

# СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОСТОЯННОГО ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА НА ФОРМУ ИМПУЛЬСА ПОЛЯ БЕЗ ОГИБАЮЩЕЙ

*А. А. Заболотский\**

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
690090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 15 апреля 2020 г.,  
после переработки 21 апреля 2020 г.  
Принята к публикации 22 апреля 2020 г.

Предложена интегрируемая модель двухуровневой среды с постоянным дипольным моментом, описывающая эволюцию импульсов электромагнитного поля без огибающей с учетом диполь-дипольного взаимодействия. В приближении ближайших соседей это взаимодействие учитывается в виде квадратичной дисперсии. Найдено, что такое обобщение редуцированных уравнений Максвелла–Блоха сохраняет полную интегрируемость. На примерах полученных точных солитонных решений показано, что совместное влияние квадратичной дисперсии и постоянного дипольного момента обладает рядом уникальных особенностей и дает новые возможности контроля формы импульсов поля. В частности, обнаружено, что форма и амплитуда импульса поля зависят как от знаков диполь-дипольного взаимодействия, так и знака постоянного дипольного момента.

DOI: 10.31857/S0044451020100028

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления, связанные с эволюцией ультракоротких импульсов света в средах, содержащих резонансные атомы или молекулы, исследуются в рамках уравнений Максвелла–Блоха длительное время, см., например, [1–7]. Особенности имеют полностью интегрируемые модели [7], в рамках которых можно найти многосолитонные и другие решения, исследовать взаимодействие импульсов поля. Для описания солитонной динамики были найдены различные системы волновых и материальных уравнений, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния [7], в том числе модели нелинейной оптики и акустики [5, 8–19]. Интерес к импульсам полей без огибающей стимулировал нахождение и изучение интегрируемых редуцированных уравнений Максвелла–Блоха (РУМБ), описывающих явление самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде (ДУС) для однокомпонентного [1, 5, 6, 8–10, 20–22] и двухкомпонентного полей

[10–13] вне рамок приближения медленно меняющейся огибающей.

Применимость двухуровневой модели к таким импульсам требует, чтобы резонансная частота была хорошо отделена от других частот [23–25]. Для квазимонохроматических импульсов это условие, как правило, выполняется. Для импульсов с длительностью порядка обратной частоты условие применимости таких моделей становится менее реалистичным. Однако это можно частично компенсировать ситуацией, когда дипольный момент, соответствующий энергетическому переходу, больше, чем у ближайших переходов [26].

Для несимметричных молекул и квантовых точек и сплошных сред без зеркальной симметрии характерно наличие постоянного дипольного момента (ПДМ). В этом случае гамильтониан взаимодействия оптических электронов, вследствие взаимодействия с ядрами молекул, неинвариантен относительно полной группы вращений. Стационарные состояния таких молекул не имеют определенной четности, в результате чего становятся отличными от нуля диагональные элементы оператора дипольного момента. Для низких частот, например, для микро-волн или терагерцевых частот влияние ПДМ может

\* E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

быть существенным. Наличие ПДМ квантового перехода вызывает при распространении импульса динамический штарковский сдвиг частоты перехода, который пропорционален напряженности электрического поля импульса. Влияние ПДМ на распространение импульсов достаточно исследовано в случае (эффективно) двухуровневых сред [23, 24]. Особую роль ПДМ может играть при переносе энергии между асимметричной квантовой точкой и протяженной молекулой, например, молекулой ДНК или белка. Взаимодействие постоянных диполей молекул и квантовой точки приводит к локализации (делокализации) экситонов и усилению (уменьшению) эффективности переноса энергии [27–29]. В протяженных молекулярных средах, таких как молекулы ДНК, белка [30] и молекулярные агрегаты красителей [31, 32], диполь-дипольное взаимодействие играет определяющую роль при формировании экситонных импульсов и переносе энергии. Эволюция возбуждений в молекулярных цепочках может быть описана в приближении, в котором каждая молекула представлена ДУС. В приближении ближайших соседей диполь-дипольное взаимодействие сводится к пространственной дисперсии второго порядка. Для сильного изменения населенностей уровней эта дисперсия носит нелинейный характер. В работе [33] показано, что возможно интегрируемое обобщение уравнений Максвелла – Блоха для ДУС с учетом нелинейной дисперсии.

Для сверхсильного поля, т. е. с энергией  $U_p$ , много большей энергии перехода  $\hbar\omega_{12}$ , и для эффективного однокомпонентного поля соответствующие уравнения Максвелла – Блоха могут быть сведены к модифицированному уравнению синус-Гордона [34] и его обобщениям [17, 18]. Однако, это для таких полей двухуровневое приближение в реальных средах как правило не применимо. Поэтому более реалистичным является приближение  $U_p \lesssim \hbar\omega_{12}$ . Модель, представляющая собой цепочку ДУС с ПДМ и нелинейной квадратичной дисперсией, может применяться для эволюции ультракоротких экситонных возбуждений в длинной молекулярной среде. В цитированных выше работах изучалось влияние ПДМ и нелинейной дисперсии на эволюции импульсов поля. Однако совместное синергетическое действие этих факторов на формирование возбуждений в протяженных системах не исследовалось, тем более в условиях  $U_p \lesssim \hbar\omega_{12}$ . В то же время изучение такого влияния представляется чрезвычайно важным для анализа процессов переноса энергии в виде коротких импульсов в молекулярных цепочках.

В настоящей работе приводится интегрируемое обобщение редуцированных уравнений Максвелла – Блоха для ДУС, которое включает ПДМ и нелинейную квадратичную дисперсию при выполнении ряда стандартных приближений и условия  $U_p \lesssim \hbar\omega_{12}$ . Несмотря на достаточную очевидность такого обобщения, эта система не была нами обнаружена в литературе. Целью работы является получение точных решений и демонстрация с их помощью синергического эффекта, проявляющегося в критическом усилении или подавлении импульса поля вследствие совместного действия диполь-дипольного взаимодействия и эффекта Штарка, вызванного наличием ПДМ в ДУС.

