой однородную систему линейных уравнений с матрицей  $\mathbf{H}$  относительно пяти величин,  $\hat{\rho}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{\varepsilon}, \hat{f}$ , при  $x = 0$ . Коэффициенты

матрицы  $\mathbf{H}$  равны коэффициентам при этих неизвестных в уравнениях (47) и уравнении (58). Эта однородная система имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю:

$$\det \mathbf{H} = 0. \tag{59}$$

Условие (59) обеспечивает выполнение граничных условий на лидирующей ударной волне и отсутствии приходящих из бесконечности возмущений. Оно является уравнением относительно  $\omega$  при заданном  $k$ .

Задача исследования базового решения на устойчивость состоит в том, чтобы найти такие  $\eta = -i\omega$  и  $k$ , при которых  $\det \mathbf{H} = 0$  и  $\text{Re } \eta > 0$ , или показать, что таких значений  $\eta$  и  $k$  не существует.

Другими словами, задача поиска неустойчивого дискретного спектра оператора (41) (собственных значений, расположенных в правой полуплоскости  $\Omega^+$  спектрального параметра  $\eta$ ) сводится к определению нулей  $\det \mathbf{H}(\eta, k)$ , лежащих в полуплоскости  $\Omega^+$  при действительных  $k$ . При заданном  $k$  количество нулей  $\det \mathbf{H}(\eta, k)$ , находящихся внутри замкнутого контура на плоскости  $\eta$ , может быть подсчитано при помощи принципа аргумента и определяется суммарным количеством оборотов образа  $\det \mathbf{H}(\eta, k)$  выбранного замкнутого контура вокруг нуля.

### 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТРУКТУРЫ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для того чтобы определить функцию  $\det \mathbf{H}(\eta, k)$ , необходимо найти значения функции  $\mathbf{G}_5(0)$ . Для этого при заданных значениях  $\eta$  и  $k$  численно решается задача Коши для системы уравнений (48) с условием, что

$$\mathbf{G}_5(x_r) = \mathbf{I}_5.$$

Значение  $x_r$  выбирается достаточно большим, так чтобы параметры основного течения мало изменялись при  $x > x_r$ , и компоненты столбца  $\mathbf{G}_5(0)$  вычислялись с достаточной точностью. Точность расчета по отношению к величине  $x_r$  проверялась сравнением результатов, полученных в случаях, когда граничное условие задавалось при  $x = x_r$  и  $x = 2x_r$ .

Численное решение системы уравнений (48) выполняется интегрированием назад от  $x = x_r$  до  $x = 0$  методом Рунге – Кутты второго порядка с постоянным шагом интегрирования. Точность решения проверялась сравнением результатов, полученных с шагом интегрирования, различающимся в два раза.

Для приходящей звуковой волны при значениях  $\eta$ , расположенных в правой полуплоскости или на

мнимой оси, собственное значение  $\mu_5$  имеет положительную действительную часть и решение  $\mathbf{G}_5(x)$  на начальном этапе интегрирования назад вследствие (53) растет экспоненциально. Чтобы уменьшить вычислительные сложности, связанные с быстрым ростом решения, в [19] предлагается искать решение в виде

$$\mathbf{G}_5(x) = \bar{\mathbf{G}}_5(x) \exp(-\mu_5 x),$$

где функция  $\bar{\mathbf{G}}_5(x)$  удовлетворяет условию

$$\bar{\mathbf{G}}_5(x_r) = \mathbf{I}_5 \tag{60}$$

и является решением системы

$$\frac{d\bar{\mathbf{G}}_5(x)}{dx} = -\bar{\mathbf{G}}_5(x) (\mathbf{C} - \mu_5 \mathbf{I}). \tag{61}$$

Здесь  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Матрица  $(\mathbf{C} - \mu_5 \mathbf{I})$  в пределе при  $x \rightarrow \infty$  имеет собственный левый вектор  $\mathbf{l}_5$ , которому соответствует собственное значение 0, поэтому функция  $\bar{\mathbf{G}}_5(x)$  изменяется значительно медленнее, чем  $\mathbf{G}_5(x)$ .