## 2. ВЫВОД МОДЕЛИ

Приведем вывод редуцированных уравнений Максвелла – Блоха для цепочки ДУС с ПДМ и диполь-дипольным взаимодействием. Физическое происхождение и вывод аналогичных уравнений эволюции импульсов без огибающей в ДУС с ПДМ можно найти, например, в работах [1, 8, 16, 20–22], а уравнения Максвелла – Блоха с учетом дисперсии второго порядка – в [18, 33]. Уравнение Максвелла для одномерной однородной протяженной среды и однокомпонентного поля, распространяющегося в ДУС, имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{c^2 \partial t^2} = \frac{4\pi d_x}{c^2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь компонента поляризации среды  $P_x$  имеет вид

$$P_x = -n_m \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \frac{\partial \hat{H}}{\partial E_x} \right\} \quad (2)$$

и  $n_m$  – плотность среды. Считаем, что среда состоит из прямой цепочки двухуровневых атомов с дипольным моментом в точке  $z = ln$ , где  $l$  – расстояние между ними. В плотной среде на поляризацию ДУС в точке  $nl$  оказывают влияние поля диполей всех ДУС в точках  $ml, m \neq n$ . Для упрощения задачи используем приближение ближайших соседей, которое применялось для описания подобных сред, например, белковые молекулы [30] или молекулярные агрегаты красителей [31]. В этом приближении вклад в поляризацию атома, находящегося в точке  $z = nl$ , вносят поляризация в этой точке и поляризации, вызванные дипольными полями ближайших соседей в точках  $(n \pm 1)l$ . Этот подход позволил описать ряд важных экспериментальных фактов,

в частности, эволюцию слабых возбуждений в молекулах ДНК [30, 32]. С учетом полей диполей только ближайших соседей поляризация в правой части уравнения (1), где поле берется в точке  $nl$ , принимает вид

$$P_x \approx P_x^{(n)} + \gamma_{dd} \left( P_x^{(n-1)} + P_x^{(n+1)} \right). \quad (3)$$

Здесь  $P_x^{(n)}$  — поляризация атома в точке  $nl$ ,  $\gamma_{dd}$  — коэффициент диполь-дипольного взаимодействия соседних диполей. В континуальном приближении  $P_x^{(n-1)} + P_x^{(n+1)} \approx 2P_x(z) + l^2 \partial_z^2 P_x(z)$ , где  $P_x^{(n)} \rightarrow P_x(z)$ ,  $nl \rightarrow z$  при  $l \rightarrow 0$ . В итоге из уравнения (3) находим

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 - c^{-2} \partial_t^2) E_x(z, t) = & -4\pi d_x \frac{(1 + 2\gamma_{dd}e)^2}{c^2} \partial_t^2 \times \\ & \times \left[ P_x(z, t) + \frac{2\gamma_{dd}l^2}{1 + 2\gamma_{dd}} \hat{G} \partial_z^2 P_x(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения Блоха имеют вид [3]

$$\partial_t \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (5)$$

со следующим в случае ДУС гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_{12}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} E_x, \quad (6)$$

где  $\hbar\omega_{12}$  — энергия перехода и  $d_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , — элементы дипольной матрицы. Поляризации  $p$  для одной ДУС имеет вид

$$\begin{aligned} p = \text{tr} \hat{\rho} \hat{d} = & \frac{1}{2} (d_{11} + d_{22}) + \\ & + \frac{1}{2} (d_{11} - d_{22}) (\rho_{11} - \rho_{22}) + \rho_{12} d_{21} + \rho_{21} d_{12}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho_{ij}$  — элементы матрицы плотности,  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ ,  $d_{21} = d_{12}^*$ . Динамика ДУС в электрическом поле описывается вращением вектора Блоха  $\mathbf{S}(t, z) = \{S_x, S_y, S_z\} \equiv \{S_1, S_2, S_3\}$  с компонентами

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{\rho_{12} + \rho_{21}}{2}, \quad S_2 = \frac{\rho_{12} - \rho_{21}}{2i}, \\ S_3 = \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Часто плотность активных атомов или молекул в реальной среде достаточно мала, что позволяет, следуя работе [1], ввести малый параметр. Нормализованная плотность ДУС имеет тот же порядок величины, что и производная  $\partial_z + n_d/c\partial_t$  от амплитуды поля. Здесь  $c/n_d$  — фазовая скорость света,

$n_d$  — постоянная диэлектрической восприимчивости среды. Это означает, что [1]

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \approx -\frac{\partial E_x}{c\partial t} \quad (9)$$

с требуемой точностью. Соответственно, вкладом встречной волны можно пренебречь. Получаемая в итоге система уравнений описывает эволюцию и распространение импульсов с групповой скоростью, близкой с скоростью света в среде [1].

Для однокомпонентного поля, используя приближение (9), находим из уравнения (4) и (5) следующую систему РУМБ с ПДМ и нелинейной квадратичной дисперсией:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \tau} = -(\omega - \mu\mathcal{E}) S_2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \tau} = (\omega - \mu\mathcal{E}) S_1 - \mathcal{E} S_3, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial \tau} = \mathcal{E} S_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi} = S_2 + a \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S_2, \quad (13)$$

где  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\omega_0$  — произвольная частота,  $\omega = \omega_{12}/\omega_0$ ,  $\mu = (d_{11} - d_{22})/(2d_{12})$  — приведенный к безразмерному виду постоянный дипольный момент,

$$\mathcal{E} = \frac{2d_x E_x}{\hbar\omega_0}, \quad a = \frac{2\omega_0^2 l^2 \gamma_e}{c^2 (1 + 2\gamma_e)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{c\hbar\omega_0}{4\pi d_x^2 n_m (1 + 2\gamma_e)^2} \left( \frac{c}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \quad (15)$$

При выводе уравнения (13) учитывалось, что поляризация (2) включает как недиагональную пропорциональную  $S_1$ , так и диагональную пропорциональную  $S_3$  части. Вычисляя первые производные по  $t$  от этих частей и используя уравнения (10)–(12), находим, что члены, пропорциональные  $\mathcal{E} S_3$ , сокращаются и в правой части остается только компонента  $S_2$ . Для случая  $a = 0$  аналогичный вывод системы уравнений (10)–(13) впервые приведен в работе [8].

Система (10)–(13) является необходимым условием для коммутативности следующих линейных систем:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Phi = \\ = \begin{bmatrix} -i\lambda & (1-b\lambda)(F-m) \\ -(1+b\lambda)(F-m) & i\lambda \end{bmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\partial_\chi \Phi = \frac{1}{W(\lambda)} \begin{bmatrix} if_1 S_1 + if_3 S_3 & g \left( \sum_{j=1}^3 h_j S_j + a \partial_\tau S_2 \right) \\ \tilde{g} \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{h}_j S_j + a \partial_\tau S_2 \right) & -if_1 S_1 - if_3 S_3 \end{bmatrix} \Phi. \quad (17)$$

Здесь  $b = 2\sqrt{a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f_3 = \lambda(1 + \mu^2)(1 - b^2 \lambda^2), \quad f_1 = \mu f_3, \quad (18)$$

$$h_1 = -g\omega(1 - b^2 \lambda^2), \quad h_3 = -\mu h_1, \quad (19)$$

$$\tilde{h}_1 = -\tilde{g}\omega(1 - b^2 \lambda^2), \quad \tilde{h}_3 = -\mu \tilde{h}_1, \quad (20)$$

$$h_2 = 2ig\lambda(1 + \mu^2 - \omega^2 a), \quad (21)$$

$$\tilde{h}_2 = -2i\tilde{g}\lambda(1 + \mu^2 - \omega^2 a), \quad (22)$$

$$g = \frac{(1 + \mu^2)(1 - b\lambda)}{2\sqrt{1 + \mu^2 - \omega^2 a}}, \quad (23)$$

$$\tilde{g} = -\frac{(1 + \mu^2)(1 + b\lambda)}{2\sqrt{1 + \mu^2 - \omega^2 a}}, \quad (24)$$

$$W(\lambda) = \omega^2 - 4\lambda^2(1 + \mu^2), \quad (25)$$

$$F = \frac{(1 + \mu^2)\mathcal{E}}{2\sqrt{1 + \mu^2 - \omega^2 a}}, \quad (26)$$

$$m = \frac{\omega\mu}{2\sqrt{1 + \mu^2 - \omega^2 a}}. \quad (27)$$

Для  $\omega = 0$  система (10)–(13) приводится к обобщенному уравнению синус-Гордона [34] вида

$$\partial_\tau \partial_\chi U = (1 + \nu \partial_\tau^2) \sin(U). \quad (28)$$

Решения уравнения (28) найдены в работах [34, 35] для разных знаков  $\nu$ . Матсуно [35] преобразовал уравнение (28) к известной простой версии РУМБ. К такому же уравнению приводятся уравнения Шафера – Вейна [36] и некоторые его обобщения. Этим

уравнениям соответствует спектральная проблема (СП) Вадати – Конно – Ичикавы [37], которая отличается от (16) недиагональными членами. Решения этих уравнений были найдены ранее разными способами [37–40].

Система уравнений, также описывающая динамику однокомпонентного поля без огибающей с ПДМ, выведена в работе [18]. Авторы работы [18] применили приближения, позволяющие свести полученную систему уравнений к тем РУМБ, что и в работах Матсуно [35]. Однако этот подход неприменим к системе (10)–(13) без исключения безразмерной частоты  $\omega$ . Поскольку в настоящей работе рассматривается случай  $U_d = dE_x \lesssim \hbar\omega_{12}$ , подход Матсуно неприменим. Поэтому будем находить решение другим способом. Следуя работе [33], преобразуем систему уравнений (16) к СП, которая ранее использовалась при нахождении решений известных моделей, таких как уравнения Ландау – Лифшица, двух- и четырехволнового взаимодействий, см., например, работы [41–43] и ссылки в них. Для этого введем новую переменную  $u$  и функции  $R(u) = F/\sqrt{1 + b^2 F^2}$ ,  $H(u) = 1/\sqrt{1 + b^2 F^2}$  или

$$d\tau = H(u) du, \quad F(u) = \frac{R(u)}{H(u)}, \quad (29)$$

$$H(u) = \sqrt{1 - b^2 R(u)^2}.$$

Тогда СП (16) принимает вид

$$\partial_u \Phi = \begin{bmatrix} -i\lambda H & (1 - b\lambda)(R - mH) \\ -(1 + b\lambda)(R - mH) & i\lambda H \end{bmatrix} \Phi. \quad (30)$$

### 3. СИММЕТРИИ

Из свойств симметрии линейных систем (16), (17) или (17), (30) и, соответственно, матричных функций Йоста  $\Phi$ , приведенных ниже в этом разделе, следует, что каждый полюс  $\lambda_j$  в верхней или нижней комплексной полуплоскости преобразуется в три следующих:  $\{-\lambda_j^*, -\lambda_j, \lambda_j^*\}$ , с помощью преобразований симметрии. Перечислим эти свойства симметрии для матрицы  $L$ . Для второй матрицы  $A$  свойства симметрии те же и мы их не приводим.

I)

$$L^*(\lambda^*) = M_1^\pm L(\lambda)(M_1^\pm)^{-1}. \quad (31)$$

Здесь  $\Phi^*(\lambda^*) = M_1^\pm \Phi(\lambda)$ ,

$$M_1^\pm = \begin{pmatrix} 0 & f_\pm(\lambda) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$f_+(\lambda) = \frac{b_0\lambda - 1}{b_0\lambda + 1}, \quad a > 0, \quad (33)$$

$$f_-(\lambda) = -1, \quad a < 0, \quad (34)$$

$b = b_0 \in \mathbb{R}$ .

II)

$$L^*(-\lambda^*) = M_2^\pm L(\lambda)(M_2^\pm)^{-1}. \quad (35)$$

Здесь  $\Phi^*(-\lambda^*) = M_2^\pm \Phi(\lambda)$ ,

$$M_2^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -f_\pm(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

III)

$$L(-\lambda) = M_3^\pm L(\lambda)(M_3^\pm)^{-1}. \quad (37)$$

Здесь  $\Phi(-\lambda) = M_3^\pm \Phi(\lambda)$ ,

$$M_3^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Функция Йоста с учетом свойств симметрии имеет вид

$$\Psi_j^\pm = \begin{pmatrix} \psi_{j1} & f_\pm(\lambda_j^*)\psi_{j2}^* \\ \psi_{j2} & \psi_{j1}^* \end{pmatrix}. \quad (39)$$

#### 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Используем метод построения солитонных решений преобразованием Дарбу [44–46]. Новое решение  $\Phi[1] = P\Phi[0]$ , отвечающее потенциалу  $L[1]$ , строится

по известному решению  $\Phi[0], L[0], A[0]$  калибровочным преобразованием. Новое решение  $G[1], H[1]$  находится из «нулевого»  $G[0], H[0]$  посредством уравнений

$$L[1]P[1] - \partial_\tau P[1] = P[1]L[0], \quad (40)$$

$$A[1]P[1] - \partial_\chi P[1] = P[1]A[0], \quad (41)$$

где  $L[N], A[N], N = 0, 1$ , — матрицы (30) и (17) с  $G = G[N], H = H[N]$  и  $S_j[N], j = 1, 2, 3$ , соответственно.  $P$  в общем виде для произвольного  $N$  определяется из условия, см. [45, 46],

$$P(\lambda_j, \tau)\Phi(\lambda_j, \tau)q_j = 0, \quad (42)$$

где  $q_j$  — нетривиальный постоянный вектор,  $j = 0, \dots, 2N$ . Условие (42) может быть представлено в виде

$$P(\lambda_j, \tau) \begin{pmatrix} \alpha_j(\tau) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0, \quad (43)$$

где

$$\alpha_j(\tau) = \frac{\phi_2 - \varrho_j \varphi_2}{\phi_1 - \varrho_j \varphi_1}; \quad (44)$$

$\phi = (\phi_1, \phi_2)^T, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  — два решения линейных систем (17), (30);  $\varrho_j$  — произвольная константа.