Аналогично введем новую функцию  $\bar{\mathbf{y}}(x)$ , такую что  $\mathbf{y}(x) = \bar{\mathbf{y}}(x) \exp(\mu_5 x)$ . Эта функция совпадает с  $\mathbf{y}(x)$  при  $x = 0$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}(x)}{dx} = (\mathbf{C} - \mu_5 \mathbf{I}) \bar{\mathbf{y}}(x). \tag{62}$$

При этом в силу выполнения соотношений

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_5(0), \mathbf{y}(0)) &= (\bar{\mathbf{G}}_5(0), \bar{\mathbf{y}}(0)), \\ \mathbf{G}_5(0) &= \bar{\mathbf{G}}_5(0), \quad \mathbf{y}(0) = \bar{\mathbf{y}}(0) \end{aligned} \tag{63}$$

коэффициенты матрицы  $\mathbf{H}$  не изменяются.

Левый собственный вектор  $\mathbf{l}_5$ , который используется при постановке условия (60), определен с точностью до комплексной константы. Компоненты вектора-строки  $\bar{\mathbf{G}}_5(0)$  непрерывно зависят от  $\eta$ , если выбирать его так, чтобы одна из компонент вектора-строки  $\bar{\mathbf{G}}_5(0)$  оставалась постоянной. В приведенных ниже расчетах четвертая компонента этого вектора-строки выбиралась постоянной и равной 1 (выбор компоненты не имеет принципиального значения). Для вектора-строки  $\bar{\mathbf{G}}_5(0)$ , у которого четвертая компонента равна 1, введем обозначение  $\hat{\mathbf{G}}_5(0)$ . Очевидно, что

$$\hat{\mathbf{G}}_5(0) = \bar{\mathbf{G}}_5(0) / \bar{G}_5^4(0).$$

Алгоритм вычисления  $\det \mathbf{H}(\eta, k)$  включает в себя следующие шаги.

Для заданных значений  $k$  и  $\eta$  определим  $\mu_5$  (собственное значение матрицы  $\mathbf{C}_\infty$ ), соответствующее приходящей звуковой волне, и левый собственный вектор  $\mathbf{l}_5$ , отвечающий этому собственному значению и имеющий четвертую компоненту, равную 1.

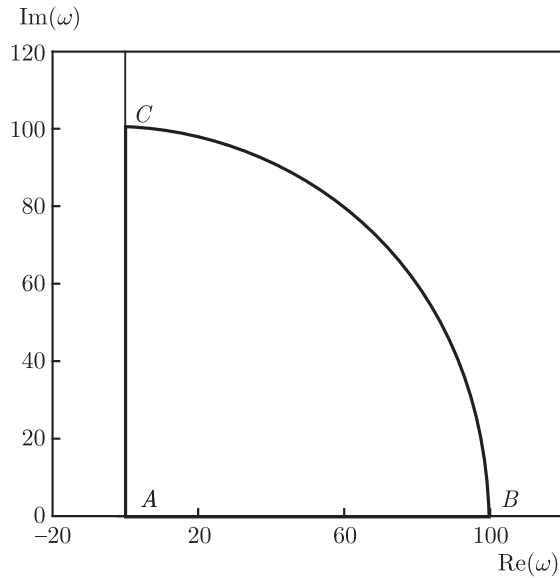


Рис. 4. Контур на плоскости  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$

Решим задачу Коши при заданном значении  $\bar{\mathbf{G}}_5(x_r) = \mathbf{1}_5$  для системы дифференциальных уравнений (61) и определим компоненты вектора  $\bar{\mathbf{G}}_5(0)$ .

Найдем компоненты вектора  $\hat{\mathbf{G}}_5(0)$ .

При заданных значениях  $k, \eta$  и найденном  $\hat{\mathbf{G}}_5(0)$  вычислим матрицу  $\mathbf{H}(\eta, k)$  и найдем ее детерминант.

Введем обозначения

$$D_h(\eta, k) = \det \mathbf{H}(\eta, k),$$

если определитель найден с помощью вектора  $\hat{\mathbf{G}}_5(0)$ .

На рис. 4 представлен замкнутый контур  $ABC$  на плоскости  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$ , который является границей сектора с радиусом 100. Сектор, симметричный изображенному относительно оси  $\text{Im}(\omega)$ , можно не рассматривать ввиду очевидной симметрии задачи относительно замены  $y$  на  $-y$ .