Свойству симметрии I удовлетворяет следующая форма оператора:

$$P = \sum_{j=0}^N P_j(\lambda) = \begin{pmatrix} p_0 + \sum_{j=1}^N p_j \lambda^j & (1 - b\lambda) \sum_{j=0}^{N-1} s_j \lambda^j \\ -(1 + b\lambda) \sum_{j=0}^{N-1} s_j^* \lambda^j & p_0^* + \sum_{j=1}^N p_j^* \lambda^j \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Из уравнений (43), (44) и выражения (45) находим линейную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^N p_j \lambda_a^j + \beta_a \sum_{j=0}^{N-1} s_j \lambda_a^j = -p_0, \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^N p_j \lambda_a^{j*} + \gamma_a^* \sum_{j=0}^{N-1} s_j \lambda_a^{j*} = -p_0. \quad (47)$$

Здесь

$$\beta_a = \frac{1 - b\lambda_a}{\alpha_a}, \quad \gamma_a = -(1 + b\lambda_a)\alpha_a, \quad (48)$$

$a = 1, \dots, N$ . Используя свойства симметрии I–III, находим

$$\beta_a(\lambda_a) = \frac{1 - b\lambda_a}{\alpha(\lambda)}, \quad (49)$$

$$\beta_a(\lambda_a^*) = -(b^* \lambda_a^* + 1) \alpha^*(\lambda),$$

$$\beta_a(-\lambda_a^*) = \frac{1 - b^* \lambda_a^*}{\alpha^*(\lambda)}, \quad (50)$$

$$\beta_a(-\lambda_a) = -(b\lambda_a + 1) \alpha(\lambda).$$

Таким образом, простейшее невырожденное солитонное решение отвечает  $4N$  полюсам в комплексной плоскости.

Из уравнений (30) и выражения (40), сравнивая коэффициенты перед  $\lambda^{N+1}$ , найдем связь между решением с  $N = 0$  и  $N$ -солитонным решением в матричной форме:

$$L[N] = P_N L[0] P_N^{-1}. \quad (51)$$

Из (51) находим

$$G[N] = \frac{[G[0] (p_N^2 - b^2 s_{N-1}^2) + 2iH[0] p_N s_{N-1}]}{|p_N|^2 - b^2 |s_{N-1}|^2}, \quad (52)$$

$$H[N] = \frac{ib^2G[0] (p_N^*s_{N-1} - p_Ns_{N-1}^*) + H[0] (|p_N|^2 + b^2|s_{N-1}|^2)}{|p_N|^2 - b^2|s_{N-1}|^2}. \tag{53}$$

Здесь  $G[N] = R[N] - mH[N]$  и  $G[0] = R[0] - mH[0]$  отвечает исходному решению  $F(\tau) = R(u)/H(u)$ ,  $d\tau = H(u)du$ .

Зависимость функции  $\alpha_j$  от  $\chi$  находим из второй системы уравнений (17) и соответствующего преобразования Дарбу. Система уравнений (17) обладает такими же свойствами симметрии, как и система (30), и для рассматриваемых в работе простых начально-краевых условий зависимость от  $\chi$  проявляется в виде сдвига  $u \rightarrow u - v_j\chi$ , где  $v_j$  — фазовая скорость.

### 5. РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ

#### 5.1. Солитонные решения

Для асимптотик  $F(\tau) \rightarrow 0$ ,  $S_1 \rightarrow 0$ ,  $S_2 \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  или  $R \rightarrow 0$  для  $u \rightarrow \pm\infty$  матрицы в правых частях уравнений (30) и (17) различаются только общим множителем и одновременно приводятся к диагональному виду. Найдем два решения  $\phi, \varphi$  уравнений (30) и (17) для нулевого фонового решения  $R[0] = 0$ ,  $H[0] = 1$ ,  $S_1[0] = S_2[0] = 0$  и начальных условий  $\phi = (1, 0)^T$ ,  $\varphi = (0, 1)^T$ . Для  $\varrho_j = \sqrt{b\lambda_j - 1}/\sqrt{b\lambda_j + 1}$  находим из (44)

$$\alpha_j = -\varrho_j e^{2(u-v_j\chi)\Omega_j} \equiv e^{2(u-v_j\chi)\Omega_j + g_j + ih_j}. \tag{54}$$

Здесь  $\Omega_j = \sqrt{b^2\lambda_j^2 m^2 - \lambda_j^2 - m^2}$ ,  $g_j, h_j$  — действительные константы и  $v_j$  — скорость солитона. Для  $b = id$ ,  $\lambda_j = i\eta_j$ ,  $d, \eta_j \in \mathbb{R}$  имеем

$$v_j = -\text{sign}(S_3[0]) \frac{(\mu^2 + 1)(1 - d^2\eta_j^2)}{4\eta_j^2(\mu^2 + 1) + \omega^2} \tag{55}$$

и для  $b = d$ ,  $\lambda_j = i\eta_j$ ,  $d, \eta_j \in \mathbb{R}$  —

$$v_j = -\text{sign}(S_3[0]) \frac{(\mu^2 + 1)(d^2\eta_j^2 + 1)}{4\eta_j^2(\mu^2 + 1) + \omega^2}. \tag{56}$$

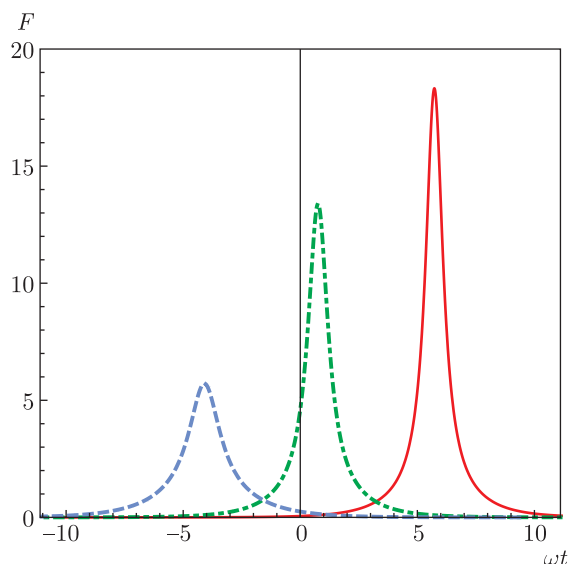
Интегрируя равенство  $\tau(u) - \tau_0 = \int H(u) du$ , находим солитонные решения в виде неявной зависимости  $F = G/H + m$  от  $\tau(u)$ . Ввиду громоздкости эти выражения вынесены в Приложение. Аналитические вычисления формул (52), (53) могут быть выполнены с помощью пакета Mathematica. Графики солитонного решения показаны на рис. 1, 2 для знака  $\text{sign}(a) < 0$  и на рис. 3, 4 для  $\text{sign}(a) > 0$ . Анализ решений выявил критическое изменение зависимости формы импульса от  $b = id$ ,  $d \in \mathbb{R}$  с ростом  $m$  для  $m > 0$ . Совместное действие ПДМ  $\propto \mu$  и диполь-дипольного взаимодействия проявляется в критически