$|D_h|$  сильно изменяется при действительных  $\omega$  в пределах  $0 < \omega < 100$ . Вследствие этого детали образа контура  $ABC$  значительно различаются по масштабу. Чтобы убедиться, что образ контура  $ABC$  не охватывает начало координат, необходимо либо изобразить детали этого контура на разных графиках в разных масштабах, либо использовать способ, предложенный в работе [19]. Этот способ состоит в том, чтобы построить график не для функции  $D_h$ , а функции  $D_h/|D_h|^a$ , где показатель степени  $a$  выбирается в зависимости от характера изменения функции  $D_h$  на контуре. Очевидно, что образ контура  $ABC$ , полученный с помощью функции  $D_h/|D_h|^a$ , охватывает начало координат в том

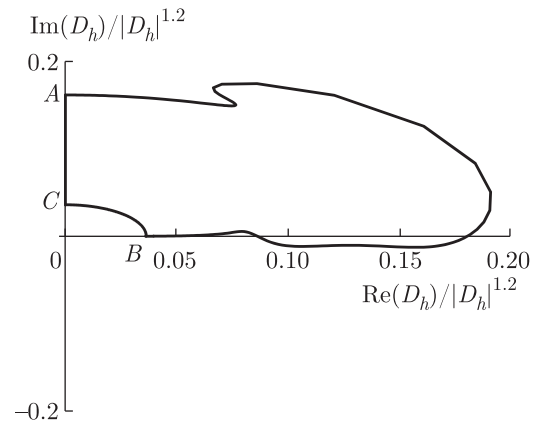


Рис. 5. Образ  $D_h(\omega, k)$  границы сектора, показанного на рис. 4. Расчет выполнен при  $\lambda = 1$  и  $k = 0.0512$

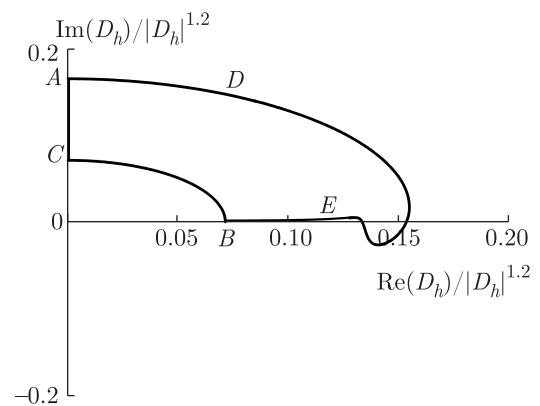


Рис. 6. Образ  $D_h(\omega, k)$  границы сектора, показанного на рис. 4. Расчет выполнен при  $\lambda = 1$  и  $k = 1.54$

и только в том случае, если это справедливо для образа, полученного с помощью функции  $D_h$ .

Результаты расчетов приведены на рис. 5, 6 и 7 соответственно для значений  $k = 0.0512, k = 1.54, k = 5.12$ . Последнее из трех значений  $k$  в 100 раз больше первого. На всех этих рисунках видно, что образ контура  $ABC$  не охватывает начало координат, поэтому функция  $D_h(\omega)$  не обращается в нуль для значений  $\omega$ , соответствующих точкам, которые принадлежат сектору  $ABC$ . Отметим, что на рис. 7 представлен график самой функции  $D_h(\omega)$ .

Контур на рис. 5, 6 и 7 имеют участок в виде зигзага. Зигзаг между точками  $D$  и  $E$  на рис. 6 соответствует изменению действительного значения  $\omega$  от 1.5 до 6. На рис. 8 показаны графики функций  $\text{Re}(k_x)$  и  $\text{Im}(k_x)$  в зависимости от действительного значения  $\omega$  при  $\text{Im}(\omega) = 0$ . Здесь  $k_x = -i\mu_5$  — волновое число, соответствующее приходящей звуковой волне при  $x \rightarrow \infty$ . На рис. 8 видно, что  $\text{Im}(k_x)$  ис-

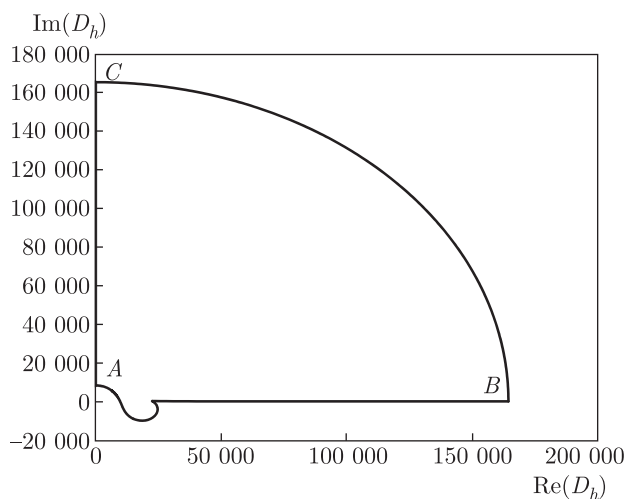


Рис. 7. Образ  $D_h(\omega, k)$  границы сектора, показанного на рис. 4. Расчет выполнен при  $\lambda = 1$  и  $k = 5.12$