более быстром росте амплитуды импульса, чем в случае отсутствия ПДМ. Для параметров  $\eta_1 \approx 0.5$ ,  $d \approx 0.5$  решение медленно возрастает с ростом  $m$  и для  $m \approx 0.5-1$  становится сингулярным. Амплитуда импульса растет как с ростом  $m$  для  $m > 0$ , так и с ростом  $|d|$ . Для  $m < 0$  с ростом  $|m|$  происходит уменьшение амплитуды импульса, см. рис. 2. Обнаружено, что форма импульса в присутствии диполь-дипольного взаимодействия критически зависит от знака ПДМ. Это связано с эффектом Штарка и с тем, что выведенная вне рамок приближения медленных огибающих система уравнений (10)–(13) не симметрична относительно изменения знака поля  $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$  в отличие от уравнений Максвелла–Блоха ДУС [3] для медленных огибающих.

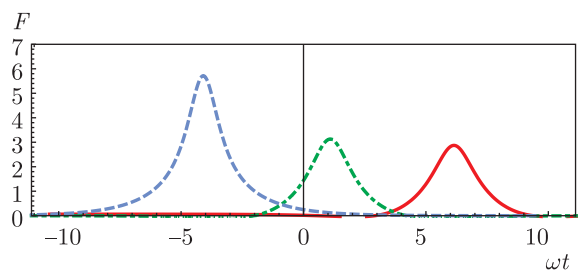
Для  $\text{sign}(a) > 0$  с ростом  $a$  происходит уменьшение амплитуды солитона и его уширение. В этом случае с ростом  $\mu$  также наблюдается усиление действия диполь-дипольного взаимодействия. Численное решение системы (10)–(13) для простых начально-краевых условий, приведенных выше, показывает такую же зависимость от ПДМ, как и полученные солитонные решения. На рис. 5 приведены результаты численного решения системы (10)–(13) для  $b = 0.5i$  и разных значений  $m$ .

#### 5.2. Бризерные решения

Бризерные решения находим для асимптотики  $R - mH \rightarrow 0$ , т.е.  $H \rightarrow (1 + b^2m^2)^{-1/2}$ . Каждое решение отвечает четырем полюсам  $\{\lambda_1, -\lambda_1, \lambda^*, -\lambda_1\}$  в системе уравнений (46), (47), решения которой приведены в Приложении. Полюсу  $\lambda_1$  отвечает решение  $\alpha_1 = \exp(-i\lambda_1\theta(\lambda_1) + i\psi_0 + \theta_0)$ , см. подробнее в Приложении. Значения  $\beta_j$  в уравнениях (46), (47) находим из (48) и свойств симметрии (49) и (50). Совместное влияние диполь-дипольного взаимодействия и ПДМ для  $b = id$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , приводит к резкому усилению более высоких амплитудных пиков бризера. С ростом параметров  $m > 0$ ,  $\text{Im } \lambda_1, |d|$  решение становится сингулярным. С увеличением  $m > 0$ , как и в случае солитонного решения, приведенного выше, сингулярность возникает для меньших значений  $|d|, \text{Im } \lambda_1$ . Для формирования мощного короткого импульса поля требуются меньшие значения коэффициента диполь-дипольного взаимодействия. Для  $m < 0$  с ростом  $|m|$ , так же как и выше, наблюдается сглаживание и уменьшение амплитуд пульсаций



**Рис. 1.** Солитонное решение для  $\eta_1 = 1, b = 0.6i, m > 0$ . Штриховой (синей), штрихпунктирной (зеленой) и сплошной (красной) линиям отвечает параметр ПДМ  $m = 0, 0.5, 0.6$  соответственно

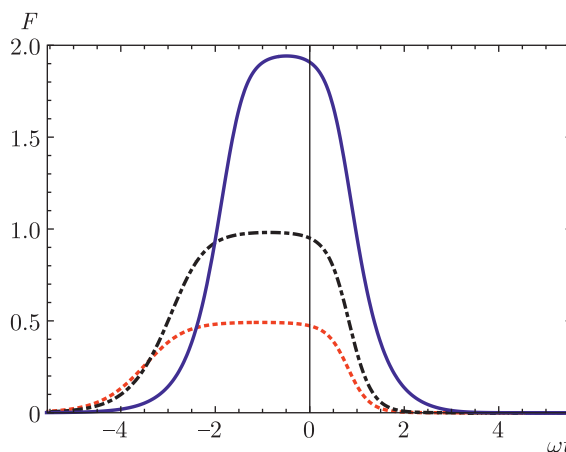


**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, но для  $m < 0$ . Штриховой (синей), штрихпунктирной (зеленой) и сплошной (красной) линиям отвечает параметр ПДМ  $|m| = 0, 0.5, 0.6$  соответственно

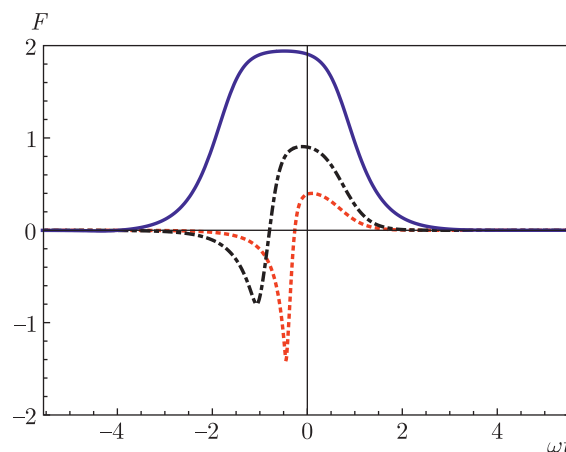
бризера. В случае  $b = d \in \mathbb{R}$  увеличение параметра  $m$ , который нелинейно растет с ростом  $\mu$ , см. выражение (27), приводит к уширению импульса поля без изменения его амплитуды. На рис. 6 и 7 показано изменение формы импульса с изменением коэффициента  $b$ , характеризующего диполь-дипольное взаимодействие для  $m = 0.01$ . Аналогичная динамика наблюдается для фиксированного коэффициента  $b$  и с ростом  $m$ .