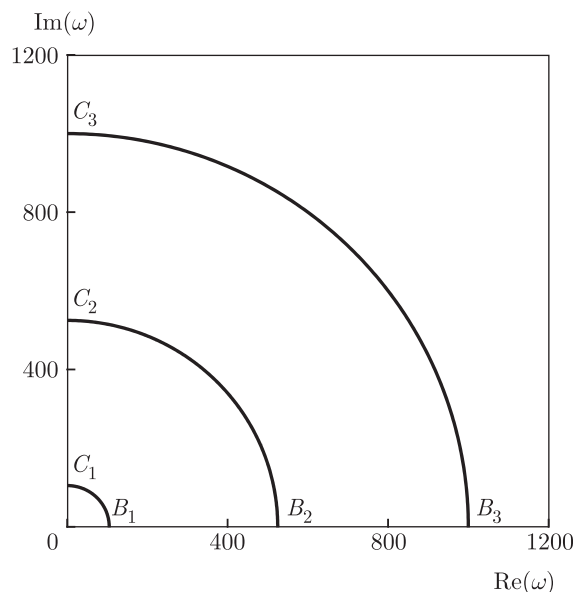


Рис. 9. Контуры на плоскости  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$

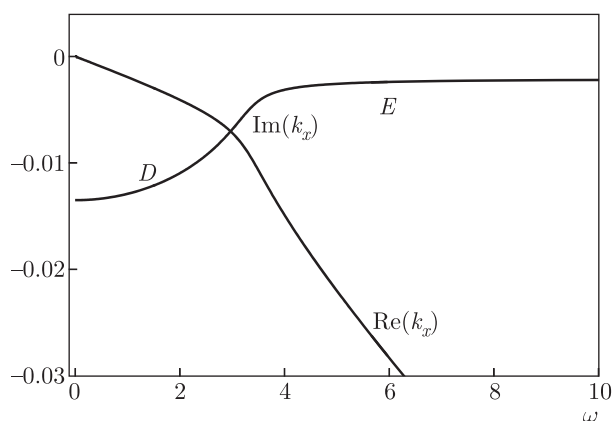


Рис. 8.  $\text{Re}(k_x)$  и  $\text{Im}(k_x)$  при действительных значениях  $\omega$ . Расчет выполнен при  $\lambda = 1$  и  $k = 1.54$

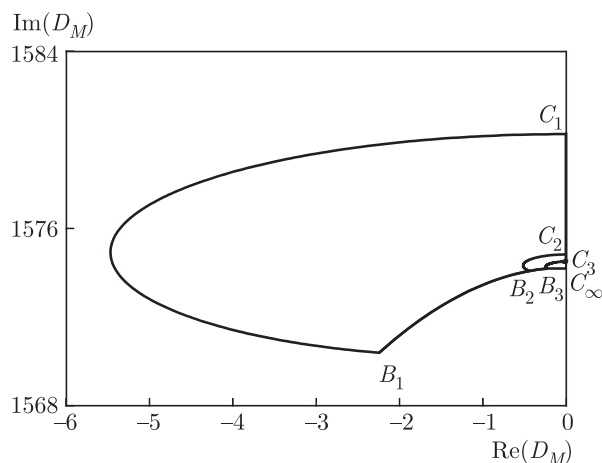


Рис. 10. Образы границы контуров, показанных на рис. 9. Расчет выполнен при  $\lambda = 1$  и  $k = 5.12$

пытывает между точками  $D$  и  $E$  наиболее сильное изменение и приближается в точке  $E$  к асимптотическому значению. Кроме того, левее точки  $D$  и правее точки  $E$  наклон графика функции  $\text{Re}(k_x)$  близок к постоянным, но разным значениям. Очевидно, что вместе с  $k_x$  при  $1.5 < \omega < 6$  происходит столь же сильное изменение  $I_5$ , что приводит к изменению компонент вектора-столбца  $\vec{G}_5(0)$  и  $D_h$ .