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения представленной в работе интегрируемой модели (10)–(13) использованы для анализа эффектов, вызванных одновременным действием ди-



**Рис. 3.** Солитонное решение для  $\eta_1 = 1, b = 0.5, m > 0$ . Сплошной (синей), штрихпунктирной (черной) и пунктирной (красной) линиям отвечает параметр ПДМ  $m = 0.01, 1, 1.5$  соответственно



**Рис. 4.** То же, что на рис. 3, но для  $m < 0$ . Сплошной (синей), штрихпунктирной (черной) и пунктирной (красной) линиям отвечает параметр ПДМ  $|m| = 0.01, 1, 1.5$  соответственно

поль-дипольного взаимодействия и эффекта Штарка, обусловленного наличием ПДМ в двухуровневой среде. Обнаружено, что влияние ПДМ в изучаемой системе без учета диполь-дипольного взаимодействия несущественно при тех же прочих параметрах. В частности, для параметров, отвечающих рис. 1, те же изменения ПДМ без диполь-дипольного взаимодействия привели к изменению амплитуды на менее чем 1%. Без ПДМ условия формирования узкого мощного импульса требуют значений коэффициента диполь-дипольного взаимодействия в нормированном виде  $\approx 0.5-1$ . В присутствии ПДМ, который может составлять 1–3 дипольных моментов пе-

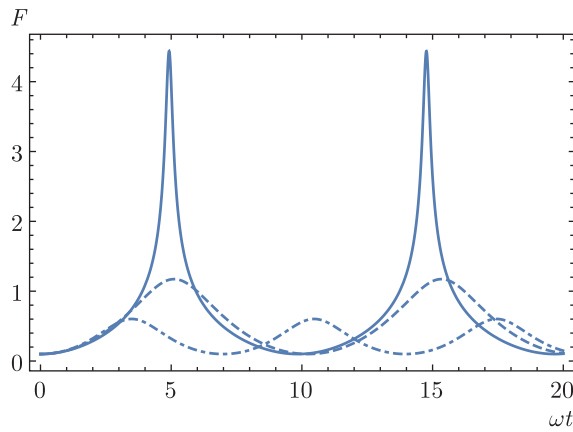


Рис. 5. Численное решение для  $F(0) = 0.01$ ,  $S_3(0) = -1$ ,  $b = 0.5i$  для периодических граничных условий. Сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиям соответствует  $m = 1, 0, -1$

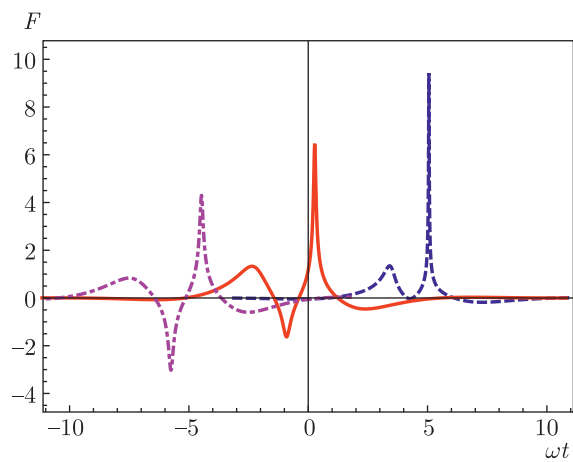


Рис. 6. Бризерное решение для  $\zeta_1 = 0.7$ ,  $\eta_1 = 0.6$ . Штрихпунктирной (фиолетовой), сплошной (красной) и штриховой (синей) линиям отвечает параметр  $b = 0.1i, 0.3i, 0.47i$  соответственно

перехода [32], формирование короткого импульса возможно и для относительно малых коэффициентов диполь-дипольного взаимодействия ( $\ll 1$ ).

Модель выводилась для описания эволюции импульсов электромагнитного поля. При этом система уравнений (10)–(13) может быть использована для объяснения особенностей и различия условий формирования экситонных импульсов в протяженных цепочках молекулярных агрегатов разных цианиновых красителей. Так, например, в цепочках  $J$ -агрегатов происходит формирование ультракоротких экситонных импульсов [31, 47, 48]. В то же время для  $H$ -агрегатов при прочих одинаковых условиях такие импульсы не наблюдались. В приближении

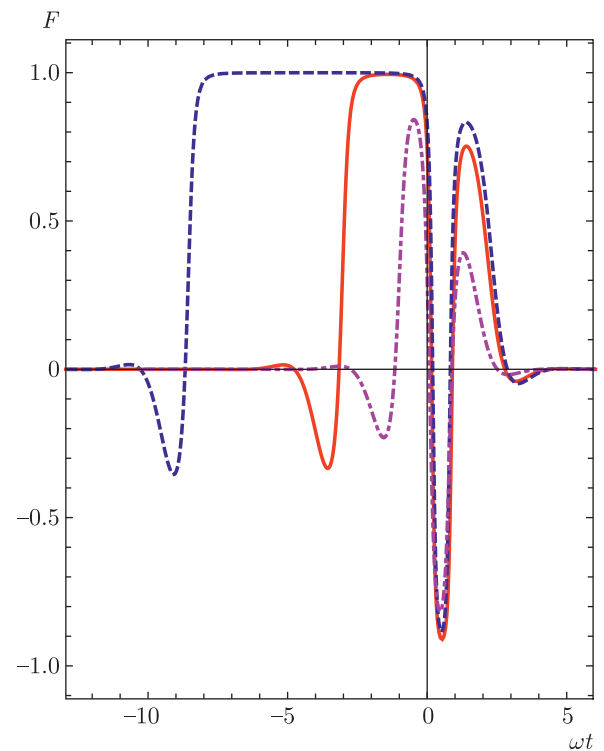


Рис. 7. Бризерное решение для  $\zeta_1 = 0.7$ ,  $\eta_1 = 0.6$ . Штрихпунктирной (фиолетовой), сплошной (красной) и штриховой (синей) линиям отвечает параметр  $b = 0.1, 0.3, 0.47$  соответственно

слабого взаимодействия, приводящего к уравнениям типа нелинейного уравнения Шредингера, этот эффект не удается объяснить, хотя солитонные решения имеются в случаях, ассоциированных с обеими формами агрегатов [31, 47, 48]. В рамках выведенной системы уравнений (10)–(13) этот результат можно объяснить различием знаков диполь-дипольного взаимодействия для  $J$ - и  $H$ -агрегатов красителей [32]. В приближении взаимодействия ближайших соседей  $J$ -агрегат отвечает мнимой константе  $b$ , а  $H$ -агрегат — действительной. Молекулы цианиновых красителей, составляющие агрегат, как правило, имеют ПДМ, сравнимый с дипольным моментом энергетического перехода или больший него [32]. Длительность экситонных импульсов может быть достаточно мала для оправданности приближений, использованных выше. Эти факты указывают на применимость полученных солитонных решений для объяснения наблюдаемых эффектов в длинных молекулярных цепочках и динамики возбуждений в белковых молекулах и в ДНК. Зависимость от знаков ПДМ и константы диполь-дипольного взаимодействия может быть использова-



на для влияния на перенос энергии в системе молекулярный агрегат – квантовая точка. Известно, что несимметричные квантовые точки могут обладать относительно большим ПДМ. Динамика возбуждения в среде, сформированной в виде длинной цепочки квантовых точек, помещенных вблизи волновода, может быть описана аналогичной моделью [28, 29]. Изменение направления ПДМ квантовых точек в такой системе может быть использовано для контроля эволюции поля в волноводе.

Зависимость  $m(\mu)$  имеет нелинейный вид, как видно из выражения (27). Динамика солитона критическим образом зависит от значений  $\mu$ . Например, солитонное решение для  $a < 0$ ,  $m > m_c$ , где  $m_c^2 (d^2 \eta^2 + 1) > \eta^2$ , трансформируется в периодическое.

Зависимость амплитуды импульса от ПДМ  $\propto \mu$  не монотонна для  $b = d \in \mathbb{R}$  и значений ПДМ, таких что  $1 + \mu^2 \sim \omega^2 d^2 / 4$ . Таким образом, приведенные решения демонстрируют многообразие поведения, зависящее от коэффициентов ПДМ и диполь-дипольного взаимодействия.

В заключение отметим, что модель (10)–(13) допускает обобщение на случай двухкомпонентного поля. Интегрируемая модель редуцированных уравнений Максвелла – Блоха, описывающая эволюцию поляризации поля в ДУС с ПДМ, но без учета диполь-дипольного взаимодействия, представлена в работе [13]. Критическое влияние поляризационных эффектов на формирование импульсов может быть результатом кручения цепочки [19]. Из этого можно сделать вывод, что учет двух компонент поляризации может привести к ряду новых интересных эффектов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00379) и Министерства науки Российской Федерации (грант № АААА-А17-117060810014-9).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**1.  $N = 1$**

Вследствие свойств симметрии простейшему солитонному решению отвечает полюс, лежащий на комплексной оси. Для  $b = d$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = i\eta$  и  $\alpha_1 =$

$= \exp(\theta + i\psi_0)$  имеем

$$p_1 = \frac{i \operatorname{cth} \theta}{\eta}, \tag{A.1}$$

$$s_0 = \frac{e^{i\psi_0} \operatorname{csch} \theta}{1 - id\eta}, \tag{A.2}$$

где  $\theta = \theta_{sr} - \theta_0$ ,  $\theta_0, \psi_0$  – константы, которые определяются из равенства

$$-\sqrt{\frac{b\lambda_1 - 1}{b\lambda_1 + 1}} = e^{i\psi_0 - \theta_0}, \tag{A.3}$$

$$\theta_{sr} = 2\sqrt{\eta^2 - m^2 (d^2 \eta^2 + 1)} \times \left[ u + \epsilon \chi \frac{(\mu^2 + 1) (d^2 \eta^2 + 1)}{4\eta^2 (\mu^2 + 1) + \omega^2} \right]. \tag{A.4}$$

Здесь и ниже  $\epsilon = \operatorname{sign}(S_3(0))$ . Для  $b = id$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = i\eta$  и  $\alpha_1(\theta) = e^{\theta + i\psi_0}$

$$p_1 = \frac{i(d\eta \operatorname{sh} \theta - \operatorname{ch} \theta)}{\eta(d\eta \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta)}, \tag{A.5}$$

$$s_0 = -\frac{e^{i\psi_0}}{d\eta \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta}, \tag{A.6}$$

где  $\theta = \theta_{si} - \theta_0$ ,  $\theta_0, \psi_0$  – константы, которые определяются из равенства (A.3),

$$\theta_{si} = -2\sqrt{\eta^2 + m^2 (d^2 \eta^2 - 1)} \times \left[ u + \epsilon \chi \frac{(\mu^2 + 1) (d^2 \eta^2 - 1)}{4\eta^2 (\mu^2 + 1) + \omega^2} \right]. \tag{A.7}$$

**2.  $N = 2$**

Для полюсов  $\{\lambda_1, -\lambda_1^*, \lambda^*, -\lambda_1\}$ ,  $\lambda_1 = \zeta + i\eta$ ,  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha_1 = \exp(i\psi + \theta)$  с учетом свойств симметрии (31) решение системы уравнений (46), (47) в случае  $b = id$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , имеет вид

$$p_2 = -8 \{ -d^2 \zeta^4 + \eta^2 \cos(2\theta) [d^2 (\zeta^2 + \eta^2) - 1] + \zeta^2 \operatorname{ch}(2\psi) [d^2 (\zeta^2 + \eta^2) + 1] + d^2 \eta^4 + 2d\zeta^3 \operatorname{sh}(2\psi) + 2d\eta^3 \sin(2\theta) + \zeta^2 + \eta^2 \}, \tag{A.8}$$

$$s_1 = 32i\zeta\eta \{ \operatorname{ch} \psi [\zeta \cos \theta - d (\zeta^2 + \eta^2) \sin(\theta)] + \eta \sin \theta \operatorname{sh} \psi \}. \tag{A.9}$$

Здесь

$$\theta = \frac{2\eta}{\sqrt{1 - d^2 m^2}} (u - \chi c_{0i} v_{ti}) + \theta_0, \tag{A.10}$$

$$\psi = \frac{2\zeta}{\sqrt{1 - d^2 m^2}} (u + \chi c_{0i} v_{pi}) + \psi_0, \tag{A.11}$$

$$c_{0i} = S_3(0) (\mu^2 + 1)^2 \sqrt{1 - d^2 m^2}, \tag{A.12}$$

$$v_{ti} = \frac{4(\mu^2 + 1)(\zeta^2 + \eta^2)(d^2(\zeta^2 + \eta^2) - 1) + \omega^2(d^2(\eta^2 - 3\zeta^2) - 1)}{16(\mu^2 + 1)^2(\zeta^2 + \eta^2)^2 - 8(\mu^2 + 1)\omega^2(\zeta - \eta)(\zeta + \eta) + \omega^4}, \quad (A.13)$$

$$v_{pi} = \frac{4(\mu^2 + 1)(\zeta^2 + \eta^2)(d^2(\zeta^2 + \eta^2) + 1) - \omega^2(d^2(\zeta^2 - 3\eta^2) + 1)}{16(\mu^2 + 1)^2(\zeta^2 + \eta^2)^2 - 8(\mu^2 + 1)\omega^2(\zeta - \eta)(\zeta + \eta) + \omega^4}, \quad (A.14)$$