Как показано выше, функция  $D_h(\omega, k)$  не обращается в нуль при  $|\omega| \leq 100, \text{Re}(\omega) \geq 0$  и  $\text{Im}(\omega) \geq 0$ . Покажем теперь, что функция  $D_h$  не обращается в нуль при  $|\omega| > 100, \text{Re}(\omega) \geq 0$  и  $\text{Im}(\omega) \geq 0$ , т. е. в первом квадранте вне сектора  $ABC$  на рис. 4. Введем вспомогательную функцию

$$D_M(\omega, k) = \frac{i D_h(\omega, k)}{\omega}$$

Поскольку параметр  $\omega$  также не обращается в нуль вне сектора  $ABC$ , нули функции  $D_M(\omega, k)$  и  $D_h(\omega, k)$  совпадают.

Расчеты показывают, что функция  $D_M(\omega, k)$  имеет предел  $i D_\infty(k)$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Этот предел зависит от  $k$ , и  $D_\infty(k)$  является положительной действительной функцией. На рис. 9 показаны контуры с дугами  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  радиусом  $|\omega|$ , равным соответственно 104, 524 и 1000. Образы этих линий, построенные с использованием функции  $D_M(\omega, k)$ , приведены на рис. 10. На рис. 10 видно, что при  $|\omega| \rightarrow \infty$  образ дуги стягивается в точку  $C_\infty$  и при этом контур  $B_1C_1C_\infty$  не охватывает начала координат.

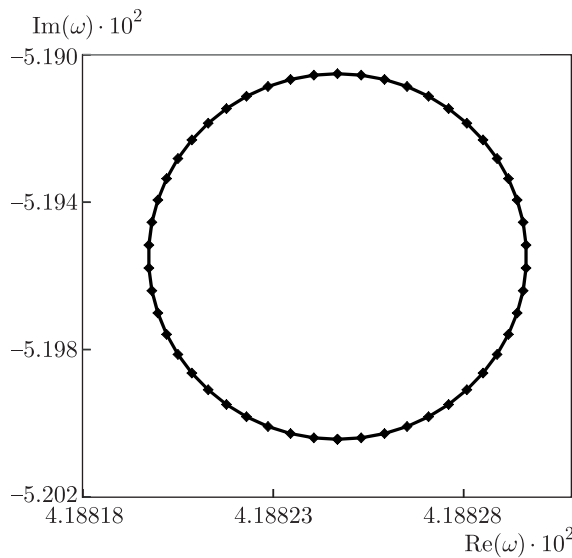


Рис. 11. Контур на плоскости  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$ ;  $k = 0.0254$

Расчеты, выполненные в широком диапазоне изменения  $\omega$  и  $k$ , показали отсутствие нулей функции  $D_h(\omega, k)$  при  $\text{Im}(\omega) \geq 0$ . Однако эти нули существуют при  $\text{Im}(\omega) < 0$  для всех рассмотренных значений  $k$ .

Приближенное значение  $\omega$ , при котором функция  $D_h(\omega)$  имеет нулевое значение, определялось путем половинного деления. В третьем квадранте строился прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Прямоугольник был достаточно большим, и его образ, полученный с помощью функции  $D_h(\omega)$ , охватывал начало координат. Первая стадия дальнейшей процедуры уточнения положения корня заключалась в построении таких вложенных друг в друга прямоугольников, что образ каждого прямоугольника содержал начало координат. Когда размер каждой стороны прямоугольника становился достаточно мал, для последующих приближений использовался контур в виде окружности. Образ окружности малого радиуса был также близок к окружности, и координаты двух последовательных положений центров окружности и ее образа использовались для получения нового значения центра окружности на плоскости, соответствующей комплексным значениями  $\omega$ .

Пример приближенного определения значения  $\omega$ , при котором функция  $D_h(\omega)$  имеет нулевое значение, приведен на рис. 11 и 12. На рис. 11 представлена окружность на плоскости  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$ . На рис. 12 показан образ этой окружности, внутри которого находится начало координат. Расчеты выполнены с шагом интегрирования, уменьшающимся

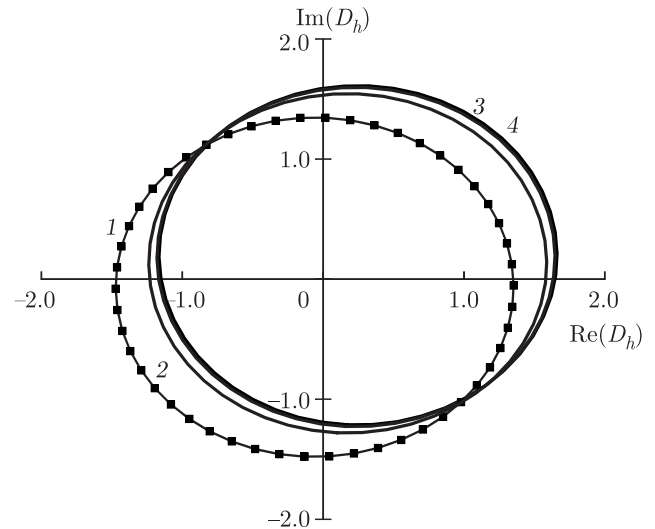


Рис. 12. Образ окружности, показанной на рис. 11;  $k = 0.0254$ ,  $x_r = 15.6$ : 1 — 1200 шагов, 2 — 2400, 3 — 4800, 4 — 9600

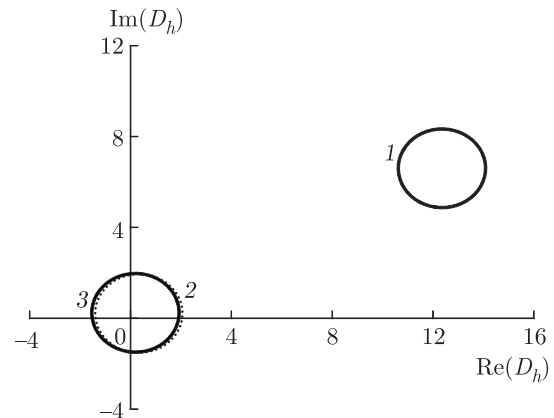


Рис. 13. Образ окружности, показанной на рис. 11;  $k = 0.0254$ , шаг интегрирования  $\Delta x = 0.003255$ : 1 —  $x_r = 7.81$ , 2 —  $x_r = 15.62$ , 3 —  $x_r = 31.24$

в два раза от линии 1 до линии 4. Линии 3 и 4 находятся близко на графике, поэтому точность расчета с шагом, соответствующим линии 3, можно считать достаточной. При построении линии 3 использовалось 4800 шагов интегрирования.

Как видно на рис. 11, радиус контура выбирался таким маленьким, чтобы обеспечить определение как действительной, так и мнимой частей  $\omega$  до третьей значащей цифры.

На точность расчета, как было отмечено выше, влияет значение параметра  $x_r$ . С этого значения пространственной координаты начинается интегрирование уравнения (61) назад. Предполагает-

Таблица

$k$	$\text{Re}(\omega)/k,$	$\text{Im}(\omega)/k^2$
0.001	1.65	-0.800
0.003	1.65	-0.800
0.01	1.65	-0.800
0.0254	1.65	-0.805
0.1	1.65	-0.833
0.15	1.65	-0.838

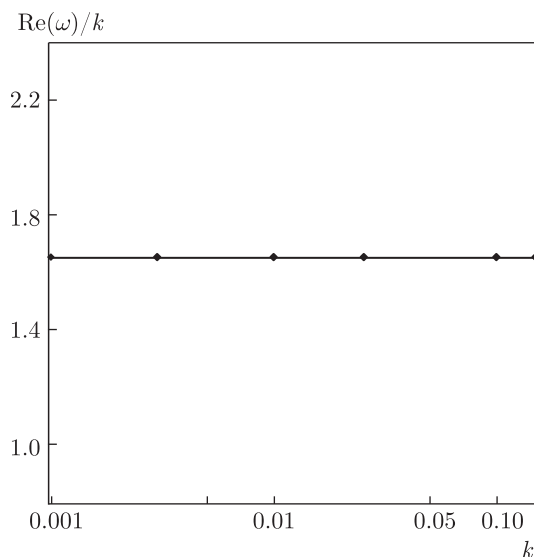


Рис. 14. Зависимость  $\text{Re}(\omega)/k$  от  $k$  при условии, что  $D_h(\omega) = 0$

ся, что асимптотика (50) обеспечивает необходимую точность расчета при этом значении координаты. На рис. 13 показаны результаты расчета при значениях  $x_r$ , различающихся в два раза при постоянном шаге интегрирования, таком же, как для линии 3 на рис. 12. Линии 2 и 3 показывают хорошее согласие результатов, полученных при  $x_r = 15.6$  и  $x_r = 31.2$ .

Подобная процедура оценки точности расчета как по шагу интегрирования, так и по величине  $x_r$  выполнялась при проведении всех расчетов. Значение  $x_r = 15.6$  обеспечивало хорошую точность при всех использованных значениях  $\omega$ , а необходимое количество шагов возрастало с увеличением  $|\omega|$  и при  $|\omega| = 1000$  составляло 372000.