$\theta_0, \psi_0$  — действительные константы. Аналогично для  $b = d$  находим

$$p_2 = -8 \left\{ -d^2\zeta^4 + \eta^2 \cos(2\theta) [d^2(\zeta^2 + \eta^2) - 1] + \zeta^2 \operatorname{ch}(2\psi) [d^2(\zeta^2 + \eta^2) + 1] + d^2\eta^4 + 2d\zeta^3 \operatorname{sh}(2\psi) + 2d\eta^3 \sin(2\theta) + \zeta^2 + \eta^2 \right\}, \quad (A.15)$$

$$s_1 = 32i\zeta\eta \left\{ \operatorname{sh} \psi [d(\zeta^2 + \eta^2) \cos \theta + \eta \sin \theta] + \zeta \cos \theta \operatorname{ch} \psi \right\}. \quad (A.16)$$

Здесь

$$\theta = \frac{2\eta}{\sqrt{1 + d^2m^2}} (u - \chi c_{0r} v_{tr}) + \theta_0, \quad (A.17)$$

$$\psi = \frac{2\zeta}{\sqrt{1 + d^2m^2}} (u + \chi c_{0r} v_{pr}) + \psi_0, \quad (A.18)$$

$$c_{0r} = S_3(0) (\mu^2 + 1)^2 \sqrt{1 + d^2m^2}, \quad (A.19)$$

$$v_{tr} = \frac{4(\mu^2 + 1)(\zeta^2 + \eta^2)(d^2(\zeta^2 + \eta^2) - 1) + \omega^2(d^2(\eta^2 - 3\zeta^2) - 1)}{16(\mu^2 + 1)^2(\zeta^2 + \eta^2)^2 - 8(\mu^2 + 1)\omega^2(\zeta - \eta)(\zeta + \eta) + \omega^4}, \quad (A.20)$$

$$v_{pr} = \frac{4(\mu^2 + 1)(\zeta^2 + \eta^2)(d^2(\zeta^2 + \eta^2) + 1) - \omega^2(d^2(\zeta^2 - 3\eta^2) + 1)}{16(\mu^2 + 1)^2(\zeta^2 + \eta^2)^2 - 8(\mu^2 + 1)\omega^2(\zeta - \eta)(\zeta + \eta) + \omega^4}. \quad (A.21)$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972).
2. G. L. Lamb, *Phys. Rev. A* **9**, 422 (1974).
3. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York (1975).
4. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
5. A. A. Zabolotskii, *Eur. Phys. J. Spec. Topics* **173**, 193 (2009).
6. А. И. Маймистов, *КЭ* **40**, 756 (2010).
7. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaevskii, *Theory of Solitons: the Inverse Scattering Method*, Nauka, Moscow (1980); Consultants Bureau, New York (1984).
8. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
9. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 709 (2002).
10. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 558 (2003) [*A. A. Zabolotskii, JETP Lett.* **77**, 464 (2003)].
11. H. Steudel, A. A. Zabolotskii, and R. Meinel, *Phys. Rev. E* **72**, 056608 (2005).
12. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **75**, 036612 (2007).
13. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **77**, 036603 (2008).
14. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
15. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **142**, 842 (2012).
16. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **151**, 249 (2017).
17. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Physica D* **366**, 1 (2018).
18. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Scripta* **94**, 115208 (2019).
19. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 303 (2019).
20. J.-G. Caputo and A. I. Maimistov, *Phys. Lett. A* **296**, 34 (2002).
21. А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, *Опг. и спектр.* **94**, 275 (2003).
22. M. A. Agrotis, *Phys. Lett. A* **315**, 81 (2003).
23. L. W. Casperson, *Phys. Rev. A* **57**, 609 (1998).
24. A. Brown, W. J. Meath, and P. Tran, *Phys. Rev. A* **63**, 013403 (2000).

25. D. You, D. R. Dykaar, and P. H. Bucksbaum, *Opt. Lett.* **18**, 290 (1993).
26. M. Wittmann, A. Nazarkin, and G. Korn, *Opt. Lett.* **26**, 5 (2001).
27. H. Kuhn and C. Kuhn, in *J-Aggregates*, ed. by T. Kobayashi, World Sci., Singapore (1996), Ch. 1.
28. A. V. Sorokin, A. A. Zabolotskii, N. V. Pereverzev, S. L. Yefimova, Y. V. Malyukin, and A. I. Plekhanov, *J. Phys. Chem. C* **118**, 7599 (2014).
29. A. A. Зоболотский, *ЖЭТФ* **152**, 676 (2017) [A. A. Zabolotskii, *JETP* **125**, 572 (2017)].
30. J. M. Hyman, D. W. McLaughlin, and A. C. Scott, *Physica D, Nonlin. Phenom.* **3**, 23 (1981).
31. Yu. B. Gaididei, K. Ø. Rasmussen, and P. L. Christiansen, *Phys. Rev. E* **52**, 2951 (1995).
32. F. Würthner, T. E. Kaiser, and C. R. Saha-Möller, *Angew. Chem. Int. Ed.* **50**, 3376 (2011), doi:10.1002/anie.201002307.
33. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. A* **85**, 063833 (2012).
34. J. Lenells and A. S. Fokas, *J. Math. Phys.* **51**, 023519 (2010).
35. Y. Matsuno, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 105204 (2010); *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 375201 (2010).
36. T. Schäfer and C. E. Wayne, *Physica D* **196**, 90 (2004).
37. K. Konno, Y. W. Ichikawa, and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn* **50**, 1025 (1981).
38. J. C. Brunelli, *J. Math. Phys.* **46**, 123507 (2005).
39. A. Sakovich and S. Sakovich, *J. Phys. A* **39**, L361 (2006).
40. V. K. Kuetché, T. B. Bouetou, and T. C. Kofane, *J. Phys. Soc. Jpn* **76**, 024004 (2007).
41. D. J. Kaup, *Physica D: Nonlin. Phenom.* **6**, 143 (1983).
42. A. A. Zabolotskii, *Physica D: Nonlin. Phenom.* **40**, 283 (1989).
43. R. F. Bikbaev, A. I. Bobenko, and A. R. Its, *Theor. Math. Phys.* **178**, 143 (2014). <https://doi.org/10.1007/s11232-014-0135-4>.
44. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin (1991).
45. H. Steudel and R. Meinel, *Physica D* **87**, 127 (1995).
46. H. Steudel, R. Meinel, and G. Neugebauer, *J. Math. Phys.* **38**, 4692 (1997).
47. Н. В. Высотина, Н. Н. Розанов, В. Е. Семенов, *Опт. и спектр.* **106**, 793 (2009) [N. V. Vysotina, N. N. Rosanov, and V. E. Semenov, *Opt. Spectrosc.* **106**, 713 (2009)].
48. N. N. Rosanov, S. V. Fedorov, L. A. Nesterov, and N. A. Veretenov, *Nanomaterials (Basel)* **9**, 826 (2019).