В таблице приведены найденные значения  $\omega$ , при которых  $D_h(\omega) = 0$ .

Приведенные в таблице данные показывают, что  $\text{Re}(\omega)/k$  и  $\text{Im}(\omega)/k^2$  слабо зависят от  $k$  на рассмат-

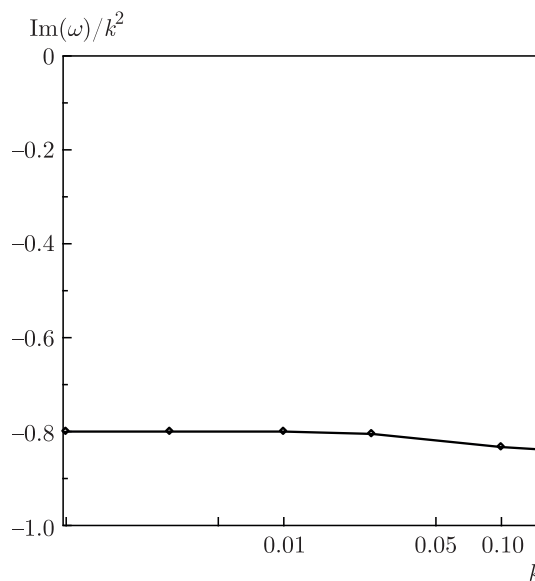


Рис. 15. Зависимость  $\text{Im}(\omega)/k^2$  от  $k$  при условии, что  $D_h(\omega) = 0$

риваемом интервале (см. рис. 14 и 15). В той области значений  $k$ , в которой можно считать значения  $\text{Re}(\omega)/k = W$  и  $\text{Im}(\omega/k^2) = -b$  постоянными имеет место равенство

$$\omega = Wk - ibk^2. \tag{64}$$

Этому равенству соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + W \frac{\partial \xi}{\partial y} = b \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}. \tag{65}$$

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено решение задачи о структуре спонтанно излучающей ударной волны (СИУВ) в газе, и в линейном приближении доказана устойчивость этой структуры. Результаты относятся к конкретной ударной волне и конкретной модели ее структуры. Однако эти результаты показывают, что аргументы против существования СИУВ, высказанные в работе [7] и сомнения в отсутствии спонтанного излучения, которые могут породить численные эксперименты [9–11], несправедливы. Авторы данной работы считают, что нет оснований подвергать сомнению выводы исходных классических работ [1–3], касающиеся СИУВ, и нет оснований сомневаться в осуществимости нелинейных решений, представлен-

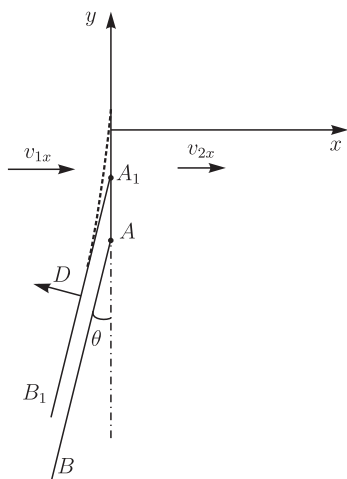


Рис. 16. Движение возмущений по ударной волне

ных в работе [6]. Важно также отметить асимптотическую устойчивость структуры СИУВ в рассмотренном в работе конкретном случае. Конечно, вывод об устойчивости структуры относится к конкретному случаю и зависит от модели структуры, но есть некоторые основания думать, что если структура связана с диссипативными процессами, то она окажется устойчивой.

Прокомментируем зависимость (64), полученную из дисперсионного соотношения (59). Отношение  $\omega/(v_1 k_y)$  зависит от значений величины  $k = k_y \delta$  ( $\delta$  — эффективная ширина структуры). Как следует из таблицы, если  $k \ll 1$ , т. е.  $l/\delta \gg 1$  ( $l$  — длина волны возмущения в направлении  $y$ ), то пренебрегая членами  $k^2$  и членами с более высокими степенями  $k_y$ , получим линейную зависимость  $\omega$  от  $k_y$ , такую же, как при рассмотрении разрыва без учета его структуры. Это ожидаемый результат, поскольку в этом приближении течение в окрестности каждой точки возмущенной структуры происходит, как в стационарной структуре плоской ударной волны с выполнением законов сохранения. Следующий член разложения  $\omega$  по  $k$  учитывает кривизну структуры и нестационарность течения в ней. Как показано в данной работе, наличие структуры разрыва приводит к появлению в дисперсионном уравнении диссипативного члена, пропорционального  $k^2$ , поэтому возмущение формы достаточно длинной волны, бегущей по СИУВ в положительном (или отрицательном при смене знака  $W$ ) направлении  $y$  описывается уравнением (65).

И, наконец, представим, каким образом передаются возмущения по СИУВ. Пусть рассматривается

устойчивость некоторой неподвижной ударной волны, фронт которой перпендикулярен скорости набегающего потока. На рис. 16 изображена неподвижная СИУВ, расположенная на оси  $y$  выше точки  $A$ . Пусть возмущение, задаваемое начальными условиями, таково, что часть ударной волны, оставаясь плоской, слегка (на малый угол  $\theta$ ) изменила свое направление (прямая  $AB$  на рис. 16). Это приводит к изменению ее скорости. Точка пересечения возмущенной и невозмущенной ударных волн будет двигаться по невозмущенной ударной волне с некоторой скоростью  $W$ . Если выполнено условие (4), т. е.  $W > \sqrt{c^2 - v^2}$  ( $c$  и  $v$  — скорость звука и нормальная скорость газа за ударной волной), то это означает, что ударная волна — спонтанно излучающая. Очевидно, что скорость точки пересечения двух близких по направлениям ударных волн определяется производной  $\partial D/\partial \theta$ , где  $D$  — скорость ударной волны. Для выполнения упомянутого условия (4) производная  $\partial D/\partial \theta$  должна быть достаточно большой. В рамках линейного приближения скорость  $W$  не зависит от значения  $\theta$ , поэтому линейные возмущения любой формы распространяются по ударной волне без искажений. Если в уравнении (65) учесть член со второй производной в правой части, то тупой угол между возмущенной и невозмущенной ударными волнами будет сглажен, что изображено на рис. 16 штриховой линией. Представляя решение уравнения (65) в форме интеграла Фурье по  $k_y$ , имея в виду, что каждому значению  $k_y$  соответствует некоторая система волн, излучаемых в область за ударной волной, можно получить в явном виде бегущую по ударной волне волну возмущения ее формы с произвольной начальной зависимостью от  $y$  и соответствующую систему уходящих от ударной волны малых возмущений. Сама ударная волна при этом служит проводником возмущений (волноводом), который снабжается извне энергией протекающего сквозь нее газа.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-00180).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Дьяков, ЖЭТФ **27**, 288 (1954).
2. В. М. Конторович, Акуст. ж. **5**, 314 (1959).



3. С. В. Иорданский, Прикл. Мат. Мех. **33**, 456 (1957).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Гидромеханика*, Наука, Москва (1986).
5. В. Е. Фортов, *Мощные ударные волны на земле и в космосе*, Физматлит, Москва (2018).
6. С. А. Егорушкин, Изв. Акад. наук СССР, Механ. Жидк. Газа (1983).
7. Н. М. Кузнецов, УФН **159**, 493 (1989).
8. Н. М. Кузнецов ЖЭТФ **90**, 744 (1986).
9. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов и др., Письма в ЖЭТФ **90**, 28 (2009).
10. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов и др., ЖЭТФ **125**, 927 (2004).
11. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов и др., Тр. Междунар. конф. IX Забабахинские научные чтения (2007), с. 1.
12. J. W. Bates and D. C. Montgomery, Phys. Rev. Lett. **84**, 1180 (2000).
13. J. W. Bates, Phys. Rev. Lett. E **91**, 013014 (2015).
14. V. M. Fomin and V. I. Yakovlev, Shock Waves **29**, 365 (2019); (<https://doi.org/10.1007/s00193-018-0856-7>).
15. А. П. Лихачев, ТВТ **50**, 544 (2012).
16. А. Г. Куликовский, ДАН **481**, 494 (2018).
17. А. Г. Куликовский, А. Т. Ильичев, А. П. Чугайнова и др., ДАН **487**, 27 (2019).
18. Г. Г. Черный, *Газовая динамика*, Наука, Москва (1988).
19. R. L. Pego, P. Smereka, and M. I. Weinstein, Physica D **67**, 45 (1993).
20. K. Zumbrun, in: *Shocks, Singularities and Oscillations in Nonlinear Optics and Fluid Mechanics* ed. by F. Colombini, D. Del Santo, and D. Lannes, Springer INdAM Series, Vol. **17**. Springer, Cham. (2017).
21. J. Humpherys and K. Zumbrun, Quarterly Appl. Math. **70**, 685 (2012).
22. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, изд. 2-е, Физматлит, Москва (2012).